ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2006 МАТЕМАТИКА № 11 (534)

УДК 514.764

А.В. СТОЛЯРОВ

ПРОСТРАНСТВО КОНФОРМНОЙ СВЯЗНОСТИ

Теория пространств проективной связности, а также конформного пространства и вложенных в них подмногообразий разработана достаточно полно; вопросы пространства конформной связности и вложенных в него подмногообразий оставались слабо изученными. Исключение составляет работа [1], положившая начало изучению дифференциальной геометрии пространства конформной связности, которое, к сожалению, не получило достаточного развития в исследованиях других математиков (напр., обзор [2]).

В данной работе найдено необходимое и достаточное условие, при котором пространство проективной связности $P_{n,n+1}$ с инвариантным полем локальных гиперквадрик Дарбу $Q_n^2 \subset P_{n,n+1}$ является изоморфным пространству конформной связности $C_{n,n}$; изучаются некоторые вопросы внутренней геометрии нормализованного пространства $C_{n,n}$.

На протяжении всего изложения индексы пробегают следующие значения: $\lambda, \mu, \rho = \overline{0, n+1}$; $i, j, k, l, s, t = \overline{1, n}$; $I, K, L = \overline{1, n+1}$; $A, B = \overline{n+1, n+N}$; $u, v, w = \overline{1, r}$.

1. Предварительные сведения

Рассмотрим расслоенное многообразие $\mathfrak{M}$ с n-мерной базой B_n, N-мерными слоями E_N и r-членной группой Ли G_r. Согласно теореме Картана–Лаптева [3], [4] система пфаффовых форм ω^u в расслоенном многообразии $\mathfrak{M}$ устанавливает фундаментально-групповую связность со структурной группой G_r, определенной инвариантными формами ω^u, тогда и только тогда, когда формы ω^u связаны структурными уравнениями

$$D\omega^u = \frac{1}{2} c^u_{vw} \omega^v \wedge \omega^w + \frac{1}{2} R^u_{ij} \theta^i \wedge \theta^j, \tag{1}$$

где $c^u_{vw} = -c^u_{wv} = \text{const}$, $R^u_{ij} = -R^u_{ji}$, $D\theta^i = \theta^j \wedge \theta^i_j$, $\theta^i = a^i_j du^j$ — базовые формы Пфаффа на B_n, u^i — координаты точки базы B_n.

Если $x^A(u)$ — слоевые координаты точки слоя $E_N(u)$, то определяющее связность отображение ψ соседнего слоя $E_N(u+du)$ на исходное пространство $E_N(u)$ имеет вид [3]

$$x^A(u+du) \xrightarrow{\psi} x^A(u, du) = x^A(u) - \xi^A_u(u) \omega^u(u, du) + \pi \varepsilon^A, \tag{2}$$

причем $\lim\limits_{\pi \to 0} \varepsilon^A = 0$.

Поле геометрического объекта X^A пространства $\mathfrak{M}$ называется [3] инвариантным относительно связности пространства, если при определяющем связность инфинитезимальном отображении (2) локальный объект соседнего слоя $E_N(u+du)$ отображается (в главном) в локальный объект исходного слоя $E_N(u)$. Согласно [3] поле геометрического объекта X^A инвариантно относительно связности только тогда, когда определяющая его система дифференциальных уравнений имеет вид

$$dX^A = \xi^A_u(X) \omega^u, \tag{3}$$

где $\xi^A_u(X)$ — система основных функций, определяющих объект X^A, ω^u — формы связности пространства.

Не всякое пространство $\mathfrak{M}$ со связностью обладает инвариантным относительно связности геометрическим объектом; наличие инвариантного относительно связности объекта X^A приводит к конечным соотношениям для компонент R^u_{ij} тензора кривизны-кручения.

Пусть расслоенное пространство $\mathfrak{M}$ с фундаментально-групповой связностью является пространством проективной связности $P_{n,n+1}$; базой пространства $P_{n,n+1}$ служит многообразие B_n, слоями — проективные пространства P_{n+1} размерности $n+1$, структурная группа G_r имеет порядок $r = (n+1)(n+3)$. Формы связности $\{\omega^u\} \equiv \{\omega^\mu_\lambda\}$, $\omega^\rho_\rho = 0$ подчинены структурным уравнениям (ср. с (1))

$$D\omega^\mu_\lambda = \omega^\rho_\lambda \wedge \omega^\mu_\rho + \frac{1}{2} R^\mu_{\lambda st} \omega^s_0 \wedge \omega^t_0, \quad \omega^\rho_\rho = 0; \tag{4}$$

при этом независимые первые интегралы $u^1, u^2, \dots, u^n$ вполне интегрируемой системы линейно независимых уравнений $\omega^i_0 = 0$ являются локальными координатами точки $\mathrm{A}(u)$ базы B_n. С текущей точкой $\mathrm{A}(u) \in B_n$ связывается $(n+1)$-мерное проективное пространство P_{n+1}, отнесенное к точечному реперу $\{\mathrm{A}_\lambda\}$, причем $\mathrm{A}_0(u) \equiv \mathrm{A}(u)$. Формы ω^μ_λ определяют главную часть отображения ψ локального пространства $P_{n+1}(u+du)$ на исходное $P_{n+1}(u)$ [1], [3]:

$$\mathrm{A}_\lambda(u+du) \xrightarrow{\psi} \mathrm{A}_\lambda(u, du) = \mathrm{A}_\lambda(u) + \omega^\rho_\lambda \mathrm{A}_\rho(u) + \chi \cdot \varepsilon^\rho_\lambda \mathrm{A}_\rho, \tag{5}$$

где $\chi = \sqrt{(\omega^1)^2 + \dots + (\omega^n_0)^2}$, $\lim\limits_{\chi \to 0} \varepsilon^\rho_\lambda = 0$. Структурные уравнения (4) обеспечивают инвариантность главной части отображения (5) относительно преобразований семейства реперов.

В структурных уравнениях (4) функции $R^\mu_{\lambda st}$ кососимметричны по s, t, и их совокупность представляет собой тензор кривизны-кручения пространства $P_{n,n+1}$:

$$\nabla_\delta R^\mu_{\lambda st} + 2R^\mu_{\lambda st}\pi^0_0 = 0, \tag{6}$$

где δ — символ дифференцирования по параметрам центропроективной группы фиксированного слоя, т. е. при $\omega^i_0 = 0$, а $\pi^\mu_\lambda = \omega^\mu_\lambda\big|_{\omega^k_0=0}$. Отметим, что система дифференциальных уравнений движения репера $\{\mathrm{A}_\lambda\}$ в слое имеет вид $\delta \mathrm{A}_\lambda = \pi^\rho_\lambda \mathrm{A}_\rho$, откуда, в частности, следует $\pi^{n+1}_0 = 0$, т. е.

$$\omega^{n+1}_0 = \Lambda^{n+1}_{0k}\omega^k_0. \tag{7}$$

Между компонентами тензора кривизны-кручения существует линейная зависимость $R^\rho_{\rho st}=0$, которая является результатом замыкания уравнения $\omega^\rho_\rho = 0$ (см. (4)).

Система функций R^I_{0st} согласно уравнениям (6) образует подтензор тензора $R^\mu_{\lambda st}$, а именно, тензор кручения пространства $P_{n,n+1}$. Для пространства проективной связности $\overset{0}{P}_{n,n+1}$ без кручения из (4) следует уравнение $D\omega^I_0 = \omega^K_0 \wedge (\omega^I_K - \delta^I_K \omega^0_0)$, замыкая которое с использованием (7), получим

$$R^I_{(lst)} - \delta^I_{(l} R^0_{|0|st)} + \Lambda^{n+1}_{0(l} R^I_{|n|st)} - \delta^I_n \Lambda^{n+1}_{0(l} R^0_{|0|st)} = 0. \tag{8}$$

Соотношения (8) представляют собой аналоги известных тождеств Риччи.

2. Пространство конформной связности

Допустим, что пространство $P_{n,n+1}$ обладает инвариантным полем локальных гиперквадрик овального типа Q^2_n, проходящих через центры соответствующих слоев (поле локальных гиперквадрик Дарбу):

$$g_{\lambda\mu}x^\lambda x^\mu = 0, \quad g_{00} = 0, \quad g_{\lambda\mu} = g_{\mu\lambda}, \quad |g_{\lambda\mu}| \neq 0, \tag{9}$$

$$\delta g_{\lambda\mu} - g_{\lambda\rho}\pi^\rho_\mu - g_{\rho\mu}\pi^\rho_\lambda = \theta g_{\lambda\mu}, \quad D\theta = \theta \wedge \theta^0_0. \tag{10}$$

В уравнениях (9) коэффициенты $g_{\lambda\mu}$ определяются с точностью до скалярного множителя $\eta \neq 0 : \widetilde{g}_{\lambda\mu} = \eta \cdot g_{\lambda\mu}$; дифференциальные уравнения (10) теперь запишутся в виде $\delta \widetilde{g}_{\lambda\mu} - \widetilde{g}_{\lambda\rho}\pi^\rho_\mu -$

$-\widetilde{g}_{\rho\mu}\pi^\rho_\lambda = (\delta\ln\eta+\theta)\widetilde{g}_{\lambda\mu}$. Так как форма θ есть полный дифференциал, т. е. $\theta=\delta F$, то в последних уравнениях за счет соответствующего выбора η можно считать $\widetilde{\theta} \overset{\mathrm{def}}{=} \delta\ln\eta+\theta=0$.

Ниже предполагается выполненным такое нормирование коэффициентов уравнения локального абсолюта (9); при этом уравнения (10) примут вид

$$\delta g_{\lambda\mu} - g_{\lambda\rho}\pi^\rho_\mu - g_{\rho\mu}\pi^\rho_\lambda = 0,$$

т. е.

$$\begin{gathered}
\delta g_{0i} - g_{0i}\pi^0_0 - g_{0k}\pi^k_i - g_{0,n+1}\pi^{n+1}_i = 0,\\
\delta g_{0,n+1} - g_{0,n+1}(\pi^0_0+\pi^{n+1}_{n+1}) - g_{0k}\pi^k_{n+1} = 0,\\
\delta g_{n+1,n+1} - 2(\pi^0_{n+1} + g_{n+1,k}\pi^k_{n+1} + g_{n+1,n+1}\pi^{n+1}_{n+1}) = 0,\\
\delta g_{ij} - g_{ik}\pi^k_j - g_{kj}\pi^k_i - g_{i0}\pi^0_j - g_{0j}\pi^0_i - g_{i,n+1}\pi^{n+1}_j - g_{n+1,j}\pi^{n+1}_i = 0,\\
\delta g_{i,n+1} - g_{k,n+1}\pi^k_i - g_{i,n+1}\pi^{n+1}_{n+1} - g_{i0}\pi^0_{n+1} - g_{ik}\pi^k_{n+1} - g_{0,n+1}\pi^0_i - g_{n+1,n+1}\pi^{n+1}_i = 0.
\end{gathered} \tag{11}$$

Согласно лемме Н.М. Остиану [5], уравнения (11) позволяют провести такую канонизацию репера $R=\{\mathrm{A}_\lambda\}$, при которой

$$g_{n+1,n+1} = g_{0i} = g_{n+1,i} = 0, \quad g_{0,n+1} = 1; \tag{12}$$

при этом справедливо

$$\pi^{n+1}_i = \pi^0_{n+1} = \pi^0_0 + \pi^{n+1}_{n+1} = \pi^0_i + g_{ik}\pi^k_{n+1} = 0, \quad \delta g_{ij} - g_{ik}\pi^k_j - g_{kj}\pi^k_i = 0. \tag{13}$$

Геометрически такая специализация репера R означает следующее: инвариантная локальная гиперквадрика Дарбу Q^2_n оказалась отнесенной к реперу 1-го порядка, при которой вершины A_0, A_{n+1} принадлежат гиперквадрике Q^2_n, а вершины A_i лежат на пересечении касательных гиперплоскостей к Q^2_n в точках A_0, A_{n+1}.

Соотношения (7), (13) говорят о том, что в каждом слое пространства $P_{n,n+1}$ действует подгруппа группы проективных преобразований, являющаяся стационарной по отношению к гиперквадрике Дарбу Q^2_n; эта подгруппа зависит от $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$ параметров.

При таком выборе поля реперов R согласно ([6], с. 65) назовем полем полуизотропных реперов, уравнение гиперквадрики Дарбу поля (9) в силу (12) имеет вид

$$g_{ij}x^ix^j + 2x^0x^{n+1} = 0, \quad |g_{ij}| \neq 0. \tag{14}$$

Из (7), (13) следуют соотношения

$$\begin{gathered}
\omega^{n+1}_0 = \Lambda^{n+1}_{0k}\omega^k_0, \quad \omega^0_{n+1} = \Lambda^0_{n+1,k}\omega^k_0, \quad \omega^{n+1}_i = \Lambda^{n+1}_{ik}\omega^k_0,\\
\omega^0_0 + \omega^{n+1}_{n+1} = B_k\omega^k_0, \quad g_{ik}\omega^k_{n+1} + \omega^0_i = \Lambda_{ik}\omega^k_0,\\
dg_{ij} - g_{ik}\omega^k_j - g_{kj}\omega^k_i = g_{ijk}\omega^k_0.
\end{gathered} \tag{15}$$

Продолжая уравнения системы (15), с использованием (4) получим

$$\begin{gathered}
d\Lambda^{n+1}_{0i} - \Lambda^{n+1}_{0k}\omega^k_i + \Lambda^{n+1}_{0i}\omega^{n+1}_{n+1} - \Lambda^{n+1}_{0l}\Lambda^{n+1}_{0i}\omega^l_{n+1} = \Lambda^{n+1}_{0is}\omega^s_0,\\
d\Lambda^0_{n+1,i} + \Lambda^0_{n+1,i}(2\omega^0_0 - \omega^{n+1}_{n+1}) - \Lambda^0_{n+1,k}(\omega^k_i + \Lambda^{n+1}_{0i}\omega^k_{n+1}) + g^{ks}\Lambda_{si}\omega^0_k = \Lambda^0_{n+1,is}\omega^s_0,\\
d\Lambda^{n+1}_{ik} - \Lambda^{n+1}_{is}\omega^s_k - \Lambda^{n+1}_{sk}\omega^s_i - \Lambda^{n+1}_{0k}(\Lambda^{n+1}_{is}\omega^s_{n+1} + \omega^0_i) = \Lambda^{n+1}_{iks}\omega^s_0,\\
dB_i + B_i\omega^0_0 + B_s\omega^s_i + \omega^0_i - \Lambda^{n+1}_{li}\omega^l_{n+1} - B_l\Lambda^{n+1}_{0i}\omega^l_{n+1} = B_{is}\omega^s_0,\\
d\Lambda_{ik} + 2\Lambda_{ik}\omega^0_0 - \Lambda_{is}\omega^s_k - \Lambda_{sk}\omega^s_i + (g_{isk} + g_{is}B_k)\omega^s_{n+1} - \Lambda_{is}\Lambda^{n+1}_{0k}\omega^s_{n+1} = \Lambda_{iks}\omega^s_0,\\
dg_{ijk} + g_{ijk}\omega^0_0 - g_{ijs}\omega^s_k - g_{isk}\omega^s_j - g_{sjk}\omega^s_i - g_{ijs}\Lambda^{n+1}_{0k}\omega^s_{n+1} + (g_{ik} + \Lambda^{n+1}_{ik})\omega^0_j + (g_{jk} + \Lambda^{n+1}_{jk})\omega^0_i = g_{ijks}\omega^s_0,
\end{gathered} \tag{16}$$

где

$$
\begin{gathered}
2\Lambda^{n+1}_{0[ik]} = -2\Lambda^{n+1}_{[ik]} + \Lambda^{n+1}_{il}R^l_{0ik} - R^{n+1}_{0ik},\\
2\Lambda^0_{n+1[ik]} = \Lambda^0_{n+1,l}R^l_{0ik} - R^0_{n+1,ik},\\
2\Lambda^{n+1}_{i[ks]} = -2\Lambda^{n+1}_{i[k}B_{s]} + \Lambda^{n+1}_{il}R^l_{0ks} - R^{n+1}_{iks},\\
2B_{[is]} = B_lR^l_{0is} - (R^0_{0is} + R^{n+1}_{n+1,is}),\\
2\Lambda_{i[ks]} = 2(g_{i[k} + \Lambda^{n+1}_{i[k})\Lambda^0_{|n+1|s]} - g_{il}R^l_{n+1,ks} - R^0_{iks} + \Lambda_{il}R^l_{0ks},\\
2g_{ij[ks]} = 2(\Lambda^{n+1}_{i[k}\Lambda_{|j|s]} + \Lambda^{n+1}_{j[k}\Lambda_{|i|s]}) + g_{ijl}R^l_{0ks} + g_{il}R^l_{jks} + g_{jl}R^l_{iks}.
\end{gathered}
\tag{17}
$$

Уравнениям (16) удовлетворяют охваты

$$
\Lambda^{n+1}_{0i} = \Lambda^0_{n+1,i} = B_i = \Lambda_{ik} = g_{ijk} = 0, \quad \Lambda^{n+1}_{ik} = -g_{ik};
\tag{18}
$$

при этом в силу (15) справедливо

$$
\Lambda^{n+1}_{0is} = \Lambda^0_{n+1,is} = \Lambda_{iks} = g_{ijks} = \Lambda^{n+1}_{iks} = B_{is} = 0.
\tag{19}
$$

Из соотношений (17) согласно (19) находим

$$
\begin{gathered}
R^{n+1}_{0st} = R^0_{n+1,st} = 0, \quad R^0_{0st} + R^{n+1}_{n+1,st} = 0,\\
R^{n+1}_{ist} + g_{il}R^l_{0st} = 0, \quad g_{il}R^l_{n+1,st} + R^0_{ist} = 0, \quad g_{il}R^l_{jst} + g_{jl}R^l_{ist} = 0.
\end{gathered}
\tag{20}
$$

При охватах (18) уравнения (15) запишутся в виде

$$
\begin{aligned}
&\text{а) } \omega^{n+1}_0 = \omega^0_{n+1} = \omega^0_0 + \omega^{n+1}_{n+1} = 0,\\
&\text{б) } \omega^{n+1}_i + g_{ik}\omega^k_0 = 0, \quad \omega^0_i + g_{ik}\omega^k_{n+1} = 0,\\
&\text{в) } dg_{ij} - g_{ik}\omega^k_j - g_{kj}\omega^k_i = 0.
\end{aligned}
\tag{21}
$$

В силу $|g_{ij}| \neq 0$ справедливо

$$
g^{ik}g_{kj} = \delta^i_j, \quad dg^{ik} + g^{is}\omega^k_s + g^{sk}\omega^i_s = 0.
\tag{22}
$$

Согласно ([7]; [8], с. 10) дифференциальные формы Пфаффа ω^μ_λ от $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$ параметров группы конформных преобразований, осуществляющие инфинитезимальное перемещение полуизотропного репера n-мерного конформного пространства C_n с полем метрического тензора g_{ij}, удовлетворяют зависимостям вида (21); при этом в силу отображения Дарбу все точки конформного пространства C_n отображаются в точки неподвижной гиперквадрики Дарбу (14) проективного пространства P_{n+1}, а гиперсферы действительных радиусов пространства C_n — в точки пространства P_{n+1}, лежащие вне овальной гиперквадрики (14).

Справедливо и обратное. Если в проективном пространстве P_{n+1} задана неподвижная гиперквадрика овального типа Q^2_n, то, как известно ([6]; [9], с. 485), точкам пространства P_{n+1} с помощью стереографической проекции ставятся в соответствие либо точки, либо гиперсферы Q^2_{n-1} действительного или мнимого радиусов, либо гиперплоскости Π_{n-1}, проходящие через одну точку, называемую несобственной, которые являются образующими элементами конформного пространства C_n.

Это говорит о том, что каждый центропроективный слой P_{n+1} пространства проективной связности $P_{n,n+1}$ с полем локальных гиперквадрик Дарбу (14) изоморфен конформному пространству C_n.

Итак, если пространство проективной связности $P_{n,n+1}$ обладает инвариантным полем локальных гиперквадрик Дарбу Q^2_n (см. (9)), то уравнение локальной гиперквадрики в полуизотропном репере запишется в виде (14), где компоненты поля симметричного тензора g_{ij} удовлетворяют уравнениям (21в)), причем формы связности пространства $P_{n,n+1}$ удовлетворяют (21а), б)) и компоненты его тензора кривизны-кручения — соотношениям (20).

Обратно, если коэффициенты гиперквадрики (14) удовлетворяют уравнениям (21в)), то их совокупность представляет собой систему вида (3) для объекта $X^A = \{g_{ij}\}$. В силу этого поле геометрического объекта $\{g_{ij}\}$, т. е. поле локальных гиперквадрик Дарбу (14) инвариантно относительно связности пространства $P_{n,n+1}$. Последнее означает, что пространство $P_{n,n+1}$ с инвариантным полем локальных гиперквадрик Дарбу (14) изоморфно пространству конформной связности $C_{n,n}$. Доказана

Теорема 1. *Для того чтобы пространство проективной связности $P_{n,n+1}$ обладало инвариантным полем гиперквадрик* (14) *овального типа, т. е. чтобы оно было изоморфно пространству конформной связности $C_{n,n}$, необходимо и достаточно, чтобы в полуизотропном репере выполнялась система дифференциальных уравнений* (21).

Заметим, что наличие в $P_{n,n+1}$ инвариантного поля локальных гиперквадрик Дарбу овального типа (14) приводит к конечным соотношениям (20) для компонент его тензора кривизны-кручения. Одновременное выполнение этих соотношений есть условие полной интегрируемости объединенной системы дифференциальных уравнений (21); при этом широта решения определяется с произволом в $\frac{(n+2)(n+3)}{2}$ постоянных.

Отметим, что

1) система функций $\{R^{\mu}_{\lambda st}\}$, удовлетворяющих конечным соотношениям (20), есть тензор кривизны-кручения пространства $C_{n,n}$ конформной связности, причем система функций $\{R^i_{0st}\}$ образует тензор кручения пространства $C_{n,n}$;

2) полем метрического тензора пространства конформной связности $C_{n,n}$ является поле тензора g_{ij}; отрицательный индекс инерции l квадратичной формы $g_{ij}\omega^i_0\omega^j_0$ есть индекс пространства конформной связности $C_{n,n}$ (при $l > 0$ — пространство псевдоконформной связности индекса l, $l = 0$ — пространство собственно-конформной связности).

В силу $R^{n+1}_{0st} = 0$ (см. (20)) пространство $P_{n,n+1}$ с инвариантным полем гиперквадрик Дарбу (14) имеет нулевое кручение ($R^I_{0st} = 0$) тогда и только тогда, когда $C_{n,n}$ — пространство конформной связности без кручения ($R^i_{0st} = 0$). Для пространства $\overset{0}{C}_{n,n}$ без кручения аналоги тождеств Риччи (8) в силу $\Lambda^{n+1}_{0i} = 0$ (см. (18)) примут вид

$$R^i_{(lst)} - \delta^i_{(l}R^0_{|0|st)} = 0. \tag{23}$$

Для пространства $\overset{0}{C}_{n,n}$ в силу $R^{n+1}_{ist} = 0$ (см. (20)) система функций $\{R^j_{ist}\}$ образует тензор, при этом по аналогии с пространством аффинной связности $\overset{0}{A}_{n,n}$ без кручения тензор $R_{is} \overset{\text{def}}{=} R^j_{isj}$ назовем тензором Риччи пространства $\overset{0}{C}_{n,n}$. В случае симметрии тензора R_{is} пространство $\overset{0}{C}_{n,n}$ назовем *эквиконформным.*

Из тождеств (23) в силу $R^j_{jst} = 0$ (см. (20)) находим

$$2R_{[st]} = (n-2)R^0_{0st}. \tag{24}$$

В силу (24) доказана

Теорема 2. *Пространство конформной связности $\overset{0}{C}_{2,2}$ является эквиконформным. Пространство $\overset{0}{C}_{n,n}$ при $n > 2$ является эквиконформным тогда и только тогда, когда тензор R^0_{0st} обращается в нуль.*

Заметим, что при $n = 2$ для пространства $\overset{0}{C}_{2,2}$ (которое всегда эквиконформное) тензор R^0_{0st} необязательно нулевой.

3. Внутренняя геометрия нормализованного пространства конформной связности

1. Пусть пространство проективной связности $P_{n,n+1}$ обладает инвариантным полем гиперквадрик овального типа Q^2_n (см. (14)). Возьмем нормализацию ([10], с. 210) пространства $P_{n,n+1}$ полем гиперплоскостей $\Pi_n \equiv [\mathrm{X}_{n+1}, \mathrm{P}_i]$, касающихся гиперквадрик $Q^2_n(\mathrm{A}_0)$ в соответствующих точках $\mathrm{X}_{n+1} \in Q^2_n$, причем

$$\mathrm{P}_i = \mathrm{A}_i + x^0_i \mathrm{A}_0. \tag{25}$$

Так как в полуизотропном репере

$$\delta \mathrm{P}_i = (\delta x^0_i + x^0_i \pi^0_0 - x^0_j \pi^j_i + \pi^0_i)\mathrm{A}_0 + \pi^j_i \mathrm{P}_j,$$

то справедливо утверждение, что задание поля нормализующих гиперплоскостей $\Pi_n(\mathrm{A}_0)$ равносильно заданию поля квазитензора x^0_i:

$$dx^0_i + x^0_i \omega^0_0 - x^0_j \omega^j_i + \omega^0_i = x^0_{ij} \omega^j_0. \tag{26}$$

Действительно, если

$$\mathrm{X}_{n+1} = x^0_{n+1}\mathrm{A}_0 + x^j_{n+1}\mathrm{A}_j + \mathrm{A}_{n+1}, \tag{27}$$

то касательная к Q^2_n в ее точке X_{n+1} гиперплоскость $\Pi_n(\mathrm{X}_{n+1})$ имеет уравнение $g_{ij}x^i x^j_{n+1} + x^0 + x^{n+1}x^0_{n+1} = 0$. Гиперплоскость $\Pi_n \equiv [\mathrm{X}_{n+1}, \mathrm{P}_i]$ содержит точки P_i (см. (25)) тогда и только тогда, когда

$$x^j_{n+1} = -g^{js}x^0_s. \tag{28}$$

В силу соотношений (27), (28) точка касания X_{n+1} лежит на гиперквадрике Дарбу (14) тогда и только тогда, когда

$$x^0_{n+1} = -\frac{1}{2} g^{js} x^0_j x^0_s. \tag{29}$$

Следовательно, согласно (25), (27)–(29) справедливо

$$\mathrm{X}_{n+1} = \frac{1}{2} g^{js} x^0_j x^0_s \mathrm{A}_0 - g^{js} x^0_s \mathrm{P}_j + \mathrm{A}_{n+1}, \tag{30}$$

последнее и доказывает утверждение.

Продолжая уравнения (26), находим

$$dx^0_{ij} + 2x^0_{ij}\omega^0_0 - x^0_{ik}\omega^k_j - x^0_{kj}\omega^k_i + x^0_i \omega^0_j + x^0_j \omega^0_i - g_{ij} g^{lk} x^0_l \omega^0_k = x^0_{ijk}\omega^k_0, \tag{31}$$

где

$$2x^0_{i[jk]} = x^0_l R^l_{ijk} - x^0_i R^0_{0jk} - R^0_{ijk} + x^0_{il} R^l_{0jk}. \tag{32}$$

В силу уравнений (21в)), (22), (31) убеждаемся, что система функций

$$a^0_{ij} \stackrel{\mathrm{def}}{=} x^0_{ij} - x^0_i x^0_j + \frac{1}{2} g_{ij} g^{lk} x^0_l x^0_k \tag{33}$$

образует тензор (вообще говоря, несимметричный)

$$\begin{aligned} &\text{а)}\quad da^0_{ij} + 2a^0_{ij}\omega^0_0 - a^0_{ik}\omega^k_j - a^0_{kj}\omega^k_i = a^0_{ijk}\omega^k_0, \\ &\text{б)}\quad a^0_{ijk} = x^0_{ijk} - x^0_{ik}x^0_j - x^0_i x^0_{jk} + \frac{1}{2} g_{ij} g^{lt}(x^0_{lk}x^0_t + x^0_l x^0_{tk}). \end{aligned} \tag{34}$$

Тензор a^0_{ij} назовем основным тензором нормализации пространства $P_{n,n+1}$ полем квазитензора x^0_i. В случае симметрии основного тензора a^0_{ij} нормализацию пространства $P_{n,n+1}$ по аналогии с нормализацией проективного пространства ([10], с. 211) назовем гармонической.

Поляра каждой точки P_i (см. (25)) относительно гиперквадрики Дарбу Q_n^2 (см. (14)) пересекается с ней по соответствующей квадрике $\overset{(i)}{Q}{}^2_{n-1}$, содержащей точки A_0, X_{n+1}; в силу этого справедливо $\bigcap\limits_{i=1}^{n} \overset{(i)}{Q}{}^2_{n-1} \equiv \mathrm{A}_0, \mathrm{X}_{n+1}$; $\mathrm{X}_{n+1} \neq \mathrm{A}_0$.

В дальнейшем изложении будем считать, что образующие элементы (точки, гиперсферы или гиперплоскости) слоя C_n пространства конформной связности $C_{n,n}$ обозначаются прописными латинскими буквами с курсивом, а соответствующие им в отображении Дарбу точки слоя P_{n+1} пространства проективной связности $P_{n,n+1}$ обозначаются прописными латинскими буквами без курсива. Например, для пространства $C_{n,n}$, изоморфного $P_{n,n+1}$ с заданным инвариантным полем гиперквадрик Дарбу (14), из выражений (25), (30) следует

$$P_i = A_i + x_i^0 A_0, \tag{25$'$}$$

$$X_{n+1} = \frac{1}{2} g^{js} x_j^0 x_s^0 A_0 - g^{js} x_j^0 P_s + A_{n+1}; \tag{30$'$}$$

здесь A_0, A_{n+1}, X_{n+1} — точки (гиперсферы нулевого радиуса), A_i — гиперсферы (действительного радиуса) слоя C_n, проходящие через точки A_0, A_{n+1}, а P_i — гиперсферы действительного радиуса, проходящие через точки A_0, X_{n+1}.

Таким образом, нормализация пространства конформной связности $C_{n,n}$, соответствующая рассмотренной выше нормализации пространства проективной связности $P_{n,n+1}$ с заданным инвариантным полем гиперквадрик Дарбу (14), равносильна заданию в нем дифференцируемого точечного соответствия $A_0 \to X_{n+1}$, $X_{n+1} \neq A_0$, где точки X_{n+1} нормализующего поля имеют строение (30$'$). Эта нормализация эквивалентна тому, что к каждой точке $A_0 \in C_{n,n}$ в соответствующем слое $C_n(A_0)$ присоединены n гиперсфер (25$'$), проходящих через точки A_0, X_{n+1}. Последнее равносильно заданию в $C_{n,n}$ поля квазитензора x_i^0 (см. (26)).

2. Пусть пространство конформной связности $C_{n,n}$ нормализовано полем квазитензора x_i^0. Возьмем систему форм

$$\begin{aligned} &\overset{1}{\theta}{}_0^j = \omega_0^j, \\ &\overset{1}{\theta}{}_i^j = \omega_i^j - \delta_i^j(\omega_0^0 - x_k^0\omega_0^k) + g^{jk}x_k^0\omega_i^{n+1} + x_i^0\omega_0^j. \end{aligned} \tag{35}$$

Эта система форм удовлетворяет структурным уравнениям Картана–Лаптева

$$\begin{aligned} D\overset{1}{\theta}{}_0^j &= \overset{1}{\theta}{}_0^k \wedge \overset{1}{\theta}{}_k^j + \frac{1}{2}\overset{1}{r}{}_{0st}^j \omega_0^s \wedge \omega_0^t, \\ D\overset{1}{\theta}{}_i^j &= \overset{1}{\theta}{}_i^k \wedge \overset{1}{\theta}{}_k^j + \frac{1}{2}\overset{1}{r}{}_{ist}^j \omega_0^s \wedge \omega_0^t, \end{aligned} \tag{36}$$

а следовательно, определяет пространство аффинной связности $\overset{1}{A}_{n,n}$. В структурных уравнениях (36) каждая из систем функций $\{\overset{1}{r}{}_{0st}^j\}$, $\{\overset{1}{r}{}_{ist}^j\}$ есть соответственно тензор кручения и тензор кривизны пространства $\overset{1}{A}_{n,n}$. С учетом (33) их компоненты имеют следующие строения:

$$\begin{aligned} &\text{а)}\ \ \overset{1}{r}{}_{0st}^j = R_{0st}^j, \\ &\text{б)}\ \ \overset{1}{r}{}_{ist}^j = 2(a_{i[s}^0\delta_{t]}^j - g^{jk}a_{k[s}^0 g_{t]i} - \delta_i^j a_{[st]}^0) + R_{ist}^j - \delta_i^j(R_{0st}^0 - x_k^0 R_{0st}^k) + g^{jk}x_k^0 R_{ist}^{n+1} + x_i^0 R_{0st}^j. \end{aligned} \tag{37}$$

Заметим, что согласно (37а)) пространство $\overset{1}{A}_{n,n}$ имеет нулевое кручение тогда и только тогда, когда $C_{n,n}$ — пространство конформной связности без кручения.

Уравнения (21в)) с использованием (35) можно записать в виде

$$dg_{ij} - g_{ik}\overset{1}{\theta}{}_j^k - g_{kj}\overset{1}{\theta}{}_i^k = 2g_{ij}(\omega_0^0 - x_k^0\omega_0^k). \tag{38}$$

Последние уравнения говорят о том, что аффинная связность $\overset{1}{\nabla}$ пространства $\overset{1}{A}_{n,n}$ является вейлевой (вообще говоря, с кручением) с полем метрического тензора g_{ij}. Доказана

Теорема 3. *Нормализация пространства конформной связности $C_{n,n}$ индуцирует пространство аффинной связности $\overset{1}{A}_{n,n}$, определяемое системой пфаффовых форм* (35), *при этом аффинная связность $\overset{1}{\nabla}$ пространства $\overset{1}{A}_{n,n}$* а) *является вейлевой* (*вообще говоря, с кручением*) *с полем метрического тензора g_{ij}*; б) *имеет нулевое кручение тогда и только тогда, когда $C_{n,n}$ — без кручения.*

3. Рассмотрим нормализованное пространство конформной связности $\overset{0}{C}_{n,n}$ без кручения. В этом случае согласно теореме 3 пространство $\overset{1}{A}_{n,n}$ имеет нулевое кручение и для него в силу соотношений (20), (23), (37б)) справедливы тождества Риччи $\overset{1}{r}{}^{j}_{(ist)}$. Из последних тождеств непосредственно находим

$$\overset{1}{r}{}^{k}_{kst} = -2\overset{1}{r}_{[st]}, \tag{39}$$

где $\overset{1}{r}_{st} = \overset{1}{r}{}^{k}_{stk}$ есть тензор Риччи связности $\overset{1}{\nabla}$ пространства $\overset{1}{A}A_{n,n}$.

В случае пространства $\overset{1}{A}_{n,n}$ без кручения из выражений (37б)) с использованием соотношений (20), (37а)) имеем

$$\overset{1}{r}{}^{k}_{kst} = -n(2a^{0}_{[st]} + R^{0}_{0st}). \tag{40}$$

Из соотношений (39), (40) следует

$$2\overset{1}{r}_{[st]} = n(2a^{0}_{[st]} + R^{0}_{0st}). \tag{41}$$

Согласно (41) и теореме 2 справедливо следующее предложение.

Теорема 4. *Если на нормализованном пространстве конформной связности $\overset{0}{C}_{n,n}$ без кручения при $n > 2$ имеют место любые два условия из следующих трех*:

а) *аффинная связность $\overset{1}{\nabla}$ эквиаффинная,*

б) *нормализация пространства $\overset{0}{C}_{n,n}$ гармоническая,*

в) *пространство $\overset{0}{C}_{n,n}$ эквиконформное,*

то выполняются все три.

Из теорем 3, 4 вытекает

Следствие. При нормализации эквиконформного пространства $\overset{0}{C}_{n,n}$, $n > 2$, индуцируется эквиаффинная, а следовательно, риманова связность $\overset{1}{\nabla}$ с полем метрического тензора g_{ij} тогда и только тогда, когда нормализация пространства является гармонической.

Данное следствие справедливо и при $n = 2$, если задано пространство $\overset{0}{C}_{2,2}$ с полем нулевого тензора R^{0}_{0st}; это имеет место, например, при $C_{2,2} \equiv \mathrm{C}_2$ (т. е. $R^{\mu}_{\lambda st} \equiv 0$).

Приведем пример нормализации эквиконформного пространства $\overset{0}{C}_{n,n}$, $n > 2$, индуцирующей риманову связность $\overset{1}{\nabla}$.

Предположим, что нормализация пространства конформной связности $C_{n,n}$ полем квазитензора x_i^0 является невырожденной, т. е. тензор a_{ij}^0 (см. (33)) невырожден: $a \overset{\text{def}}{=} |a_{ij}^0| \neq 0$. Тогда существует обратный тензор a_0^{kj}, удовлетворяющий соотношениям

$$\begin{aligned} &\text{а)}\quad a_0^{ik}a_{kj}^0 = a_0^{ki}a_{jk}^0 = \delta_j^i,\\ &\text{б)}\quad da_0^{ij} - 2a_0^{ij}\omega_0^0 + a_0^{ik}\omega_k^j + a_0^{kj}\omega_k^i = -a_0^{ik}a_0^{sj}a_{kst}^0\omega_0^t. \end{aligned} \tag{42}$$

Так как справедливо $d\ln a = a_0^{ji}da_{ij}^0$, то в силу (34а)), (42а)) находим

$$d\ln a + 2n\omega_0^0 - 2\omega_k^k = a_k\omega_0^k, \quad a_k = a_0^{ji}a_{ijk}^0. \tag{43}$$

Продолжая уравнение (43), получим

$$\begin{gathered} da_k + a_k\omega_0^0 - a_s\omega_k^s + 2n\omega_k^0 = a_{ks}\omega_0^s,\\ 2a_{[ks]} = a_lR_{0ks}^l - 2nR_{0ks}^0. \end{gathered} \tag{44}$$

Из уравнений (44) следует, что компоненты квазитензора $\frac{a_k}{2n}$ удовлетворяют уравнениям (26), а следовательно, поле квазитензора $\frac{a_k}{2n}$ определяет нормализацию пространства конформной связности $C_{n,n}$; при этом в качестве основного тензора нормализации согласно (33) нужно взять тензор

$$A_{ij}^0 \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{2n}\left(a_{ij} - \frac{a_ia_j}{2n} + \frac{1}{4n}g_{ij}g^{lk}a_la_k\right), \quad 2A_{[ij]}^0 = \frac{a_l}{2n}R_{0ij}^l - 2nR_{0ij}^0. \tag{45}$$

Из соотношений (45) и следствия из теоремы 4 вытекает

Теорема 5. *Невырожденная нормализация (необязательно гармоническая) эквиконформного пространства* $\overset{0}{C}_{n,n}$, $n > 2$, *полем квазитензора* x_i^0 *определяет гармоническую нормализацию исходного нормализованного пространства полем квазитензора* $\frac{a_k}{2n}$, *что равносильно тому, что индуцируемая при второй нормализации аффинная связность* $\overset{1}{\nabla}$ *является римановой с полем метрического тензора* g_{ij}.

Отметим, что справедливость второй части теоремы 5 очевидна, если использовать следствие из теоремы 4.

Замечание. Теорема 5 справедлива и при $n = 2$, если задано пространство $\overset{0}{C}_{2,2}$ с полем нулевого тензора R_{0st}^0.

4. Рассмотрим нормализованное полем квазитензора x_i^0 пространство конформной связности $C_{n,n}$. Согласно работе [11] другая аффинная связность ∇ (кроме $\overset{1}{\nabla}$) определяется системой форм Пфаффа $\{\omega_0^j, \Theta_{\bar{i}}^{\bar{j}}\}$, в которой слоевые формы $\Theta_{\bar{i}}^{\bar{j}}$ получаются в результате преобразования $\Theta_{\bar{i}}^{\bar{j}} = \overset{1}{\theta}{}_{\bar{i}}^{\bar{j}} + \Gamma_{ik}^j\omega_0^k$. Требование, чтобы система форм $\Theta_{\bar{i}}^{\bar{j}}$ удовлетворяла структурным уравнениям Картана–Лаптева

$$D\Theta_0^j = \Theta_0^k \wedge \Theta_k^j + \frac{1}{2}r_{0st}^j\omega_0^s \wedge \omega_0^t, \quad D\Theta_i^j = \Theta_i^k \wedge \Theta_k^j + \frac{1}{2}r_{ist}^j\omega_0^s \wedge \omega_0^t,$$

равносильно следующей системе дифференциальных уравнений:

$$\begin{gathered} d\Gamma_{0s}^j - \Gamma_{0l}^j\omega_s^l + \Gamma_{0s}^l\omega_l^j - (\Gamma_{ts}^j + \Gamma_{0t}^l\Gamma_{ls}^j + \Gamma_{0t}^jx_s^0 - \Gamma_{0t}^l\Gamma_{ls}^j)\omega_0^t +\\ +\Gamma_{0s}^l(g^{jk}x_k^0\omega_l^{n+1} + x_l^0\omega_0^j) - \frac{1}{2}(\overset{1}{r}{}_{0st}^j + \Gamma_{0l}^jR_{0st}^l)\omega_0^t = \widetilde{\Gamma}_{0st}^j\omega_0^t, \end{gathered} \tag{46}$$

$$\begin{gathered} d\Gamma_{is}^j + \Gamma_{is}^j\omega_0^0 - \Gamma_{il}^j\omega_s^l - \Gamma_{ls}^j\omega_i^l + \Gamma_{is}^l\omega_l^j + \Gamma_{is}^lx_l^0\omega_0^j +\\ +(\Gamma_{ks}^jg^{kl}g_{it}x_l^0 - \Gamma_{ts}^jx_i^0 + \Gamma_{it}^l\Gamma_{ls}^j + \Gamma_{it}^kg^{jl}g_{ks}x_l^0)\omega_0^t - \frac{1}{2}(\overset{1}{r}{}_{ist}^j + \Gamma_{il}^jR_{0st}^l)\omega_0^t = \widetilde{\Gamma}_{ist}^j\omega_0^t, \end{gathered} \tag{47}$$

причем тензор кручения r^j_{0st} и тензор кривизны r^j_{ist} аффинной связности ∇ имеют соответственно строения

$$r^j_{0st} = -2\widetilde{\Gamma}^j_{0[st]}, \quad r^j_{ist} = -2\widetilde{\Gamma}^j_{i[st]}. \tag{48}$$

Уравнения (46), (47) запишем в виде

$$\begin{aligned} &\text{а)}\ d\Gamma^j_{0s} - \Gamma^j_{0l}\omega^l_s + \Gamma^l_{0s}\omega^j_l = \Gamma^j_{0st}\omega^t_0, \\ &\text{б)}\ d\Gamma^j_{is} + \Gamma^j_{is}\omega^0_0 - \Gamma^j_{il}\omega^l_s - \Gamma^j_{ls}\omega^l_i + \Gamma^l_{is}\omega^j_l = \Gamma^j_{ist}\omega^t_0, \end{aligned} \tag{49}$$

где

$$\begin{aligned} &\text{а)}\ \Gamma^j_{0st} = \widetilde{\Gamma}^j_{0st} + \Gamma^j_{ts} + \Gamma^l_{0t}\Gamma^j_{ls} + \Gamma^j_{0t}x^0_s - \Gamma^l_{0t}\Gamma^j_{ls} - \Gamma^l_{0s}(\delta^j_t x^0_l - g^{jk}g_{lt}x^0_k) + \frac{1}{2}(\overset{1}{r}{}^j_{0st} + \Gamma^j_{0l}R^l_{0st}), \\ &\text{б)}\ \Gamma^j_{ist} = \widetilde{\Gamma}^j_{ist} - \delta^j_t\Gamma^l_{is}x^0_l + \frac{1}{2}(\overset{1}{r}{}^j_{ist} + \Gamma^j_{il}R^l_{0st}) - (\Gamma^j_{ks}g^{kl}g_{it}x^0_l - \Gamma^j_{ts}x^0_i + \Gamma^l_{it}\Gamma^j_{ls} + \Gamma^k_{it}g^{jl}g_{ks}x^0_l). \end{aligned} \tag{50}$$

Ниже будем считать $\Theta^j_0 \equiv \overset{1}{\theta}{}^j_0 = \omega^j_0$, в силу чего $\Gamma^j_{0s} = 0$. Из уравнений (49а)) с учетом последних равенств находим $\Gamma^j_{0st} = 0$. Теперь из соотношений (48), (50а)) получим компоненты тензора кручения аффинной связности ∇:

$$r^j_{0st} = \overset{1}{r}{}^j_{0st} - 2\Gamma^j_{[st]}. \tag{51}$$

Из соотношений (48) с использованием (50б)) находим компоненты тензора кривизны аффинной связности ∇ пространства $A_{n,n}$:

$$r^j_{ist} = -2(\Gamma^j_{i[st]} + g^{kl}\Gamma^j_{k[s}g_{t]i}x^0_l + \Gamma^j_{[st]}x^0_i - \Gamma^j_{l[s}\Gamma^l_{|i|t]} - g^{jl}x^0_l\Gamma^k_{i[s}g_{t]k} - x^0_l\Gamma^l_{i[s}\delta^j_{t]}) + \overset{1}{r}{}^j_{ist} + \Gamma^j_{il}R^l_{0st}. \tag{52}$$

Доказана

Теорема 6. *На нормализованном пространстве конформной связности $C_{n,n}$ кроме пространства аффинной связности $\overset{1}{A}_{n,n}$, определяемого системой форм $\overset{1}{\theta}{}^j_i$ (см. (35)), при задании поля тензора деформации Γ^j_{ik} индуцируется пространство аффинной связности $A_{n,n}$ со слоевыми формами*

$$\Theta^j_0 = \overset{1}{\theta}{}^j_0, \quad \Theta^j_i = \overset{1}{\theta}{}^j_i + \Gamma^j_{ik}\omega^k_0, \tag{53}$$

причем его тензоры кручения и кривизны имеют соответственно строения (51), (52).

5. Рассмотрим пространство конформной связности $C_{n,n}$, нормализованное невырожденным образом ($|a^0_{ij}| \neq 0$) полем квазитензора x^0_i.

Продолжая уравнения (34а)), имеем

$$\begin{aligned} da^0_{ijk} + 3a^0_{ijk}\omega^0_0 - a^0_{ijs}\omega^s_k - a^0_{isk}\omega^s_j - a^0_{sjk}\omega^s_i + 2a^0_{ij}\omega^0_k + a^0_{ik}\omega^0_j + a^0_{kj}\omega^0_i - g^{lt}(a^0_{il}g_{jk} + a^0_{lj}g_{ik})\omega^0_t = a^0_{ijks}\omega^s_0, \\ 2a^0_{ij[ks]} = a^0_{ijl}R^l_{0ks} - 2a^0_{ij}R^0_{0ks} + a^0_{il}R^l_{jks} + a^0_{lj}R^l_{iks}. \end{aligned} \tag{54}$$

В силу уравнений (21в)), (26), (34а)), (54) совокупность функций

$$A^0_{ijk} \overset{\text{def}}{=} a^0_{ijk} - a^0_{ik}x^0_j - a^0_{kj}x^0_i - 2a^0_{ij}x^0_k + (g_{ik}a^0_{lj} + g_{jk}a^0_{il})g^{lt}x^0_t \tag{55}$$

образует тензор

$$dA^0_{ijk} + 3A^0_{ijk}\omega^0_0 - A^0_{ijs}\omega^s_k - A^0_{isk}\omega^s_j - A^0_{sjk}\omega^s_i = A^0_{ijks}\omega^s_0. \tag{56}$$

Уравнения (34а)) в силу соотношений (35), (55) можно записать в виде

$$da^0_{ij} - a^0_{ik}\overset{1}{\theta}{}^k_j - a^0_{kj}\overset{1}{\theta}{}^k_i = A^0_{ijk}\omega^k_0. \tag{57}$$

В силу невырожденности нормализации пространства $C_{n,n}$, согласно уравнениям (42б)), (56) в качестве тензора деформации Γ^j_{ik} (см. (49б)) можно взять охват

$$A^j_{ik} \stackrel{\text{def}}{=} a^{jl}_0 A^0_{lik}. \tag{58}$$

При этом соответствующие слоевые формы $\Theta^j_{\bar{i}}$ (см. (53)) связности пространства $A_{n,n}$ обозначим через $\overset{2}{\theta}{}^j_{\bar{i}}$, а само пространство — через $\overset{2}{A}_{n,n}$:

$$\overset{2}{\theta}{}^j_0 = \overset{1}{\theta}{}^j_0, \quad \overset{2}{\theta}{}^j_i = \overset{1}{\theta}{}^j_i + A^j_{ik}\omega^k_0. \tag{59}$$

Уравнения (57) в силу (58), (59) можно записать в виде

$$da^0_{ij} - a^0_{ik}\overset{2}{\theta}{}^k_j - a^0_{kj}\overset{1}{\theta}{}^k_i = 0. \tag{60}$$

Последние уравнения доказывают предложение.

Теорема 7. *Аффинные связности* $\overset{1}{\nabla}$ *и* $\overset{2}{\nabla}$, *индуцируемые невырожденной нормализацией пространства конформной связности* $C_{n,n}$, *обобщенно сопряжены* ([10], с. 214) *относительно поля основного тензора* a^0_{ij} *нормализации, причем в случае ее гармоничности* (*т. е.* $a^0_{[ij]} = 0$) *средняя связность* $\overset{0}{\nabla}$, *определяемая системой форм* $\{\omega^j_0, \frac{1}{2}(\overset{1}{\theta}{}^j_i + \overset{2}{\theta}{}^j_i)\}$, *является вейлевой* (*вообще говоря, с кручением*) *с полем метрического тензора* a^0_{ij}. *Компоненты тензоров кручения* $\overset{2}{r}{}^j_{0st}$ *и кривизны* $\overset{2}{r}{}^j_{ist}$ *пространства аффинной связности* $\overset{2}{A}_{n,n}$ *имеют соответственно строения*

$$\begin{aligned} &\text{а)}\quad \overset{2}{r}{}^j_{0st} = -a^{jk}_0(x^0_l R^l_{kst} - x^0_k R^0_{0st} - R^0_{kst} + x^0_k x^0_l R^l_{0st} - \tfrac{1}{2} g^{pq} x^0_p x^0_q g_{kl} R^l_{0st}),\\ &\text{б)}\quad \overset{2}{r}{}^j_{ist} = -a^0_{ki} a^{jl}_0 \overset{1}{r}{}^k_{lst}. \end{aligned} \tag{61}$$

Приведем доказательство утверждения заключительной части теоремы 7. Согласно (51) компонеты тензора кручения $\overset{2}{r}{}^j_{0st}$ связности $\overset{2}{\nabla}$ с учетом $\Gamma^j_{ik} \equiv A^j_{ik}$ (см. (58)) имеют строение $\overset{2}{r}{}^j_{0st} = \overset{1}{r}{}^j_{0st} - 2a^{jl}_0 A^0_{l[st]}$, откуда с использованием (32), (34б)), (37а)), (55) получим (61а)).

Аналогично, с использованием (52) и учетом охвата (58) можно было бы вычислить компоненты тензора кривизы $\overset{2}{r}{}^j_{ist}$ пространства $\overset{2}{A}_{n,n}$. Приведем другой (более простой) способ вычисления компонент тензора $\overset{2}{r}{}^j_{ist}$. Для этого замкнем уравнения (60), в результате чего получим

$$\left(a^0_{ik}\overset{2}{r}{}^k_{jst} + a^0_{kj}\overset{1}{r}{}^k_{ist}\right)\omega^s_0 \wedge \omega^t_0 = 0.$$

Из последних внешних квадратичных уравнений непосредственно получим (61б)).

Заметим, что в соотношениях (61б)) компоненты тензора $\overset{1}{r}{}^j_{ist}$ имеют строение (37б)).

6. В случае $C_{n,n} \equiv C_n$ (т. е. при $R^\mu_{\lambda st} \equiv 0$) найдем геометрическую трактовку аффинной связности $\overset{2}{\nabla}$ пространства $\overset{2}{A}_{n,n}$, индуцируемого при невырожденной нормализации конформного пространства C_n.

Из соотношений (25′), (30′) с использованием (15), (22), (26) находим

$$\begin{aligned} dP_i &= a^0_{ik}\omega^k_0 A_0 - g_{ik}\omega^k_0 X_{n+1} + (\omega^k_i + x^0_i\omega^k_0 + g^{lk}x^0_l\omega^{n+1}_i)P_k,\\ dX_{n+1} &= (x^0_k\omega^k_0 - \omega^0_0)X_{n+1} - g^{lk}a^0_{ls}\omega^s_0 P_k. \end{aligned} \tag{62}$$

Возьмем полуизотропные конформные реперы $R = \{A_\lambda\}$ и $\widetilde{R} = \{B_\lambda\}$, где $B_0 \equiv X_{n+1}$, $B_i \equiv P_i$, $B_{n+1} \equiv A_0$; эти реперы связаны соответственно с нормализуемой точкой A_0 и нормализующей точкой X_{n+1}. Если инфинитезимальные перемещения этих реперов определяются уравнениями $dA_\lambda = \omega_\lambda^\mu A_\mu$, $dB_\lambda = \widetilde{\omega}_\lambda^\mu B_\mu$, то согласно (62) находим

$$\begin{aligned}&\widetilde{\omega}_{n+1}^j = \omega_0^j, \quad \widetilde{\omega}_0^j = -g^{jk}a_{ks}^0\omega_0^s, \quad \widetilde{\omega}_0^0 = x_k^0\omega_0^k - \omega_0^0, \ \widetilde{\omega}_{n+1}^{n+1} = \omega_0^0 - x_k^0\omega_0^k,\\ &\widetilde{\omega}_i^0 = -g_{ik}\omega_0^k, \quad \widetilde{\omega}_i^{n+1} = a_{ik}^0\omega_0^k, \quad \widetilde{\omega}_i^j = \omega_i^j + x_i^0\omega_0^j + g^{kj}x_k^0\omega_i^{n+1}.\end{aligned} \tag{63}$$

Так как согласно п. 1 § 3 нормализация конформного пространства C_n полем квазитензора x_i^0 равносильна заданию в нем дифференцируемого точечного соответствия $A_0 \to X_{n+1}$, $X_{n+1} \neq A_0$, то в случае ее невырожденности дифференцируемое точечное соответствие $X_{n+1} \to A_0$ также определяет нормализацию исходного пространства C_n. Следовательно, при этой нормализации также индуцируется аффинная связность $\widetilde{\nabla}$ без кручения, определяемая системой форм (сравни с (35))

$$\begin{aligned}&\widetilde{\theta}_0^j = \widetilde{\omega}_0^j,\\ &\widetilde{\theta}_i^j = \widetilde{\omega}_i^j - \delta_i^j(\widetilde{\omega}_0^0 - \widetilde{x}_k^0\widetilde{\omega}_0^k) + g^{jk}\widetilde{x}_k^0\widetilde{\omega}_i^{n+1} + \widetilde{x}_i^0\widetilde{\omega}_0^j,\end{aligned} \tag{64}$$

причем $\widetilde{P}_i = \widetilde{x}_i^0 X_{n+1} + P_i$; т. к. $\widetilde{P}_i \equiv P_i$, то $\widetilde{x}_i^0 = 0$.

Таким образом, согласно (63), (64) аффинная связность $\widetilde{\nabla}$ определяется системой форм

$$\widetilde{\theta}_0^j = -g^{jk}a_{ks}^0\omega_0^s, \tag{65_1}$$

$$\widetilde{\theta}_i^j = \overset{1}{\theta}{}_i^j + 2\delta_i^j(\omega_0^0 - x_k^0\omega_0^k). \tag{65_2}$$

Отметим, что аффинные связности $\overset{1}{\nabla}$ и $\widetilde{\nabla}$ без кручения отнесены к разным системам базисных форм $\{\overset{1}{\theta}{}_0^j \equiv \omega_0^j\}$ и $\{\widetilde{\theta}_0^j \equiv -g^{jk}a_{ks}^0\omega_0^s\}$. Приведем их к одной системе $\{\omega_0^j\}$.

Продифференцировав внешним образом (65_1), имеем

$$D\widetilde{\theta}_0^j = -(dg^{jk} \wedge a_{ks}^0\omega_0^s + g^{jk}da_{ks}^0 \wedge \omega_0^s + g^{jk}a_{ks}^0 D\omega_0^s),$$

откуда с использованием $D\widetilde{\theta}_0^j = \widetilde{\theta}_0^k \wedge \widetilde{\theta}_k^j$ и соотношений (22), (34a)), (35), (65) находим

$$D\omega_0^j = \omega_0^k \wedge [\omega_k^j - \delta_k^j(\omega_0^0 + x_l^0\omega_0^l) + a_0^{jl}a_{lks}^0\omega_0^s - a_0^{jl}x_l^0a_{tk}^0\omega_0^t + a_0^{jp}g_{ps}g^{lt}a_{tk}^0x_l^0\omega_0^s].$$

Последние квадратичные уравнения говорят о том, что задание аффинной связности $\widetilde{\nabla}$ без кручения системой форм (65) равносильно заданию этой связности системой форм $\{\omega_0^j, \overline{\theta}_i^j\}$, где

$$\overline{\theta}_i^j = \omega_i^j - \delta_i^j(\omega_0^0 + x_l^0\omega_0^l) + a_0^{jl}a_{lis}^0\omega_0^s - a_0^{jl}x_l^0a_{si}^0\omega_0^s + a_0^{jk}g_{ks}g^{lt}a_{ti}^0x_l^0\omega_0^s.$$

Так как в силу (35), (55), (58), (59) справедливо $\overline{\theta}_i^j = \overset{1}{\theta}{}_i^j + a_0^{jl}A_{lis}^0\omega_0^s \equiv \overset{1}{\theta}{}_i^j + A_{is}^j\omega_0^s \equiv \overset{2}{\theta}{}_i^j$, то доказана

Теорема 8. *Аффинная связность $\overset{2}{\nabla}$ без кручения, индуцируемая невырожденной нормализацией $A \to X_{n+1}$ конформного пространства C_n и определяемая системой форм* (59), *совпадает с аффинной связностью $\widetilde{\nabla}$ без кручения, индуцируемой нормализацией $X_{n+1} \to A_0$ C_n и определяемой системой форм* (65).

Литература

1. Картан Э. *Пространства аффинной, проективной и конформной связности.* – Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 1962. – 210 с.
2. Лумисте Ю.Г. *Теория связностей в расслоенных пространствах* // Итоги науки и техн. Алгебра. Топология. Геометрия. – М.: ВИНИТИ, 1971. – С. 123–168.
3. Лаптев Г.Ф. *Дифференциальная геометрия погруженных многообразий. Теоретико-групповой метод дифференциально-геометрических исследований* // Тр. Моск. матем. о-ва. – 1953. – Т. 2. – С. 275–382.

4. Евтушик Л.Е., Лумисте Ю.Г., Остиану Н.М., Широков А.П. *Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях* // Итоги науки и техн. Пробл. геометрии. – М.: ВИНИТИ, 1979. – Т. 9. – 246 с.
5. Остиану Н.М. *О канонизации подвижного репера погруженного многообразия* // Rev. Math. pures Appl. – 1962. – V. 7. – № 2. – P. 231–240.
6. Бушманова Г.В., Норден А.П. *Элементы конформной геометрии.* – Казань: Изд-во Казанск. ун–та, 1972. – 178 с.
7. Акивис М.А. *К конформно-дифференциальной геометрии многомерных поверхностей* // Матем. сб. – 1961. – Т. 53. – № 1. – С. 53–72.
8. Akivis M.A., Goldberg V.V. *Conformal differential geometry and its generalizations.* – USA, 1996. – 384 p.
9. Розенфельд Б.А. *Многомерные пространства.* – М.: Наука, 1966. – 646 с.
10. Норден А.П. *Пространства аффинной связности.* – М: Наука, 1976. – 432 с.
11. Лаптев Г.Ф. *Многообразия, погруженные в обобщенные пространства* // Тр. 4-го Всесоюзн. матем. съезда (1961). – Ленинград, 1964. – Т. 2. – С. 226–233.

Чувашский государственный
педагогический университет

Поступила
29.03.2005