И З В Е С Т И Я   В Ы С Ш И Х   У Ч Е Б Н Ы Х   З А В Е Д Е Н И Й

2001 МАТЕМАТИКА № 2 (465)

УДК 517.584

*С.П. ХЭКАЛО*

# ФУНКЦИЯ БЕССЕЛЯ НА КОНЕЧНОМ ПОЛЕ

Аналоги бесселевых функций с аргументом из конечного поля возникают как в теории специальных функций [1], [2], так и в теории представлений групп [3]–[6]. В данной работе изучается аналог функции Бесселя, через который выражаются матричные элементы неприводимых представлений группы движений плоскости над конечным полем. Метод, развитый в [7], позволяет получить формулу Хансена, теоремы сложения и умножения.

## 1. Определение функции Бесселя

Пусть $\mathbb{F}$ — конечное поле из $q = p^n$ элементов ($p$ — характеристика поля), $\mathbb{F}^*$ — мультипликативная группа поля, $\mathbb{F}(\tau) = \{z\}$ — квадратичное расширение с сопряжением $\overline{z}$ и нормой $N(z) = z\overline{z}$. Через $\eta$ обозначим образующую циклической группы $\mathbb{F}^*(\tau)$. Для каждого $u \in \mathbb{F}^*$ окружность $C_u = \{z \in \mathbb{F}(\tau) \mid N(z) = u\}$ состоит из $q+1$ точек. Элемент $\xi = \eta^{q-1}$ порождает циклическую группу $C \equiv C_1$ единиц поля $\mathbb{F}(\tau)$ [8]. Пусть $k(t)$ — показатель степени в равенстве $t = \xi^{k(t)}$, $t \in C$. Как известно (напр., [8]), характеры группы $C$ имеют вид

$$\pi_s(t) = \exp\left(\frac{2\pi i}{q+1} s k(t)\right), \quad s = 0, 1, \dots, q,$$

где $s$ — номер характера. Введем билинейную форму $\langle z_1, z_2\rangle = z_1 z_2 + \overline{z}_1\overline{z}_2$ и зафиксируем нетривиальный аддитивный характер $\chi$ поля $\mathbb{F}$. Бесселеву функцию $J_s(z)$ аргумента $z \in \mathbb{F}(\tau)$ и индекса $s = 0, 1, \dots, q$ со значениями в поле $\mathbb{C}$ комплексных чисел определим равенством

$$J_s(z) := \frac{1}{q+1} \sum_{t, N(t)=1} \chi(\langle z, t\rangle)\pi_s(t).$$

Близкая к $J_s(z)$ функция рассматривалась в [4]

$$j_r(u) = \frac{1}{q} \sum_{t, N(t)=u} \chi(t + \overline{t})\varphi_r(t), \tag{1}$$

где $r = 0, 1, \dots, q^2-2$, $\varphi_r(t)$ — мультипликативный характер поля $\mathbb{F}^*(\tau)$. Пусть $[r] \equiv r(\mathrm{mod}(q+1))$ и $0 \le [r] \le q$, тогда связь между указанными функциями такова:

$$j_r(z\overline{z}) = \frac{q+1}{q}\varphi_r(z) J_{[r]}(z). \tag{2}$$

## 2. Свойства функции $J_s(z)$

Непосредственно из определения следует, что для $z \in \mathbb{F}(\tau)$ и $s = 0, 1, \dots, q$

$$\sum_{z \in \mathbb{F}(\tau)} J_s(z) = 0; \quad J_s(-z) = (-1)^s J_s(z), \quad p \ne 2,$$

$$\overline{J}_s(z) = J_s(-\overline{z}); \quad J_{[-s]}(z) = J_s(\overline{z}).$$

Связь (2) и тождества для функции (1) из [4] порождают следующие тождества для функции $J_s(z)$.

**Предложение 2.1.** *Для* $[r] = 1, 2, \dots, q$

1. $\displaystyle\sum_{z\in\mathbb{F}^*(\tau)} \varphi_r(z\overline{z}^{-1}) J^2_{[r]}(z) = \frac{q^2}{q+1} \begin{cases} (-1)^{[r]}, & p \neq 2; \\ 1, & p = 2; \end{cases}$
2. $\displaystyle\sum_{z\in\mathbb{F}^*(\tau)} \varphi_r(z\overline{z}^{-1}) J_{[r]}(tz) J_{[r]}(z) = 0, \quad N(t) \neq 1;$
3. $\displaystyle\sum_{z\in\mathbb{F}^*(\tau)} \varphi_r(z\overline{z}^{-1}) \chi(z\overline{z}) J_{[r]}(xz) J_{[r]}(yz) = -q\chi(-x\overline{x} - y\overline{y}) J_{[r]}(xy) \begin{cases} (-1)^{[r]}, & p \neq 2; \\ 1, & p = 2. \end{cases}$

Дополнительные свойства функции $J_s(z)$ будут получены методом теории представлений групп [7].

## 3. Матричные элементы

Движением плоскости $\mathbb{F}(\tau)$ будем называть биекции типа $w = hz + a$, где $a \in \mathbb{F}(\tau)$ задает перенос, а $h = \alpha + \tau\beta$ при $N(h) = 1$ задает вращение.

Приведем необходимые сведения о группе $G$ всех таких движений плоскости. Группа $G$ является полупрямым произведением $\mathbb{F}(\tau) \rtimes C$ коммутативного нормального делителя $\mathbb{F}(\tau)$ переносов и циклической группы $C$ вращений. Она отождествляется с группой матриц

$$g(h, a) = \begin{pmatrix} h & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad h \in C; \quad a \in \mathbb{F}(\tau).$$

Таким образом, порядок группы $G$ равен $|G| = q^2(q+1)$.

Подгруппа $C$ группы $G$ действует на окружности $C_u$, $u \in \mathbb{F}^*$, транзитивно и на $\mathbb{F}(\tau)$ самосопряженно относительно скалярного произведения $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Неприводимые представления группы $G$ строятся в соответствии с общей теорией Макки (напр., [9], с. 63).

Обозначим через $\Phi = \{f \mid f : C \to \mathbb{C}\}$ пространство комплекснозначных функций на окружности $C$. Неприводимое представление $T(g) : \Phi \to \Phi$ действует по формуле

$$T(g(h, a)) f(z) = \chi(\langle z, a\rangle) f(hz).$$

Указанное представление интересно, поскольку его матричные элементы в базисе из характеров на $C$ имеют вид

$$t_{nm}(g) = \pi_m(h) J_{[m-n]}(a), \tag{3}$$

где $0 \leq n, m \leq q$, $h \in C$; $\pi$ — мультипликативный характер на $C$.

Равенство (3) является основным для вывода свойств бесселевой функции $J_s(z)$.

## 4. Дополнительные свойства

В этом пункте приведем дополнительные свойства функции $J_s(z)$ (теоремы сложения, умножения, формулу Хансена и др.), вытекающие из теории представлений. Обозначим дельта-функцию через $\delta$.

**Предложение 4.1.** $J_s(0) = \delta(s)$.

**Предложение 4.2.** $\displaystyle\sum_{z\in\mathbb{F}(\tau)} J_0^2(z) = \frac{q^2}{q+1}.$

**Предложение 4.3** (теорема сложения).

$$J_s(z_1 + hz_2) = \sum_{j=0}^{q} \pi_{[j-s]}(h) J_j(z_1) J_{[s-j]}(z_2),$$

*где* $z_1, z_2 \in \mathbb{F}(\tau)$ *и* $h \in C$.

**Следствие 4.1.**

$$J_s(z_1 + z_2) = \sum_{j=0}^{q} J_j(z_1) J_{[s-j]}(z_2); \quad J_s(hz) = \overline{\pi}_s(h) J_s(z);$$

$$J_0(z_1 + hz_2) = \sum_{j=0}^{q} \pi_j(h) J_j(z_1) J_j(\overline{z}_2); \quad J_0(z_1 + z_2) = \sum_{j=0}^{q} J_j(z_1) J_j(\overline{z}_2),$$

где $z_1, z_2 \in \mathbb{F}(\tau)$ и $h \in C$.

**Предложение 4.4** (формула Хансена).

$$\sum_{j=0}^{q} (-1)^j J_j(z) J_{[s-j]}(z) = \delta(s), \quad p \neq 2;$$

$$\sum_{j=0}^{q} J_j(z) J_{[s-j]}(z) = \delta(s), \quad p = 2.$$

**Предложение 4.5** (теорема умножения).

$$\frac{1}{q+1} \sum_{h, N(h)=1} J_s(z_1 + hz_2) = J_s(z_1) J_0(z_2).$$

**Следствие 4.2.**

$$\frac{1}{q+1} \sum_{h, N(h)=1} J_s(hz) = J_0(z)\delta(s).$$

**Замечание.** Равенства п. 2, а также предложения 4.1–4.5 могут быть использованы для нахождения свойств функции $j_r(u)$, например, аналогом предложения 4.3 является равенство

$$\overline{\varphi}_r(z) j_r(z\overline{z}) = \frac{q}{q+1} \sum_{n=0}^{q} \varphi_{n-r}(hz_2) \overline{\varphi}_n(z_1) j_n(z_1\overline{z}_1) j_{r-n}(z_2\overline{z}_2),$$

где $z = z_1 + hz_2$ и $\varphi$ — мультипликативный характер на $\mathbb{F}^*(\tau)$.

## 5. Ограничение функции Бесселя на поле $\mathbb{F}$

На основе свойств функции $J_s(z)$, определенной на расширении $\mathbb{F}(\tau)$ (см. пп. 2, 4), дадим список соответствующих равенств для функции Бесселя $J_s(x)$, определенной на исходном поле $\mathbb{F}$.

**Предложение 5.1.**

$$\sum_{x\in\mathbb{F}} J_s(x)=0;\quad J_s(-x)=(-1)^s J_s(x),\quad p\neq 2;$$

$$\overline{J}_s(x)=J_s(-x);\quad J_{[-s]}(x)=J_s(x);\quad J_s(0)=\delta(s).$$

$$J_s(x_1+x_2)=\sum_{j=0}^{q} J_j(x_1)J_{[s-j]}(x_2);$$

$$\sum_{j=0}^{q}(-1)^j J_j(x)J_{[s-j]}(x)=\delta(s),\quad p\neq 2;$$

$$\sum_{j=0}^{q} J_j(x)J_{[s-j]}(x)=\delta(s),\quad p=2.$$

**Предложение 5.2.**

$$\sum_{x\in\mathbb{F}} J_0^2(x)=\begin{cases}2q^2(q+1)^{-2}, & p\neq 2;\\ q(2q+1)(q+1)^{-2}, & p=2.\end{cases}$$

Автор благодарен Е.Е. Петрову и В.П. Лексину за полезные советы и критические замечания.

## Литература


1. Evans J. *Hermite character sums* // Pacific J. of Math. – 1986. – V. 122. – № 2. – P. 375–390.
2. Greene J. *Hypergeometric functions over finite fields* // Trans. Amer. Math. Soc. – 1987. – V. 301. – № 1. – P. 77–101.
3. Гельфанд С.И. *Представление полной линейной группы над конечным полем* // Матем. сб. – 1970. – Т. 83. – № 9. – С. 15–41.
4. Piatetski-Shapiro J. *Complex representation of $GL(2,k)$ for finite fields $k$* // Contemp. Math. – 1987. – V. 16. – P. 1–71.
5. Vigneras M.-F. *Representations modulaires de $GL(2,F)$ en caracteristique $l$, $F$ corps fini de caracteristique $p\neq l$* // C.R. Acad. Sci., Paris. – 1998. – T. 306. – Ser. I. – P. 451–454.
6. Soto-Andrade J. *Geometrical Gel'fand models, tensor quotients and Weil representation* // Proc. Symp. Pure Math. – 1987. – V. 48. – P. 305–316.
7. Виленкин Н.Я. *Специальные функции и теория представлений групп.* – М.: Наука, 1965. – 588 с.
8. Лидл Р., Нидеррайтер Г. *Конечные поля.* Т. 1. – М.: Наука, 1988. – 428 с.
9. Серр Ж.-П. *Линейные представления конечных групп.* – М.: Мир, 1970. – 132 с.


*Коломенский педагогический институт*

*Поступила*
17.08.1998