И З В Е С Т И Я   В Ы С Ш И Х   У Ч Е Б Н Ы Х   З А В Е Д Е Н И Й

2004 МАТЕМАТИКА № 9 (508)

УДК 517.958

Д.А. ВОРОТНИКОВ

О СУЩЕСТВОВАНИИ СЛАБЫХ СТАЦИОНАРНЫХ РЕШЕНИЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ В МОДЕЛИ ДЖЕФФРИСА ДВИЖЕНИЯ ВЯЗКОУПРУГОЙ СРЕДЫ

Введение. Известно [1], [2], что движение несжимаемой среды с постоянной плотностью $\rho = \mathrm{const}$ определяется системой дифференциальных уравнений в форме Коши

$$\rho\Big(\frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} u_i \frac{\partial u}{\partial x_i}\Big) + \operatorname{grad} p = \operatorname{Div}\sigma + \rho f, \quad (t,x) \in (0,T)\times\Omega, \tag{0.1}$$

$$\operatorname{div} u = 0, \quad (t,x) \in (0,T)\times\Omega, \tag{0.2}$$

где u — вектор скорости точек среды, p — функция давления, f — поле внешних сил, σ — тензор касательных напряжений (все они зависят от точки x произвольной области Ω пространства $\mathbb{R}^n$, $n = 2, 3$, и момента времени t). Градиент grad и дивергенция div берутся по переменной x. Дивергенция $\operatorname{Div}\sigma$ от тензора σ — вектор с координатами $(\operatorname{Div}\sigma)_j = \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i}$. Без ограничения общности будем считать в дальнейшем плотность ρ равной единице.

Тип рассматриваемой среды определяется выбором соотношения между σ и тензором скоростей деформации $\mathcal{E}(u)$, $\mathcal{E}(u) = (\mathcal{E}_{ij}(u))$, $\mathcal{E}_{ij}(u) = \frac{1}{2}\big(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\big)$. Так, один класс сред связан с постулатом Стокса о том, что тензор напряжения в точке в данный момент времени полностью определяется тензором скоростей деформации в этой же точке в этот момент времени. Этот подход приводит к концепциям линейно- и нелинейно-вязкой жидкости [2].

Однако эти концепции не являются удовлетворительными для всех несжимаемых сред. В частности, они не подходит для сред "с памятью": бетонов, разнообразных полимеров, земной коры и др. Один из способов учесть эффекты памяти — ввести в определяющее соотношение производные по времени. На этом пути возникли модели Максвелла, Джеффриса, Олдройта и целый ряд других моделей [3]–[5].

В данной статье исследуется разрешимость в слабом смысле краевой задачи, описывающей стационарные (не зависящие от времени) течения в модели Джеффриса [4] движения вязкоупругой среды в произвольной области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n = 2, 3$, возможно и неограниченной. Соответствующее определяющее соотношение имеет вид

$$\sigma + \lambda_1 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sigma = 2\eta\Big(\mathcal{E} + \lambda_2 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathcal{E}\Big). \tag{0.3}$$

Здесь η — вязкость среды, λ_1 — время релаксации, λ_2 — время запаздывания, $0 < \lambda_2 < \lambda_1$.

Основной результат данной работы — теорема существования слабых стационарных решений краевой задачи для системы (0.1)–(0.3) в произвольной области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n = 2, 3$.

Отметим, что в ряде работ (напр., [6]–[8]) начально-краевая задача изучалась при условии замены полной производной $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial}{\partial t} + \sum\limits_{i=1}^{n} u_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ на частную производную $\frac{\partial}{\partial t}$, что существенно сужает класс сред, удовлетворяющих этой модели (см. по этому поводу [3]). В [9] рассматривалось соотношение Джеффриса (0.3) без такой линеаризации, но при выражении тензора напряжений через тензор скоростей деформации использовалась регуляризация поля скоростей с помощью усреднения по пространственной переменной. Отличие этой работы состоит в том, что здесь такой регуляризации не делается. Отметим также, что при малых внешних силах есть теоремы существования сильного стационарного решения для широкого класса моделей типа Джеффриса и Максвелла ([10], см. также [5]).

1. Постановка задачи. Пусть Ω — область в пространстве $\mathbb{R}^n$, $n = 2, 3$, возможно неограниченная.

Рассмотрим краевую задачу, описывающую стационарное движение несжимаемой вязкоупругой среды, соответствующей модели Джеффриса

$$\sum_{i=1}^{n} u_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + \operatorname{grad} p = \operatorname{Div} \sigma + f, \tag{1.1}$$

$$\sigma + \lambda_1 \sum_{i=1}^{n} u_i \frac{\partial \sigma}{\partial x_i} = 2\eta \Big(\mathcal{E} + \lambda_2 \sum_{i=1}^{n} u_i \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial x_i} \Big), \tag{1.2}$$

$$\operatorname{div} u = 0, \tag{1.3}$$

$$u\big|_{\partial\Omega} = 0. \tag{1.4}$$

Обозначим через $\mathbb{R}^{n\times n}$ пространство матриц порядка $n \times n$ со скалярным произведением для $A = (A_{ij})$, $B = (B_{ij})$

$$(A, B)_{\mathbb{R}^{n\times n}} = \sum_{i,j=1}^{n} A_{ij} B_{ij},$$

через $\mathbb{R}^{n\times n}_S$ — его подпространство симметричных матриц, через $\mathbb{R}^{n\times n\times n}$ — пространство упорядоченных наборов из n матриц порядка $n \times n$ со скалярным произведением для $A = (A_1, \dots, A_n)$, $B = (B_1, \dots, B_n)$

$$(A, B)_{\mathbb{R}^{n\times n\times n}} = \sum_{i=1}^{n} (A_i, B_i)_{\mathbb{R}^{n\times n}}.$$

Символом ∇v обозначим матрицу Якоби от вектор-функции $v : \Omega \to \mathbb{R}^n$, символом $\widetilde{\nabla}\tau$ — упорядоченный набор матриц Якоби столбцов матрицы-функции $\tau : \Omega \to \mathbb{R}^{n\times n}$.

Пусть E — одно из пространств $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^{n\times n}$, $\mathbb{R}^{n\times n}_S$, $\mathbb{R}^{n\times n\times n}$. Используем стандартные обозначения $L_p(\Omega, E)$, $H^m(\Omega, E) = W^m_2(\Omega, E)$, $H^m_0(\Omega, E) = \overset{\circ}{W}{}^m_2(\Omega, E)$ для пространств Лебега и Соболева для функций со значениями в E. Иногда для краткости будем писать просто L_p вместо $L_p(\Omega, E)$ и т. п. Скалярное произведение и норму в L_2 обозначим соответственно $(\cdot, \cdot)$ и $\| \cdot \|$. Обозначим также через $C^\infty_0(\Omega, E)$ пространство гладких функций с компактным носителем в Ω и со значениями в E.

Пусть $\mathcal{V} = \mathcal{V}(\Omega) = \{u \in C^\infty_0(\Omega, \mathbb{R}^n), \operatorname{div} u = 0\}$.

Для краткости обозначим символом C^∞_0 пространство $C^\infty_0(\Omega, \mathbb{R}^{n\times n}_S)$, а символом $Y = Y(\Omega)$ — пополнение $\mathcal{V}$ по норме, соответствующей скалярному произведению $(u, v)_Y = (\nabla u, \nabla v)$, а сопряженное ему пространство — через Y^*. Действие функционала из Y^* на элемент из Y будем обозначать скобками $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Пусть $f \in Y^*$.

Определение. Слабым решением задачи (1.1)–(1.4) называется пара функций $u \in Y$, $\sigma \in L_2(\Omega, \mathbb{R}^{n\times n}_S)$, удовлетворяющая тождествам

$$(\sigma, \nabla\varphi) - \sum_{i=1}^{n} \Big(u_i u, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \Big) = \langle f, \varphi \rangle, \tag{1.5}$$

$$(\sigma, \Phi) - \lambda_1 \sum_{i=1}^{n} \Big(u_i \sigma, \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \Big) = -2\eta(u, \operatorname{Div} \Phi) - 2\eta\lambda_2 \sum_{i=1}^{n} \Big(u_i \mathcal{E}(u), \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \Big) \tag{1.6}$$

для всех $\varphi \in \mathcal{V}$ и $\Phi \in C^\infty_0$.

Замечание. Если (u, σ, p) — классическое решение задачи (1.1)–(1.4), то, умножив скалярно в L_2 равенства (1.1) и (1.2) соответственно на $\varphi \in \mathcal{V}$ и $\Phi \in C_0^\infty$ и проинтегрировав эти равенства по частям, получим тождества (1.5) и (1.6).

2. Вспомогательная задача и основной результат. Введем обозначения $\mu_1 = \eta \frac{\lambda_2}{\lambda_1}$, $\mu_2 = \frac{\eta - \mu_1}{\lambda_1}$, $\tau = \sigma - 2\mu_1 \mathcal{E}$. Тогда (1.6) и (1.5) перепишутся в виде

$$\frac{1}{\lambda_1}(\tau, \Phi) - \sum_{i=1}^{n} \left(u_i \tau, \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \right) + 2\mu_2 (u, \operatorname{Div} \Phi) = 0, \tag{2.1}$$

$$-\sum_{i=1}^{n} \left(u_i u, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right) + \mu_1 (\nabla u, \nabla \varphi) + (\tau, \nabla \varphi) = \langle f, \varphi \rangle. \tag{2.2}$$

Рассмотрим следующую вспомогательную задачу:

$$\frac{1}{\lambda_1}(\tau, \Phi) - \delta \sum_{i=1}^{n} \left(u_i \tau, \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \right) + 2\mu_2 \delta (u, \operatorname{Div} \Phi) + \varepsilon (\tilde{\nabla} \tau, \tilde{\nabla} \Phi) = 0, \tag{2.3}$$

$$-\delta \sum_{i=1}^{n} \left(u_i u, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right) + \mu_1 (\nabla u, \nabla \varphi) + \delta (\tau, \nabla \varphi) = \delta \langle f, \varphi \rangle \tag{2.4}$$

для всех $\varphi \in Y$, $\Phi \in H_0^1$ (здесь $\varepsilon > 0$ и $0 \le \delta \le 1$ — параметры).

Лемма. *Пусть область Ω ограничена и пара $(u \in Y,\ \tau \in H_0^1(\Omega, \mathbb{R}_S^{n \times n}))$ является решением* (2.3), (2.4). *Тогда имеет место следующая априорная оценка*:

$$\mu_1 \|u\|_Y^2 + \frac{1}{2\lambda_1 \mu_2} \|\tau\|^2 + \frac{\varepsilon}{2\mu_2} \|\tau\|_Y^2 \le \frac{1}{\mu_1} \|f\|_{Y^*}^2. \tag{2.5}$$

Доказательство. Интегрированием по частям легко получаются тождества

$$\sum_{i=1}^{n} \left(u_i u, \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) = 0, \tag{2.6}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \left(u_i \tau, \frac{\partial \tau}{\partial x_i} \right) = 0, \tag{2.7}$$

$$(\tau, \nabla u) + (u, \operatorname{Div} \tau) = 0. \tag{2.8}$$

Положим в (2.4) $\varphi = u$, а в (2.3) $\Phi = \frac{\tau}{2\mu_2}$. Сложим полученные равенства. С учетом (2.6)–(2.8) получим

$$\mu_1 (\nabla u, \nabla u) + \frac{1}{2\lambda_1 \mu_2} (\tau, \tau) + \frac{\varepsilon}{2\mu_2} (\tilde{\nabla} \tau, \tilde{\nabla} \tau) = \delta \langle f, u \rangle. \tag{2.9}$$

Отсюда следует

$$\mu_1 \|u\|_Y^2 \le \|f\|_{Y^*} \|u\|_Y,$$

$$\|u\|_Y \le \frac{1}{\mu_1} \|f\|_{Y^*}, \tag{2.10}$$

а (2.9) и (2.10) влекут (2.5).

Теорема 1. *Пусть Ω ограничена и $f \in Y^*$. Тогда существует решение $(u \in Y,\ \tau \in H_0^1(\Omega, \mathbb{R}_S^{n \times n}))$ задачи* (2.3), (2.4).

Доказательство. Введем вспомогательные операторы по следующим формулам (в этих формулах φ и Φ суть произвольные элементы соответственно Y и $H_0^1(\Omega, \mathbb{R}_S^{n\times n})$):

$$K : Y \to Y^*, \langle K(u), \varphi\rangle = -\sum_{i=1}^{n}\left(u_i u, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\right), \quad A : Y \to Y^*, \langle A(u), \varphi\rangle = \mu_1(\nabla u, \nabla\varphi),$$

$$A_\varepsilon : H_0^1 \to H^{-1}, \quad \langle A_\varepsilon(\tau), \Phi\rangle = \varepsilon(\widetilde{\nabla}\tau, \widetilde{\nabla}\Phi) + \frac{1}{\lambda_1}(\tau, \Phi),$$

$$\widetilde{A} : Y \times H_0^1 \to Y^* \times H^{-1} : \widetilde{A}(u,\tau) = (A(u), A_\varepsilon(\tau)),$$

$$N_1 : H_0^1 \to Y^*, \quad \langle N_1(\tau), \varphi\rangle = (\tau, \nabla\varphi),$$

$$N_2 : Y \to H^{-1}, \quad \langle N_2(u), \Phi\rangle = 2\mu_2(u, \operatorname{Div}\Phi),$$

$$\widetilde{K} : Y \times H_0^1 \to H^{-1}, \quad \langle \widetilde{K}(u,\tau), \Phi\rangle = -\sum_{i=1}^{n}\left(u_i\tau, \frac{\partial\Phi}{\partial x_i}\right),$$

$$Q : Y \times H_0^1 \to Y^* \times H^{-1}, \quad Q(u,\tau) = (K(u) + N_1(\tau) - f, \widetilde{K}(u,\tau) + N_2(u)).$$

Тогда система (2.3), (2.4) эквивалентна операторному уравнению

$$\widetilde{A}(u,\tau) + \delta Q(u,\tau) = 0. \tag{2.11}$$

Заметим, что линейный оператор N_1 ограничен как отображение из L_2 в Y^*. Так как H_0^1 вложено в L_2 вполне непрерывно (напр., [11], гл. II, теорема 1.1), то оператор N_1 вполне непрерывен (как отображение из H_0^1 в Y^*). Аналогично, т. к. Y вложено в L_2 вполне непрерывно (по той же теореме вложения), то оператор N_2 вполне непрерывен.

Из неравенства Гёльдера получаем, что оператор K непрерывен как отображение из L_4 в Y^*. Поскольку Y вложено в L_4 вполне непрерывно (по той же теореме вложения из [11]), то оператор K вполне непрерывен (как отображение из Y в Y^*). Аналогично, оператор $\widetilde{K}$ непрерывен как отображение из $L_4 \times L_4$ в H^{-1} и вполне непрерывен как отображение $Y \times H_0^1 \to H^{-1}$.

Таким образом, оператор Q вполне непрерывен.

Из проекционной теоремы ([11], гл. I, теорема 2.2) следует, что оператор $\widetilde{A}$ обратим. Перепишем уравнение (2.11) в виде

$$(u,\tau) - \delta\widetilde{A}^{-1}Q(u,\tau) = 0. \tag{2.12}$$

Из-за априорной оценки (2.5) уравнение (2.12) не имеет решений на границе достаточно большого шара B в $Y \times H_0^1$, не зависящего от δ. Тогда определена $\deg_{LS}(I - \delta\widetilde{A}Q, B, 0)$ — степень Лере–Шаудера отображения $I - \delta\widetilde{A}Q$ на шаре B относительно точки 0, где I — тождественный оператор. По свойству гомотопической инвариантности степени

$$\deg_{LS}(I - \delta\widetilde{A}Q, B, 0) = \deg_{LS}(I, B, 0) = 1.$$

Следовательно, уравнение (2.12), а значит, и система (2.3), (2.4) имеет решение в B при каждом $\delta \in [0,1]$.

Основным результатом данной работы является

Теорема 2. *Пусть $f \in Y^*$. Тогда существует слабое решение задачи* (1.1)–(1.4).

Доказательство. Обозначим через Ω_m пересечение Ω с шаром B_m с центром в нуле радиуса m, $m = 1, 2, \dots$, в пространстве $\mathbb{R}^n$. Следуя ([12], с. 117), можно рассмотреть сужение f на Ω_m: $f|_{\Omega_m} \in Y^*(\Omega_m)$, которое задается формулой $\langle f|_{\Omega_m}, \varphi\rangle = \langle f, \widetilde{\varphi}\rangle$, где φ — произвольная функция из $Y(\Omega_m)$, а $\widetilde{\varphi}$ — ее продолжение нулем на все Ω. Очевидно, $\|f|_{\Omega_m}\|_{Y^*(\Omega_m)} \le \|f\|_{Y^*(\Omega)}$.

На каждой области Ω_m рассмотрим задачу (2.3), (2.4) с заменой f на $f|_{\Omega_m}$, $\varepsilon = \frac{1}{m}$, δ=1. По теореме 1 эти задачи имеют хотя бы одно решение (u_m, τ_m). Обозначим через $(\widetilde{u}_m, \widetilde{\tau}_m)$ продолжение (u_m, τ_m) нулем на все Ω. По лемме нормы $\|\widetilde{u}_m\|_{Y(\Omega)} = \|u_m\|_{Y(\Omega_m)}$ и $\|\widetilde{\tau}_m\|_{L_2(\Omega)} = \|\tau_m\|_{L_2(\Omega_m)}$

равномерно ограничены. Поэтому при $m \to \infty$ без ограничения общности можно считать, что $\widetilde{u}_m \to \widetilde{u}_0$ слабо в Y, $\widetilde{\tau}_m \to \widetilde{\tau}_0$ слабо в L_2. Покажем, что $(\widetilde{u}_0, \widetilde{\tau}_0)$ есть решение задачи (2.1), (2.2).

Возьмем произвольные $\varphi \in \mathcal{V}$, $\Phi \in C_0^\infty$. При некотором k носители φ и Φ лежат в Ω_k. Обозначим через u_m^* продолжение $\widetilde{u}_m$ нулем за пределы Ω, суженное на B_k. Ясно, что $u_m^* \to u_0^*$ слабо в $W_2^1(B_k)$ и, значит, сильно в $L_4(B_k)$.

Поэтому все слагаемые (2.3), (2.4) с $\varepsilon = \frac{1}{m}$, $\delta = 1$, $u = u_m$, $\tau = \tau_m$ сходятся к соответствующим слагаемым (2.1), (2.2), причем

$$|\varepsilon(\widetilde{\nabla}\tau_m, \widetilde{\nabla}\Phi)| = \left|\frac{1}{m}(\widetilde{\tau}_m, \Delta\Phi)\right| \leq \frac{1}{m}\|\widetilde{\tau}_m\|\,\|\Delta\Phi\| \to 0,$$

где Δ — оператор Лапласа.

Итак, пара $(\widetilde{u}_0, \widetilde{\tau}_0)$ удовлетворяет тождествам (2.1), (2.2) при всех $\varphi \in \mathcal{V}$, $\Phi \in C_0^\infty$. Обозначим $\widetilde{\sigma}_0 = \widetilde{\tau}_0 + 2\mu_1\mathcal{E}(\widetilde{u}_0)$. Ясно, что $\widetilde{\sigma}_0 \in L_2$. Тогда $(\widetilde{u}_0, \widetilde{\sigma}_0)$ является решением задачи (1.5), (1.6), или слабым решением задачи (1.1)–(1.4).

Литература

1. Дьярмати И. *Неравновесная термодинамика.* – М.: Мир, 1974. – 304 с.
2. Литвинов В.Г. *Движение нелинейно-вязкой жидкости.* – М.: Наука, 1982. – 376 с.
3. Олдройт Дж. Г. *Неньютоновское течение жидкостей и твердых тел* / В кн. Реология: теория и приложения. – М.: Ин. лит., 1962. – С. 757–793.
4. Рейнер М. *Реология.* – М.: Физматгиз, 1965. – 224 с.
5. Guillopé C., Saut J.C. *Mathematical problems arising in differential models for viscoelastic fluids* / In: Mathematical Topics in Fluid Mechanics. J.F. Rodrigues, A. Sequeira (Eds). – Longman: Harlow, 1993. – P. 64–93.
6. Агранович Ю.Я., Соболевский П.Е. *Движение нелинейной вязкоупругой жидкости* // ДАН СССР. – 1990. – Т. 314. – № 3. – С. 521–525.
7. Котсиолис А.А., Осколков А.П. *О разрешимости основной начально-краевой задачи для уравнений движения жидкости Олдройта на* $(0, \infty)$ *и поведении ее решений при* $t \to +\infty$ // Зап. научн. семин. ЛОМИ АН СССР. – 1986. – Т. 150. – С. 48–52.
8. Dmitrienko V.T., Zvyagin V.G. *The topological degree method for equations of the Navier–Stokes type* // Abstract and Appl. Anal. – 1997. – V. 1, 2. – P. 1–45.
9. Звягин В.Г., Дмитриенко В.Т. *О слабых решениях регуляризованной модели вязкоупругой жидкости* // Дифференц. уравнения. – 2002. – Т. 38. – № 12. – С. 1633–1645.
10. Renardy M. *Existence of slow steady flows of viscoelastic fluids with differential constitutive equations* // Z. angew. Math. und Mech. – 1985. – Bd. 65. – № 9. – P. 449–451.
11. Темам Р. *Уравнения Навье–Стокса. Теория и численный анализ.* – М.: Мир, 1981. – 408 с.
12. Ладыженская О.А. *Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости.* – М.: ГИФМЛ, 1961. – 204 с.

Воронежский государственный университет

Поступила 16.01.2004