ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1998 МАТЕМАТИКА № 6 (433)

УДК 514.763

А. ШИБЯК

ДЕРИВАЦИОННЫЕ УРАВНЕНИЯ ГРАССМАНИАНОВ ВТОРОГО ПОРЯДКА

1. *Введение.* Все рассматриваемые отображения и многообразия предполагаются гладкими. Пусть S — многообразие и G — группа Ли. Обозначим через TS и TG соответственно касательные расслоения S и G. Через T_xS обозначим линейное пространство, касающееся S в точке x. Рассмотрим левое действие

$$G \times S \to S : (g,x) \to gx, \tag{1}$$

удовлетворяющее условиям

$$a(gx) = (ag)x, \quad Ix = x,$$

где I — единичный элемент группы G. Рассмотрим линейную форму

$$\theta = dx + (g^{-1}dg)x \tag{2}$$

и ассоциированную систему уравнений Пфаффа

$$\theta = 0. \tag{3}$$

Если эта система вполне интегрируема, то существуют первые интегралы уравнений (3), и действие группы может быть описано с помощью этих интегралов (см. [1]).

Перейдем к локальному описанию. Пусть $u^1,\dots,u^p$ — координаты элемента g в координатной окрестности группы G. Пусть $x^1,\dots,x^m$ — координаты точки $x \in S$ и $y^1,\dots,y^m$ — координаты точки gx. Тогда существуют такие гладкие функции $F^1,\dots,F^m$, что

$$y^i = F^i(u^1,\dots,u^r;x^1,\dots,x^m) \quad (i=1,\dots,m),$$

где $m = \dim S$. Обозначим через $E_1,\dots,E_r$ базис в касательном пространстве T_IG и через D_{E_μ} $(\mu = 1,\dots,m)$ — соответствующие пфаффовы производные. Обозначим через $\alpha^1,\dots,\alpha^r$ компоненты левоинвариантной формы $g^{-1}dg$ в указанном базисе. Тогда форму θ можно представить в виде

$$\theta^i = dx^i + \sum_{\mu=1}^{r} \widehat{F}^i_\mu(x^1,\dots,x^m)\alpha^\mu, \tag{4}$$

где

$$\widehat{F}^i_\mu(x^1,\dots,x^m) = D_{E_\mu}F^i(I;x^1,\dots,x^m).$$

Дифференциальные формы θ^i называются инвариантными формами действия (1).

Рассмотрим расслоение (R,M,L^n_1,π) линейных реперов над многообразием M $(\dim M = n)$, где L^n_1 — линейная группа, обычно обозначаемая символом $GL(n,R)$. Тогда слой $\pi^{-1}(m)$ над точкой $m \in M$ есть совокупность всех линейных реперов многообразия M в этой точке. Каждый репер может быть отождествлен с регулярной струей j^1_of, где f — диффеоморфизм окрестности точки $O \in R^n$ в M, причем $f(O) = m$. Корепер, ассоциированный с j^1_of, есть $j^1_mf^{-1}$. Каждый вектор $\vec v \in T_mM$ можно изобразить элементом $(v^1,\dots,v^n) \in R^n$, где v^i — координаты

$\vec{v}$ относительно репера $j^1_o f$. Пусть $\omega^1, \dots, \omega^n$ — элементы корепера. Выразим их в локальных координатах.

Пусть (U, x) — локальное отображение M, накрывающее m. Это означает, что $m \in U$ и $x : U \to R^n$. Тогда всякая точка $j^1_o f \in \pi^{-1}U$ имеет локальные координаты $(x^1, \dots, x^n; A^1_1, \dots, A^i_j, \dots, A^n_n)$, где x^i — координаты точки $x(f(O))$ в R^n, а (A^i_j) — якобиева матрица отображения $x \to f(x)$ в точке O. Обозначим через (a^i_j) матрицу, обратную к (A^i_j). Тогда

$$\omega^i_{|j^1_o f} = \sum_u a^i_u dx^u.$$

Будем обозначать символом (R_r, M, L^n_r, π_r) расслоение реперов r-го порядка на M. Точками расслоения R_r служат регулярные струи $j^r_o f$ порядка r, где f — локальный диффеоморфизм окрестности точки $O \in R^n$ в M. Структурная группа L^n_r этого расслоения образована регулярными струями $j^r_o \phi$, где ϕ — диффеоморфизм окрестности точки $O \in R^n$ в эту же окрестность, причем $\phi(O) = O$. На тотальном пространстве R_r определено поле канонической формы $\omega^{(r)}$, отображающей TR_r в $R^n \times T_I L^n_{r-1}$ (см. [2]). Компоненты $\omega^i, \omega^i_k, \dots, \omega^i_{k_1 \dots k_{r-1}}$ формы $\omega^{(r)}$ удовлетворяют уравнениям

$$d\omega^i + \sum_h \omega^i_h \wedge \omega^h,\ d\omega^i_j + \sum_h (\omega^i_h \wedge \omega^h_j + \omega^i_{hj} \wedge \omega^h) = 0,$$
$$d\omega^i_{j_1 j_2} + \sum_h (\omega^i_h \wedge \omega^h_{j_1 j_2} + \omega^i_{hj_1} \wedge \omega^h_{j_2} + \omega^i_{hj_2} \wedge \omega^h_{j_1} + \omega^i_{hj_1 j_2} \wedge \omega^h) = 0,$$

и т. д., называемым структурными уравнениями (см. [3], [1], [4]).

Рассмотрим более общее расслоение (P, M, G, π), где G — группа Ли, действующая на многообразии S. Введем следующее действие группы G на $P \times S$:

$$(g, (p, s)) = (pg^{-1}, gs).$$

Обозначим через F многообразие соответствующих орбит. Определим проекцию $\Pi : P \times S \to M$, переводящую орбиту элемента (p, s) в $\pi(p)$. Таким образом, F есть тотальное пространство расслоения, ассоциированного с главным расслоением (P, M, G, π). Это ассоциированное расслоение обозначим символом (F, M, G, S, Π); S – стандартный слой этого ассоциированного расслоения; сечение ассоциированного расслоения можно рассматривать как отображение $s : P \to S$, удовлетворяющее условию $s(pg^{-1}) = gs(p)$.

Система уравнений Пфаффа $\theta^i = 0$ (вернемся к формулам (3) и (4)) имеет место для каждого слоя в F. Чтобы получить систему уравнений для сечения Π, мы должны дополнить формы θ^i компонентами, линейно выражающимися через базисные компоненты ω^i. Значит, будем полагать

$$\widetilde{\theta}^i = dx^i + \sum_{\mu=1}^{\dim G} \widehat{F}^i_\mu(x)\alpha^\mu + \sum_{k=1}^{\dim M} x^i_k \omega^k, \tag{5}$$

где x^i_k — некоторые функции на $TS \times G$.

В качестве примера рассмотрим грассманово многообразие первого порядка. Пусть p — целое число $(1 \le p \le n)$. Покажем, что множество всех p-мерных подпространств в R^n является многообразием и что на этом многообразии действует группа матричных гомографий. Используем конструкцию, указанную Ханганом (см. [5]).

Обозначим через $\zeta^{p,n}$ множество p-плоскостей в R^n. Введем локальную параметризацию на $\zeta^{p,n}$. Пусть S и T — два линейных подпространства в R^n таких, что $\dim S = p$ и $R^n = S \oplus T$ (прямая сумма). Значит, возникают две канонические проекции

$$\sigma : R^n \to S \quad \text{и} \quad \tau : R^n \to T.$$

Возьмем такое p-мерное подпространство $X \subset R^n$, что $X \bigcap T = 0$. Тогда $\sigma|X$ является линейным изоморфизмом X на S. Обозначим через ϕ_X отображение, обратное к $\sigma|X$. Тогда $\phi_X : S \to X$.

Рассмотрим отображение $h_X = \tau \circ \phi_X$. Это отображение h_X есть линейный гомоморфизм S в T. Чтобы выразить h_X в координатах, рассмотрим базис $(\vec{i}_1, \dots, \vec{i}_p)$ в S и базис $(\vec{i}_{p+1}, \dots, \vec{i}_n)$ в T. Касательное отображение ϕ_X^* определяет базис $(\vec{j}_1, \dots, \vec{j}_p)$ в X. Разложения

$$\tau^*(\vec{j}_a) = \sum_{u=p+1}^{n} h_a^u \vec{i}_u$$

определяют матрицу $(h_a^u) = \hat{h}_X$. Поскольку отображение $X \to h_X$ взаимнооднозначно, то рассмотрим h_a^u как координаты подпространства X, играющего роль точки в $\zeta^{p,n}$. Такая система координат покрывает область

$$\{X \mid \dim X = p,\ R^n = X \bigoplus T\}.$$

Для каждого вектора $\vec{x} \in X$ имеем

$$\sigma(\vec{x}) = \sum_{a=1}^{p} x^a \vec{i}_a, \quad \tau(\vec{x}) = \sum_{u=p+1}^{n} x^u \vec{i}_u.$$

Значит, X, как линейное подпространство в R^n, может быть задано параметрами

$$x^a(t^1, \dots, t^p) = t^a \quad (a = 1, \dots, p), \tag{6}$$

$$x^u(t^1, \dots, t^p) = \sum_{a=1}^{p} h_a^u t^a \quad (u = p+1, \dots, n). \tag{7}$$

Из (6) и (7) имеем

$$x^u - \sum_{a=1}^{p} h_a^u x^a = 0 \tag{8}$$

— система уравнений, определяющая подпространство X в R^n. Отсюда

$$X = \ker(\tau - h \circ \sigma). \tag{9}$$

Пусть A — автоморфизм пространства R^n. Обозначим через $\bar{S}$ и $\overline{T}$ образы подпространств S и T, через $\overline{\sigma}$ и $\overline{\tau}$ — канонические проектирования, отвечающие новому разложению $R^n = \overline{S} \oplus \overline{T}$ (предполагается, что такое разложение имеет место). Определим затем отображение $\overline{\phi}_X : \overline{S} \to X$, для которого $\overline{\sigma} \circ \overline{\phi}_X = I_{\overline{S}}$, и отображение $\overline{\tau} \circ \overline{\phi}_X$. Так как для любого $\vec{t} \in S$ имеем $(I_S + h_X)(\vec{t}) \in X$, то легко убедиться в справедливости равенств

$$\overline{h}_X \circ ((\overline{\sigma} \mid S) + (\overline{\sigma} \mid T) \circ h_X) = (\overline{\tau} \circ T) \circ h_X + \overline{\tau} \mid S.$$

Поэтому для $\overline{h}_X$ получаем выражение

$$\overline{h}_X = ((\overline{\tau} \circ T) \circ h_X + \overline{\tau} \mid S) \circ ((\overline{\sigma} \mid T) \circ h + \overline{\sigma} \mid S)^{-1}. \tag{10}$$

Выберем базис $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_p)$ в $\overline{S}$ и базис $(\vec{e}_{p+1}, \dots, \vec{e}_n)$ в T. Тогда линейные отображения $\overline{\sigma} \mid S$, $\overline{\sigma} \mid T$, $\overline{\tau} \mid S$ и $\overline{\tau} \mid T$ можно представить соответственно матрицами (d_b^a), (c_w^a), (b_a^w) и (a_u^w), где $a, b = 1, \dots, p$ и $u, w = p+1, \dots, n$. Теперь (10) можно записать в матричном виде

$$\overline{h} = (ah + b)(ch + d)^{-1}. \tag{11}$$

Легко убедиться, что композиция двух преобразований вида (11) имеет тот же вид, т. е. (11) — матричные гомографии. Отсюда следует, что преобразования вида (10) грассманова пространства $\zeta^{(p,n)}$ образуют группу (обобщенную группу гомографий).

Найдем инфинитезимальные преобразования указанной группы. Обозначим через Ω^k_h $(k,h=1,\dots,n)$ компоненты левоинвариантной линейной дифференциальной формы на L^n_1. Имеем $\Omega^k_h=\sum\limits_{i=1}^n Z^k_i dA^i_h$, где Z^k_i — элементы матрицы, обратной матрице

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}.$$

Подсчитывая дифференциал отображения, задаваемого формулой (11), приходим к формуле

$$\theta^w_a=dh^w_a+\sum_{u=p+1}^n \Omega^w_u h^u_a+\Omega^w_a-\sum_{c=1}^p\sum_{u=p+1}^n h^w_c\Omega^c_u h^u_a-\sum_{c=1}^p h^w_c\Omega^c_a \tag{12}$$

— вид общей формулы (4) в грассмановом случае.

В дальнейшем будет использоваться, впервые доказанная Э. Картаном и затем обобщенная Г.Ф. Лаптевым (см. [6]),

Лемма Картана-Лаптева. *Пусть k и l — целые числа $(1\le k<l)$ и пусть E — конечномерное векторное пространство с базисом $(\vec e_1,\dots,\vec e_l)$. Пусть $(dx^1,\dots,dx^l)$ — ковекторный базис, дуальный по отношению к $(\vec e_1,\dots,\vec e_l)$. Пусть $\Omega_1,\dots,\Omega_k$ — внешние формы степени h $(h<l-1)$:*

$$\Omega_\alpha=\sum A_{\alpha i_1\dots i_h}dx^{i_1}\wedge\dots\wedge dx^{i_h}\quad (\alpha=1,\dots,k).$$

Если существуют линейные формы $\omega_1,\dots,\omega_h$, для которых выполняются равенства

$$\sum_{\alpha=1}^k \Omega_\alpha\wedge\omega^\alpha=0,$$

то существуют такие внешние формы $\psi_{\alpha\beta}$ $(\alpha,\beta=1,\dots,k)$, каждая степени $h-1$, что $\psi_{\alpha\beta}=-\psi_{\beta\alpha}$ и

$$\Omega_\alpha=\sum_{\beta=1}^k\psi_{\alpha\beta}\wedge\omega^\beta.$$

Формы $\psi_{\alpha\beta}$ не единственны. Если существуют другие $(h-1)$-формы $\overline{\psi}_{\alpha\beta}$, для которых

$$\sum_\beta\overline{\psi}_{\alpha\beta}\wedge\omega^\beta=\sum_\beta\psi_{\alpha\beta}\wedge\omega^\beta,$$

то найдутся такие $(h-2)$-формы $\Delta_{\alpha\beta\gamma}$ $(\alpha,\beta,\gamma=1,\dots,k)$, что $\Delta_{\alpha\beta\gamma}=\Delta_{\alpha\gamma\beta}$ и

$$\overline{\psi}_{\alpha\beta}=\psi_{\alpha\beta}+\sum_\gamma\Delta_{\alpha\beta\gamma}\wedge\omega^\gamma.$$

2. *Первый порядок.* Пусть p и n – целые числа, причем $1\le p<n$. Индексы $a,b,\dots,g$ будут изменяться от 1 до p, индексы u,v,w — от $p+1$ до n, а индексы h,i,j,k — от 1 до n. Формула

$$f:(x,X)\to Y$$

означает, что f — отображение некоторой открытой окрестности точки x пространства X в пространство Y.

Через L^n_r $(r\ge 1)$ обозначим группу регулярных r-струй вида j^r_of, где $f:(O,R^n)\to R^n$, причем $f(O)=O$ и отображение $f'(O)$ не является особым. Если M — многообразие, то обозначим через $T^p_{(r)}M$ многообразие $\{j^r_of\mid f:(O,R^p)\to M\}$. В частности, будем рассматривать $T^p_{(r)}L^n_1$. Определим структуру группы Ли на многообразии $L^p_r\times T^p_{(r-1)}L^n_1$. Групповые операции определим формулами

$$(h,H)(g,G)=(hg,(Hg)G),\quad (g,G)^{-1}=(g^{-1},(Gg^{-1})^{-1}).$$

Эти формулы станут ясными, если заметить, что $g = j_o^r f_1$, $h = j_o^r f_2$, $G = j_o^{r-1} w$, $H = j_o^{r-1}\zeta$, где w и ζ — отображения $(O, R^p) \to L_1^n$. Значения отображений w и ζ являются обратимыми матрицами, Hg определено как $j_o^{r-1}\zeta \circ f_1$, а

$$(Hg)G = j_o^{r-1}((\zeta \circ f_1)w).$$

Аналогично подсчитывается $(Gg^{-1})^{-1}$. Пусть f_1^{-1} — обратное к f_1 отображение и $Gg^{-1} = j_o^{r-1}(w \circ f_1^{-1})$. Так как $w \circ f_1^{-1} : (O, R^p) \to L_1^n$, то значениями $w \circ f_1^{-1}$ являются обратимые матрицы. Поэтому обратная матрица $(w \circ f_1^{-1}(-))^{-1}$ определена. Положим

$$(Gg^{-1})^{-1} = j_o^{r-1}((w \circ f_1(-))^{-1}).$$

Итак, $L_r^p \times T_{r-1}^p L_1^n$ — базисное многообразие некоторой группы Ли, которую обозначим $L_r^{p,n}$.

Каноническими координатами в $L_1^{p,n}$ являются u_b^a, A_u^i, а каноническими координатами в $L_2^{p,n}$ — u_b^a, $u_{b_1 b_2}^a$, A_k^i, A_{ka}^i.

Рассмотрим p-мерное многообразие V, погруженное в n-мерное многообразие W. Предположим, что V — подмногообразие в W. Пусть $\omega^{(r)}$ — каноническая форма на расслоении (R_r, V, L_r^p, π) r-реперов над V. Компоненты формы $\omega^{(r)}$ обозначим $\omega^a, \omega_b^a, \omega_{b_1 b_2}^a, \ldots, \omega_{b_1 \ldots b_{r-1}}^a$. Рассмотрим другое расслоение $(B, W \mid V, l_1^n, \beta)$ линейных n-мерных реперов 1-го порядка в точках V. Локальные координаты репера $j_o^1 f$ из B определяются отображением (U, q), $U \subset W$, $q : U \to R^n$, где $q^1(f(O)), \ldots, q^n(f(O))$ — координаты начала $f(O)$, а A_u^i — компоненты якобиевой матрицы отображения $q \circ f$ в точке O.

Рассмотрим многообразие B_1 струй вида $j_o^1 b \circ f$, где отображение $b : (x, V) \to B$ удовлетворяет условиям $\beta \circ b(x) = x \in V$, $f : (O, R^p) \to V$, $f(O = x)$. Заметим, что $j_o^1 f$ — линейный репер многообразия W в точке x. Поэтому $j^1 b \circ f$ имеет локальные координаты A_j^i, A_{ja}^i, где A_{ja}^i — частные производные отображения $b \circ f$ в точке $b \circ f(O)$. Пусть (Z_j^i) — матрица, обратная к (A_j^i). Тогда можно построить матрицу, элементами которой являются линейные дифференциальные формы

$$\phi_j^i = Z_k^i (dA_j^k - A_{ja}^k \omega^a) \tag{13}$$

(пользуемся правилом Эйнштейна для суммирования). Произведем операцию внешнего дифференцирования. Замечая, что $dZ_j^i = -Z_h^i dA_k^h Z_j^k$, находим

$$d\phi_j^i = -\phi_k^i \wedge \phi_j^k - (\phi_k^i Z_h^k A_{ja}^h - Z_k^i A_{ha}^k \phi_j^h + Z_k^i A_{ha}^k Z_l^h A_{jb}^l \omega^b + Z_k^i A_{jc}^k \omega_a^c) \wedge \omega^a.$$

Обозначая через ϕ_{ja}^i форму, стоящую перед знаком $\wedge$, имеем

$$d\phi_j^i = -\phi_k^i \wedge \phi_j^k - \phi_{jk}^i \wedge \omega^a. \tag{14}$$

Используя (14), находим

$$(d\phi_{ja}^i + \phi_{ka}^i \wedge \phi_j^k + \phi_k^i \wedge \phi_{ja}^k + \phi_{jg}^i \wedge \omega_a^g) \wedge \omega^a = 0.$$

В силу леммы Картана и Лаптева существуют такие формы ϕ_{jab}^i, что $\phi_{jab}^i = \phi_{jba}^i$ и

$$d\phi_{ja}^i + \phi_{ka}^i \wedge \phi_j^k + \phi_k^i \wedge \phi_{ja}^k + \phi_{jg}^i \wedge \omega_a^g = -\phi_{jab}^i \wedge \omega^b. \tag{15}$$

Уравнения (14) и (15) называются структурными уравнениями. Алгоритм, позволяющий получить (15) из (14), называется продолжением структурных уравнений ([3], [2], [7], [8]).

Рассмотрим следующие расслоения реперов над p-мерным многообразием V, погруженным в n-мерное многообразие W.

Расслоение $(P_r, V, L_{(r)}^p, \pi)$. Точками тотального пространства P_r являются реперы r-го порядка многообразия V. Каждый репер есть регулярная струя $j_o^r f$, где $f : (O, R^p) \to V$. Каноническая форма этого расслоения имеет компоненты $\omega^a, \omega_b^a, \omega_{b_1 b_2}^a, \ldots, \omega_{b_1 \ldots b_{r-1}}^a$ (см. [4]).

Расслоение $(B, W \mid V, L_1^n, \beta)$. Точками тотального пространства B являются линейные реперы многообразия W: каждый репер есть регулярная струя $j_o^1 f$, где $f : (O, R^n) \to W$, $f(O) \in V$. Структурной группой этого расслоения является $L_1^n; \beta : j_1^r f \to f(O)$.

Рассмотрим также расслоение $(B_r, W \mid V, L_r^{p,n}, \beta_r)$. Точками тотального пространства B_r являются регулярные струи вида $j_o^{r-1}(\lambda \circ f)$, где $f : (O, R^n) \to V$, а λ — локальное сечение расслоения B. Чтобы определить природу структурной группы $L_r^{p,n}$ расслоения B_r, рассмотрим два элемента расслоения B_r в одной и той же точке $v = f(O) = g(O) \in V$:

$$\xi_1 = j_o^{r-1}(\lambda \circ f), \quad \xi_2 = j_o^{r-1}(\kappa \circ g).$$

Значит, существует такая окрестность U точки $v \in V$ и такое отображение $A : U \to L_1^n$, что $\kappa(y) = \lambda(y)A(y)$. Правая часть последнего равенства есть результат стандартного правого действия группы L_1^n на B. Имеем

$$\kappa(g(t)) = \lambda(g(t))A(g(t)) = (\lambda \circ f) \circ (f^{-1} \circ g)(t)A(g(t)).$$

Заметим, что $f^{-1} \circ g$ есть локальный диффеоморфизм $(O, R^p) \to R^p$. Поэтому $j_o^{r-1}(f^{-1} \circ g) \in L_r^p$, и имеем

$$\xi_2 = j_o^{r-1}(\kappa \circ g) = (j_o^{r-1}(\lambda \circ f) j_o^{r-1}(f^{-1} \circ g))(j_o^{r-1}(A \circ g)) = (\xi_1 \gamma)(j_o^{r-1}(A \circ g)),$$

где $\gamma = j_o^{r-1}(f^{-1} \circ g)$, $j_o^{r-1}(A \circ g) \in T_r^p L_1^n$. Итак, структурной группой расслоения B_r является определенная выше группа $L_r^{p,n}$.

В каждой точке $m \in V$ погружение $V \to W$ определяет $T_m W$-значную форму $X(m)$. Если задан базис $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n$, то $X(m) = X_a^k \vec{e}_k \otimes \omega^a$. Значит, $x \to X(x)$ есть тензорное поле на V, и его деривационные уравнения имеют вид

$$dX_a^i - \phi_h^i X_a^h + X_b^i \omega_a^d = X_{ab}^i \omega^b.$$

Эти уравнения определяют сечение расслоения над $V \mid W$. Стандартным слоем такого расслоения является $R^n \otimes R^{p*}$, а его структурной группой служит $L^n \times L^p$. Обозначим это ассоциированное расслоение символом $(T, V \mid W, L^n \times L^p, R^n \otimes R^{p*}, \rho)$.

Следуя нашим соглашениям об индексах, запишем деривационные уравнения для X_a^i в виде

$$dX_a^g - \phi_b^g X_a^b - \phi_u^g X_a^u + X_b^g \omega_a^b = X_{ab}^g \omega^b, \tag{16}$$

$$dX_a^w - \phi_b^w X_a^b - \phi_u^w X_a^u + X_b^w \omega_a^b = X_{ab}^w \omega^b. \tag{17}$$

В каждой точке $x \in V$ существует такой репер $(\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_p; \vec{e}_{p+1}, \ldots, \vec{e}_n)$, что первые p его векторов образуют базис в $T_x V$. В таком репере $X_a^g = \delta_a^g$, и уравнения (16) принимают вид

$$-\phi_a^g - \phi_u^g X_a^u + \omega_a^g = X_{ab}^g \omega^b. \tag{18}$$

Рассмотрим систему Пфаффа

$$\omega^g = 0, \quad \omega_a^g - \phi_a^g - \phi_u^g X_a^u = 0$$

и зададим начальные условия $X_a^g = \delta_a^g$. Положим

$$\psi_a^g = \omega_a^g - \phi_a^g - \phi_u^g X_a^u.$$

Простые вычисления с учетом (14) показывают

$$d\psi_a^g = -\phi_c^g \wedge \psi_a^c - (\omega_{ab}^g - \phi_{ab}^g - \phi_{vb}^g X_a^v - \phi_v^g X_{ab}^v) \wedge \omega^b, \tag{19}$$

откуда вытекает

Теорема 1. *Система Пфаффа*

$$\omega^a = 0, \quad \omega_a^g - (\phi_a^g + \phi_u^g X_a^u) = 0 \tag{20}$$

удовлетворяет условиям теоремы Фробениуса.

Следовательно, в каждом слое расслоения

$$(T,V \mid W, L^n \otimes L^p, R^n \otimes R^{p*}, \rho)$$

существует интегральное подмногообразие системы (20). На этом подмногообразии $X^g_a = \delta^g_a$, и формы ω^g_a в (17) могут быть исключены с использованием (20): $\omega^c_a = \phi^c_a + \phi^c_v X^v_a$. После этого уравнения (17) приобретут вид

$$dX^w_a + \phi^w_a + \phi^w_v X^v_a - X^w_c \phi^c_a - X^w_c \phi^c_u X^u_a = 0. \tag{21}$$

Система уравнений (21) определяет закон действия группы L^n_1 на пространстве матриц вида (X^w_a) в каждом слое над V. Вспоминая (12), видим, что уравнения (21) являются деривационными уравнениями грассманова пространства $\zeta^{p,n}$. В итоге получается

Теорема 2. *На подмногообразии системы* (20) *с начальными условиями* $X^g_a = \delta^g_a$ *тензорное поле* $X^i_a \vec{e}_i \otimes \omega^a$ *погружения* $V \to W$ *является грассмановым. Это поле является сечением расслоения* $(P, V, L^n, \zeta^{p,n}, \overline{p})$, *ассоциированного с главным расслоением линейных n-реперов, связанных с точками подмногообразия* V. *Деривационные уравнения такого сечения имеют вид*

$$dX^w_a + \phi^w_a + \phi^w_v X^v_a - X^w_c \phi^c_v X^v_a = \widetilde{X}^w_{ab}\omega^b. \tag{22}$$

3. *Второй порядок.* Вернемся к уравнениям инвариантности тензора погружения

$$dX^i_a + \phi^i_k X^k_a - X^i_c \omega^c_a = X^i_{ab}\omega^b.$$

Применяя к обеим частям операцию внешнего дифференцирования, учитывая (14) и другие структурные уравнения, получим

$$(-dX^i_{ab} - \phi^i_{kb} X^k_a - \phi^i_k X^k_{ab} + X^i_{cb}\omega^c_a + X^i_{ac}\omega^c_b + X^i_c \omega^c_{ab}) \wedge \omega^b = 0. \tag{23}$$

В силу леммы Картана-Лаптева существует такая матричная форма $X^i_{abc}\omega^c$, что $X^i_{abc} = X^i_{acb}$ и

$$dX^i_{ab} + \phi^i_{kb} X^k_a + \phi^i_k X^k_{ab} - X^i_{cb}\omega^c_a - X^i_{ac}\omega^c_b - X^i_c \omega^c_{ab} = X^i_{abc}\omega^c. \tag{24}$$

Запишем первые p уравнений системы (24) в виде

$$dX^g_{ab} + \phi^g_{cb} X^c_a + \phi^g_{vb} X^v_a + \phi^g_c X^c_{ab} + \phi^g_v X^v_{ab} - X^g_{cb}\omega^c_a - X^g_{ac}\omega^c_b - X^g_c \omega^c_{ab} = X^g_{abc}\omega^c$$

и положим $X^g_a = \delta^g_a, X^g_{ab} = 0, X^g_{abc} = 0$. Тогда получится система уравнений

$$\phi^g_{ab} + \phi^g_{vb} X^v_a + \phi^g_v X^v_{ab} - \omega^g_{ab} = 0, \tag{25}$$

которая выполняется в каждом слое. Заметим, что слой является интегральным многообразием системы $\omega^g = 0$. Обозначим левую часть (25) через ψ^g_{ab}. Справедлива

Теорема 3. *Система уравнений*

$$\omega^g = 0, \psi^g_a = 0, \psi^g_{ab} = 0$$

вполне интегрируема.

Доказательство. Покажем, что система уравнений $d\omega^g = 0, d\psi^g_a = 0, d\psi^g_{ab} = 0$ является следствием уравнений, указанных в теореме. Используем формулу (19). В силу (25) эту формулу можно записать в виде

$$d\psi^g_a = -\phi^g_c \wedge \psi^c_a - \psi^g_{ac} \wedge \omega^c.$$

Дифференцируя внешним образом и используя структурные уравнения, имеем

$$(d\psi^g_{ab} + \phi^g_{cb} \wedge \psi^c_b - \psi^c_{ab} \wedge \phi^g_c + \psi^g_{ac} \wedge \omega^c_b) \wedge \omega^b = 0.$$

Отсюда по лемме Картана-Лаптева

$$d\psi^g_{ab} + \phi^g_{bc} \wedge \psi^c_a - \psi^c_{ab} \wedge \phi^g_c + \psi^g_{ac} \wedge \omega^c_b = \psi^g_{abc} \wedge \omega^c,$$

где ψ^g_{abc} — формы, симметричные по индексам b и c. Итак, возникают следующие структурные уравнения:

$$d\omega^g = -\omega^g_c \wedge \omega^c,$$
$$d\psi^g_a = -\phi^g_c \wedge \psi^c_a - \psi^g_{ab} \wedge \omega^b,$$
$$d\psi^g_{ab} = -\phi^g_{cb} \wedge \psi^c_a + \psi^c_{ab} \wedge \phi^g_c - \psi^g_{ac} \wedge \omega^c_b + \psi^g_{abc} \wedge \omega^c.$$

Отметим, что равенства $\omega^g = 0$, $\psi^g_a = 0$, $\psi^g_{ab} = 0$ влекут равенства $d\omega^g = 0$, $d\psi^g_a = 0$, $d\psi^g_{ab} = 0$, т. е. выполняются условия теоремы Фробениуса. □

Запишем уравнения (24) для $i = p+1, \dots, n$

$$dX^v_{ab} + \phi^v_{cb}X^c_a + \phi^v_{wb}X^w_a + \phi^v_c X^c_{ab} + \phi^v_w X^w_{ab} - X^v_{cb}\omega^c_a - X^v_{cb}\omega^c_b - X^v_c\omega^c_{ab} = X^v_{abc}\omega^c.$$

Полагая здесь $X^a_c = \delta^a_c$, $X^a_{bc} = 0$, $\omega^a = 0$, $\omega^a_b = \phi^a_b + \phi^a_v X^v_b$, $\omega^a_{bc} = \psi^a_{bc} + \phi^a_{vc}X^v_b + \phi^a_v X^v_{bc}$, получим

$$dX^w_{ab} + \phi^w_{ab} + \phi^w_{vb}X^v_a + \phi^w_v X^v_{ab} - X^w_{cb}\phi^c_a - X^w_{cb}\phi^c_v X^v_a - \\ - X^w_{ac}\phi^c_v X^v_b - X^w_c\phi^c_{ab} - X^w_c\phi^c_{vb}X^v_a - X^w_c\phi^c_v X^v_{ab} = 0. \quad (26)$$

Можно показать, что это — система инвариантности для действия группы $T^p_{(r)}L^n_1$ на пространстве $(R^{n-p} \otimes R^{p*}) \oplus (R^{n-p} \otimes R^{p*} \otimes R^{p*})$. Достаточно убедиться, что внешний дифференциал левой части (26) обращается в нуль при $\omega^g = 0$ и при выполнении уравнений (21).

Мы получили систему деривационных уравнений второго порядка, а именно, систему (21), (26); эта система справедлива для некоторого пространства, которое назовем грассманианом второго порядка. Группа действует на нем не обязательно транзитивно, так что грассманиан второго порядка не обязан быть пространством Клейна.

Для грассманиана второго порядка над V справедливы следующие деривационные уравнения:

$$dX^w_a + \phi^w_a + \phi^w_v X^v_a - X^w_t\phi^t_u X^u_a - X^w_b\phi^b_a = \widetilde{X}^w_{ac}\omega^c, \quad (27)$$

$$dX^w_{ab} + \phi^w_{ab} + \phi^w_{vb}X^v_a + \phi^w_v X^v_{ab} - X^w_{cb}\phi^c_a - X^w_{cb}\phi^c_v X^v_a - X^w_{ac}\phi^c_b - X^w_{ac}\phi^c_v X^v_b - \\ - X^w_c\phi^c_{ab} - X^w_c\phi^c_{vb}X^v_a - X^w_c\phi^c_v X^v_{ab} = \widetilde{X}^w_{abc}\omega^c. \quad (28)$$

Замечание. Система уравнений (27), (28) приведена в статье [9]. Мирновский и Мозгава обратили мое внимание на то, что переход от многообразия Штифеля к многообразию Грассмана был у меня недостаточно корректным. Я благодарю их за критику; при этом хочу заметить, что их проективное пространство второго порядка [10] отлично от грассманиана второго порядка, рассматриваемого здесь (даже при $p = 1$).

Литература

1. Лаптев Г.Ф. *Основные инфинитезимальные структуры высших порядков на гладком многообразии* // Тр. геометрич. семинара ВИНИТИ. – 1966. – Т. 1. – С. 139–189.
2. Kobayashi Sh. *Canonical forms of frame bundles of higher order contact* // Proc. Symp. Pure Math. – 1961. – P. 186–193.
3. Евтушик Л.Е. *Дифференциальные связности и инфинитезимальные преобразования продолженной псевдогруппы* // Тр. геометрич. семинара ВИНИТИ АН СССР. – 1969. – Т. 2. – С. 119–150.
4. Szybiak A. *Generalized tangent bundles* // Bull. Acad. polon. sci. Ser. sci., math., astron. et phys. – 1969. – T. 17. – № 5. – S. 289–297.
5. Hangan Th. *Geometrie differentielle grassmannienne* // Rev. roum. math. pures et appl. – 1966. – V. 11. – № 5. – P. 519–531.

6. Kowalski O. *Some algebraic theorems on vector-valued forms and their geometric applications* // Colloq. Math. – 1972. – T. 26. – S. 59–92.
7. Szybiak A. *Grassmannians of higher order and equations of moving frame* // Anal. sti. Univer. Iasi. Sec. Ia. – 1976. – V. 22. – № 2. – P. 201–212.
8. Miernowski A., Mozgawa W. *Projective spaces of second order*, (to appear in Collectanea Mathematicae).
9. Kolar I. *Canonical forms on the prolongations of principle fibre bundles* // Rev. roum. math. pures et appl. – 1971. – V. 15. – № 7. – P. 1091–1106.
10. Kolar I. *On the prolongations of differentiable distributions* // Mat. casop. – 1973. – Sv. 23. – № 4. – P. 317–325.

г. Ватерлоо (Канада)

Поступила
20.05.1997