И З В Е С Т И Я   В Ы С Ш И Х   У Ч Е Б Н Ы Х   З А В Е Д Е Н И Й

1997 МАТЕМАТИКА № 7 (422)

УДК 517.983

А.В. ГЛУШАК

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКОЙ БЛИЗОСТИ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО ПОРЯДКА В БАНАХОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

В банаховом пространстве $\mathbb{E}$ при $t > 0$ рассматривается уравнение

$$v'(t) = \sum_{i=1}^{n} a_i(t)\mathbb{A}_i v(t), \tag{1}$$

где $\mathbb{A}_i$ — коммутирующие генераторы сильно-непрерывных косинус-функций $\mathbb{C}_i(t)$ (см. [1]), $a_i(t) \geq 0$ — непрерывные и ограниченные действительнозначные функции для $t \in [0, \infty)$. Исследуется поведение при $t \to \infty$ решения уравнения (1), удовлетворяющего начальному условию

$$v(0) = v_0. \tag{2}$$

В развитие результатов о стабилизации решений задачи Коши для параболических уравнений, обзор которых содержится в [2], в [3] найдены необходимые и достаточные условия стабилизации решения задачи (1), (2) в случае, когда $n = 1$ и $a_i(t) \equiv 1$. Методы работы [3], наряду с интегральными представлениями решений, полученными в [4], позволяют установить необходимое и достаточное условие стабилизации решения задачи Коши для уравнения

$$w'(t) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbb{A}_i w(t) \tag{3}$$

с постоянными коэффициентами α_i. Заметим, что оператор $\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbb{A}_i$, вообще говоря, уже не является генератором косинус-функции (см. [1]).

Целью данной работы является доказательство теоремы об асимптотической близости решений задачи Коши для уравнений (1) и (3).

Обозначим через $\mathbb{D}(\mathbb{A})$ множество, на котором определены всевозможные произведения операторов $\mathbb{A}_i$, и будем считать $\overline{\mathbb{D}(\mathbb{A})} = \mathbb{E}$.

Аналогом теоремы 1 из [3] для задачи (1), (2) является

Теорема 1. *Пусть* $v_0 \in \mathbb{D}(\mathbb{A})$ *и для* $i = 1, \dots, n$ $b_i(t) = \int_0^t a_i(x)dx$. *Тогда функция*

$$v(t) = \left(4^n \pi^n \prod_{i=1}^{n} b_i(t)\right)^{-1/2} \int_{\mathbb{R}_n} \exp\left(-1/4 \sum_{i=1}^{n} y_i^2 / b_i(t)\right) \prod_{i=1}^{n} \mathbb{C}_i(y_i) v_0 dy \tag{4}$$

является единственным решением задачи (1), (2).

Как известно [1], для любой косинус-функции $\mathbb{C}_i(t)$ существуют такие числа $M_i \geq 1$ и $\omega_i \geq 0$, что при $t \in \mathbb{R}$ справедлива оценка

$$\|\mathbb{C}_i(t)\| \leq M_i \exp(\omega_i |t|). \tag{5}$$

В частном случае, когда все $\omega_i = 0$, критерий стабилизации решения задачи (1), (2) является следствием теоремы 1 и результатов работы [5], в которой установлен критерий стабилизации интеграла Пуассона с ограниченной начальной функцией.

Теорема 2. *Пусть $v(t)$ — решение задачи (1), (2), $v_0 \in \mathbb{D}(\mathbb{A})$, $i \in \mathbb{E}$ и в (5) все $\omega_i = 0$. Для того чтобы $\lim\limits_{t\to\infty} v(t) = i$, необходимо и достаточно, чтобы существовал*

$$\lim_{t\to\infty} \pi^{-n/2} t^{-n} \Gamma(1+n/2) \int_{|s|\le t} \prod_{i=1}^{n} \mathbb{C}_i(s_i \sqrt{b_i(t)/t}) v_0 ds = i.$$

В общем случае мы доказываем теорему об асимптотической близости.

Теорема 3. *Пусть $\max\limits_i \omega_i = 0$, функция $\tau(t) = \Big(\prod\limits_{i=1}^{n} b_i(t)\Big)^{1/n}$ монотонно возрастает и $\lim\limits_{t\to\infty} \tau(t) = \infty$. Пусть для всех $i = 1, \dots, n$ существуют пределы $\lim\limits_{t\to\infty} b_i(t)/\tau(t) = \alpha_i > 0$, причем $b_i(t) - \alpha_i \tau(t) = o\Big(\exp\Big(-2\sum\limits_{i=1}^{n} \omega_i^2 b_i(t)\Big)\Big)$. Тогда $\lim\limits_{t\to\infty} \|v(t) - w(\tau(t))\| = 0$, где $v(t)$ — решение задачи (1), (2), а $w(t)$ — решение уравнения (3), удовлетворяющее условию $w(0) = v_0$, $v_0 \in \mathbb{D}(\mathbb{A})$.*

Доказательство. Используя теорему 1, получим

$$v(t) - w(\tau(t)) = 2^{-n}\pi^{-n/2} \int_{\mathbb{R}_n} \Bigg[\Bigg(\prod_{i=1}^{n} b_i(t)\Bigg)^{-1/2} \exp\Bigg(-1/4 \sum_{i=1}^{n} b_i^{-1}(t) y_i^2\Bigg) - \\ - \tau^{-n/2}(t) \Bigg(\prod_{i=1}^{n} \alpha_i\Bigg)^{-1/2} \exp\Bigg(-1/4 \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^{-1}\tau^{-1}(t) y_i^2\Bigg)\Bigg] \prod_{i=1}^{n} \mathbb{C}_i(y_i) v_0 dy. \quad (6)$$

Интеграл, стоящий в правой части (6), разобьем на два. Один вычисляется по множеству D_1, определяемому неравенством

$$\sum_{i=1}^{n} y_i^2/b_i(t) \ge 32 \sum_{i=1}^{n} \omega_i^2 b_i(t),$$

обозначим его $I_1(t)$. Второй — по множеству $D_2 = \mathbb{R}_n \setminus D_1$, обозначим его $I_2(t)$.

Для оценки $I_1(t)$ используем оценку (5) и элементарное неравенство

$$\omega_i |y_i| \le (8b(t))^{-1} y_i^2 + 2\omega_i^2 b(t). \quad (7)$$

Будем иметь

$$\|I_1(t)\| \le M \int_{D_1} \Bigg(\prod_{i=1}^{n} b_i(t)\Bigg)^{-1/2} \exp\Bigg(-1/8 \sum_{i=1}^{n} b_i^{-1}(t) y_i^2 + 2\sum_{i=1}^{n} \omega_i^2 b_i(t)\Bigg) dy + \\ + M \int_{D_1} \tau^{-n/2}(t) \Bigg(\prod_{i=1}^{n} \alpha_i\Bigg)^{-1/2} \exp\Bigg(-1/8 \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^{-1}\tau^{-1}(t) y_i^2 + 2\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \omega_i^2 \tau(t)\Bigg) dy,$$

где $M = \pi^{-n/2} 2^{-n} \|v_0\| \prod\limits_{i=1}^{n} M_i$. Отсюда после замены переменных интегрирования окончательно найдем

$$\|I_1(t)\| \le 2M \int_S \exp(-1/32|x|^2) dx, \quad (8)$$

где S — множество, определяемое неравенством

$$|x|^2 > 30 \sum_{i=1}^{n} \omega_i^2 b_i(t).$$

Используя неравенство (7), оценим

$$\|I_2(t)\| \le M \int_{D_2} \Big(\prod_{i=1}^n b_i(t)\Big)^{-1/2} \exp\Big(-1/8 \sum_{i=1}^n b_i^{-1}(t) y_i^2\Big) f(t) \times$$
$$\times \Big|1 - q(t) \exp\Big(-1/4 \sum_{i=1}^n h_i(t) y_i^2\Big)\Big| dy, \quad (9)$$

где $f(t) = \exp\Big(2 \sum\limits_{i=1}^n \omega_i^2 b_i(t)\Big)$, $q(t) = \Big(\prod\limits_{i=1}^n b_i(t)\Big)^{1/2} \Big(\tau^n(t) \prod\limits_{i=1}^n \alpha_i\Big)^{-1/2}$, $h_i(t) = \alpha_i^{-1}\tau^{-1}(t) - b_i^{-1}(t)$.

Так как в области D_2 $y_i^2 \le 32 b_i(t) \sum\limits_{i=1}^n \omega_j^2 b_j(t)$, то при достаточно больших t выполняется

$$f(t)\Big|1 - q(t) \exp\Big(-(1/4) \sum_{i=1}^n h_i(t) y_i^2\Big)\Big| \le f(t)|1 - q(t)| +$$
$$+ 16 q(t) \sum_{i=1}^n \omega_j^2 \alpha_j \sum_{i=1}^n \alpha_i^{-1} f(t) |b_i(t) - \alpha_i \tau(t)| + \gamma(t), \quad (10)$$

где $\gamma(t)$ — бесконечно малая величина по отношению к предыдущему слагаемому.

Очевидно, при достаточно больших t существует такая постоянная $M_0 > 0$, что

$$f(t)|1 - q(t)| = f(t)\Big|\tau^n(t) \prod_{i=1}^n \alpha_i - \prod_{i=1}^n b_i(t)\Big| \Big(\tau^n(t) \prod_{i=1}^n \alpha_i\Big)^{-1/2} \times$$
$$\times \Big(\sqrt{\tau^n(t) \prod_{i=1}^n \alpha_i} + \sqrt{\prod_{i=1}^n b_i(t)}\Big)^{-1} =$$
$$= f(t)\Big|\tau^n(t) \prod_{i=1}^n \alpha_i - \prod_{i=1}^n b_i(t)\Big| \Big/ \Big(\tau^n(t)\Big(\prod_{i=1}^n \alpha_i + \sqrt{\prod_{i=1}^n \alpha_i b_i(t)/\tau(t)}\Big)\Big) \le$$
$$\le M_0 f(t) o\Big(\exp\Big(-2 \sum_{i=1}^n \omega_i^2 b_i(t)\Big)\Big). \quad (11)$$

Из (6), (8)–(11) и условий теоремы вытекает требуемое утверждение. □

Заметим, что наложенные в теореме 3 условия на коэффициенты уравнения (1) автоматически выполнены для уравнения с постоянными коэффициентами $a_i(t) = a_i$ (при этом функция $\tau(t)$, играющая роль времени, равна $t\sqrt{a_1 \cdots a_n}$, $b_i(t) = a_i(t)$, $\alpha_i = a_i/\sqrt{a_1 \cdots a_n}$, $b_i(t) - \alpha_i \tau(t) \equiv 0$).

В частном случае, когда $\mathbb{A}_i = \partial^2/\partial x_i^2$, пределы при $t \to \infty$ отношений $b_i(t)/\tau(t)$ определяют полуоси эллипсоида, по которому нужно усреднять ограниченную начальную функцию $v_0(x)$, чтобы получить необходимое и достаточное условие стабилизации. Выбор эллипсоида диктуется характером поверхностей уровня фундаментального решения (см. теорему 3 из [2] и замечания к ней).

Отметим также, что теорема 3 верна и в случае $\max\limits_i \omega_i = 0$, при этом ограничения на скорость стремления $b_i(t)/\tau(t)$ к пределу не возникают.

Литература

1. Васильев В.В., Крейн С.Г., Пискарев С.И. *Полугруппы операторов, косинус оператор-функции и линейные дифференциальные уравнения* // Итоги науки и техн. ВИНИТИ. Матем. анализ. – 1990. – С. 87–102.
2. Денисов В.Н., Репников В.Д. *О стабилизации решения задачи Коши для параболических уравнений* // Дифференц. уравнения. – 1984. – Т. 20. – № 1. – С. 20–41.

3. Глушак А.В., Репников В.Д. *О стабилизации решений задачи Коши для дифференциального уравнения в банаховом пространстве* // ДАН СССР. – 1992. – Т. 326. – № 2. – С. 224–226.
4. Глушак А.В., Шмулевич С.Д. *Интегральные представления решений одного сингулярного уравнения, содержащего сумму коммутирующих операторов* // Дифференц. уравнения. – 1992. – Т. 28. – № 5. – С. 831–838.
5. Репников В.Д., Эйдельман С.Д. *Необходимые и достаточные условия установления решения задачи Коши* // ДАН СССР. – 1966. – Т. 167. – № 2. – С. 298–301.

Воронежский государственный
технический университет

Поступила
30.01.1995