ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2001 МАТЕМАТИКА № 2 (465)

УДК 517.544

В.В. КОЖЕВНИКОВ

О ПАРАМЕТРИЧЕСКОМ ПРЕДСТАВЛЕНИИ КОМПОЗИЦИОННЫХ МНОЖИТЕЛЕЙ В ТЕОРЕМЕ О ФАКТОРИЗАЦИИ

1. Пусть Γ обозначает некоторое ограниченное замкнутое подмножество w-плоскости. Под $\Sigma(\Gamma)$ условимся понимать класс мероморфных и однолистных в дополнении ко множеству Γ функций, имеющих в окрестности бесконечно удаленной точки разложение

$$T(w) = w + a_0 + \frac{a_1}{w} + \frac{a_2}{w^2} + \cdots ;$$

здесь многоточием обозначены члены, содержащие более высокие степени $1/w$.

Известна

Теорема 1 (о факторизации). *Пусть функция $w = w(z)$, регулярная и однолистная в кольце $r < |z| < R$, конформно отображает это кольцо на двусвязную область D, дополнение к которой до всей w-плоскости состоит из двух непересекающихся компонент: ограниченного континуума Γ и неограниченного континуума B. Пусть континуум Γ соответствует при этом внутренней граничной компоненте $|z| = r$ кольца $r < |z| < R$ в том смысле, что при стремлении точки z кольца к его внутренней граничной компоненте точка $w = w(z)$ области D стремится к континууму Γ.*

Тогда существует единственная функция $T_w(w)$ из класса $\Sigma(\Gamma)$ такая, что композиция $\Phi_w(z) = T_w \circ w(z)$, определенная в кольце $r < |z| < R$, аналитически продолжается в полный круг $|z| < R$, $\Phi_w(0) = 0$, и является в этом круге регулярной и однолистной функцией.

Впервые теорема о факторизации, и притом в более общей форме, была установлена В.Д. Ерохиным [1], [2]. Эта теорема возникла из потребностей теории аппроксимации. Позднее идеи, высказанные В.Д. Ерохиным, получили развитие в работах других авторов [3]–[5].

Теорема о факторизации, являясь типичной теоремой существования, не позволяет строить функции $T_w(w)$ и $\Phi_w(z)$. Для получения конструктивного варианта этой теоремы можно использовать различные подходы. В предлагаемой работе используется подход в духе параметрического метода Левнера [6].

Пусть, как и выше, регулярная функция $w = w(z)$ конформно отображает кольцо $r < |z| < R$ на двусвязную область D.

Определение. Однозначную функцию $v = v(w, \tau)$ комплексной переменной $w \in D$ и вещественной переменной τ, $0 < \tau < \tau^*$, условимся называть однолистной вариацией функции $w = w(z)$, если

а) при каждом значении τ, $0 < \tau < \tau^*$, $v(w, \tau)$ как функция переменной w однолистна в области D;

б) на любом замкнутом подмножестве F области D для функции $v = v(w, \tau)$ выполняется равномерная [1] оценка

$$v(w, \tau) = w + o(1), \quad \tau \to 0+; \tag{1}$$

[1] Имеется в виду, что при $\tau \to 0+$ бесконечно малая $o(1)$, входящая в остаточный член формулы (1), равномерно по переменной w стремится к нулю на выбранном замкнутом подмножестве F области D.

здесь $o(1)$ — бесконечно малая при $\tau \to 0+$ функция переменных $w \in D$ и τ, $0 < \tau < \tau^*$.

Предположим, что $v(w, \tau)$, $0 < \tau < \tau^*$, — какая-либо однолистная вариация функции $w(z)$, регулярная в области D. При любом значении τ, $0 < \tau < \tau^*$, композиция

$$v(z) = v(w(z), \tau)$$

регулярна и однолистна в кольце $r < |z| < R$. Обозначим через D_v конформный образ кольца $r < |z| < R$ при отображении $v = v(z)$. Очевидно, D_v — двусвязная область, одна из двух связных компонент Γ_v дополнения которой до всей плоскости ограничена, а другая — B_v неограничена. Ввиду (1) при достаточно малых τ, $0 < \tau < \tau^*$, континуум Γ_v соответствует граничной компоненте $|z| = r$ кольца $r < |z| < R$.

По теореме о факторизации для функции $v(z)$ при любом τ, $0 < \tau < \tau^*$, найдется единственная функция $T_v(v)$ из класса $\Sigma(\Gamma_v)$, для которой композиция $\Phi_v(v) = T_v \circ v(z)$, определенная в кольце $r < |z| < R$, аналитически продолжается в полный круг $|z| < R$, $\Phi_v(0) = 0$, и является в этом круге регулярной и однолистной функцией.

Выберем произвольную замкнутую кривую Жордана γ, лежащую в области D значений функции $w = w(z)$ и разделяющую граничные континуумы области D. Заметим, что при достаточно малых значениях τ, $0 < \tau < \tau^*$, кривая γ будет разделять также и граничные континуумы области D_v. В дальнейшем ограничимся предположением, что $0 < \tau < \tau^*$.

Следующая теорема является лишь небольшой модификацией соответствующего результата из работы [7].

Теорема 2. *Пусть значение $s = w(\zeta)$ не выходит за пределы замкнутого множества, расположенного внутри кривой γ. Тогда при $\tau \to 0+$ имеет место равномерная оценка*

$$\ln \frac{\Phi_v(\zeta)}{\Phi_w(\zeta)} = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{{T'_w}^2(w)(v - w)}{T_w(w)(T_w(w) - \Phi_w(\zeta))} dw + o(\|v - w\|), \tag{2}$$

где под $v = v(w, \tau)$ понимается однолистная вариация функции $w(z)$ вида (1), а $\|\cdot\|$ обозначает норму в пространстве $C(\gamma)$ функций, непрерывных на кривой γ.

Аналогично, при $\tau \to 0+$ имеет место равномерная оценка

$$\ln \frac{T_v(s)}{T_w(s)} = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{{T'_w}^2(w)(v - w)}{T_w(w)(T_w(w) - T_w(s))} dw + o(\|v - w\|), \tag{3}$$

где, как и выше, $v = v(w, \tau)$ — вариация вида (1), но точка s принадлежит замкнутому множеству из внешности кривой γ.

Формулы (2), (3) суть исходные вариационные формулы, предназначенные для получения параметрического варианта теоремы о факторизации.

2. Рассмотрим двусвязную область, представляющую собой единичный круг $|w| < 1$ с разрезом вдоль кусочно-жордановой кривой Γ, в составе которой нет замкнутых участков. Будем считать, что начало координат $w = 0$ принадлежит кривой Γ. Пусть кривая Γ задана параметрически: $g = g(\tau)$, $0 \le \tau < +\infty$; здесь $g(\tau)$ — полунепрерывная справа функция вещественного параметра τ, имеющая конечное число точек разрыва первого рода и устанавливающая взаимно однозначное соответствие между значениями параметра τ из промежутка $[0, +\infty)$ и точками кривой Γ. При возрастании параметра τ от нуля до плюс бесконечности точка $g = g(\tau)$ последовательно пробегает все дуги кривой Γ, начиная с какого-либо ее конца и заканчивая в пределе точкой $w = 0$ и притом так, что в каждый момент еще не описанная часть кривой Γ оказывается связной.

Каждому значению t параметра τ, $0 \le t < +\infty$, сопоставим функцию $w = w(z, t)$, конформно отображающую подходящее кольцо $\delta_t < |z| < 1$ на область Левнера, представляющую собой круг $|w| < 1$ с разрезом по той части Γ_t кривой Γ, которая соответствует промежутку $[t, +\infty)$

параметра τ. При этом мы предполагаем, что граничному континууму $|z| = 1$ соответствует граничный континуум $|w| = 1$. По принципу симметрии функцию $w(z,t)$ можно аналитически продолжить в кольцо $\delta_t < |z| < 1/\delta_t$. Это кольцо конформно отображается функцией $w(z,t)$ на двусвязную область D_t, ограниченную двумя кусочно-жордановыми кривыми: кривой Γ_t и симметричной ей относительно окружности $|w| = 1$ кривой Γ_t^*. Распорядившись поворотами в z-плоскости, можно добиться, чтобы при каждом значении t

$$w(1,t) = 1. \tag{4}$$

При условии (4) функция $w(z,t)$, конформно отображающая кольцо $\delta_t < |z| < 1/\delta_t$ на область D_t, определяется однозначно.

При увеличении t от нуля до плюс бесконечности δ_t монотонно и непрерывно убывает от некоторого значения δ_0, $0 < \delta_0 < 1$, до нуля. Подберем параметр τ так, чтобы $\delta_t = \delta_0 e^{-t}$, $0 \le t < +\infty$.

В соответствии с теоремой о факторизации для функции $w(z,t)$ при любом t, $0 < t < +\infty$, существует единственная функция $\widehat{T}(w,t)$ из класса $\Sigma(\Gamma_t)$ такая, что композиция $\Phi(z,t) = \widehat{T}(w(z,t),t)$, определенная в кольце $\delta_t < |z| < 1/\delta_t$, аналитически продолжается в полный круг $|z| < 1/\delta_t$, $\Phi(0,t) = 0$, и является в этом круге регулярной и однолистной функцией.

Поскольку при $t \to +\infty$ кривая Γ_t стягивается в точку $w = 0$, имеем предельные соотношения

$$\lim_{t\to+\infty} w(z,t) \equiv z, \quad \lim_{t\to+\infty} \widehat{T}(w,t) \equiv w, \quad \lim_{t\to+\infty} \Phi(z,t) \equiv z. \tag{5}$$

Наряду с функцией $w(z,t)$ введем также функцию $\omega(z,t) = w^{-1}(w(z,0),t)$, конформно отображающую кольцо $\delta_0 < |z| < 1$ на кольцо $\delta_t < |\omega| < 1$ с разрезами вдоль некоторого числа кусочно-жордановых кривых, одним концом примыкающих к окружности $|\omega| = \delta_t$, и так, что окружности $|z| = 1$ соответствует окружность $|\omega| = 1$. В силу (4) $\omega(z,t)$ удовлетворяет условию нормировки $\omega(1,t) = 1$. По принципу симметрии функцию $\omega(z,t)$ можно аналитически продолжить в кольцо $\delta_0 < |z| < 1/\delta_0$. Обозначим через Δ_t конформный образ кольца $\delta_0 < |z| < 1/\delta_0$ при отображении функцией $\omega(z,t)$. Δ_t представляет собой двусвязную область, дополнение к которой состоит из двух континуумов: некоторого ограниченного континуума Υ_t и симметричного ему относительно окружности $|\omega| = 1$ неограниченного континуума Υ_t^*.

По теореме о факторизации для функции $\omega(z,t)$ при любом значении t, $0 < t < +\infty$, существует единственная функция $T(\omega,t)$ из класса $\Sigma(\Upsilon_t)$, для которой композиция $\widehat{\Phi}(z,t) = T(\omega(z,t),t)$, определенная в кольце $\delta_0 < |z| < 1/\delta_0$, аналитически продолжается в полный круг $|z| < 1/\delta_0$, $\widehat{\Phi}(0,t) = 0$, и является в этом круге регулярной и однолистной функцией. Очевидно, в силу (5) $\omega(z,0) \equiv z$, $T(\omega,0) \equiv \omega$, $\widehat{\Phi}(z,0) \equiv z$.

Исходя из известных результатов о параметрическом продолжении однолистных функций, можно показать, что функции $T(\omega,t)$ и $\Phi(z,t)$ удовлетворяют некоторым интегродифференциальным уравнениям. Эти уравнения связаны с уравнением Голузина–Комацу, решением которого является функция $\omega(z,t)$ [8].

Запишем ядро Вилля

$$K_\delta(\lambda) = \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=-N}^{+N} \frac{1+\delta^{2n}\lambda}{1-\delta^{2n}\lambda}.$$

Теорема 3. *При любом фиксированном z из круга $|z| < 1/\delta_0$ функция $\Phi(z,t)$, $0 < t < +\infty$, является решением интегродифференциального уравнения*

$$\frac{\partial \ln \Phi(z,t)}{\partial t} = \frac{1}{2\pi i} \int_\beta \frac{\Phi'^2(\xi,t)\xi}{\Phi(\xi,t)(\Phi(\xi,t)-\Phi(z,t))} (K_{\delta_t}(\tfrac{z_t}{\xi}) - K_{\delta_t}(z_t))\, d\xi, \tag{6}$$

удовлетворяющим условию

$$\lim_{t\to+\infty} \Phi(z,t) = z, \tag{7}$$

где β — произвольная замкнутая спрямляемая кривая Жордана, расположенная в кольце $\delta_0 < |z| < 1/\delta_0$ и охватывающая точку z; $z_t = \delta_t e^{i\theta(t)}$, $\delta_t = \delta_0 e^{-t}$, а вещественная функция $\theta(t)$ определена на промежутке $0 \le t < +\infty$, полунепрерывна справа и имеет лишь конечное число точек разрыва первого рода.

Доказательство. Пусть t, t' — два различных значения параметра τ из промежутка $[0, +\infty)$. Предполагаем значение t фиксированным, а t' — переменным. При сделанных предположениях в отношении свойств кривой Γ функция $w(z,t)$ при любом фиксированном z из кольца $\delta_t < |z| < 1/\delta_t$ дифференцируема по параметру t на промежутке $(0, +\infty)$, а ее производная $\partial w/\partial t$ регулярна в кольце $\delta_t < |z| < 1/\delta_t$ [8]. Поэтому внутри кольца $\delta_t < |z| < 1/\delta_t$ имеем равномерную оценку

$$w(z,t') = w(z,t) + (t'-t)\frac{\partial w}{\partial t}(z,t) + o(t'-t). \tag{8}$$

В новых обозначениях $v = w(z,t')$, $w = w(z,t)$ формула (8) перепишется так:

$$v = w + (t'-t)\frac{\partial w}{\partial t} + o(t'-t), \quad t' \to t. \tag{9}$$

Отсюда, в частности, следует

$$v = w + o(1), \quad t' \to t, \tag{10}$$

причем оценка (10) является равномерной внутри кольца $\delta_t < |z| < 1/\delta_t$. Функцию (8) можно рассматривать как композицию функции $w = w(z,t)$ и ее однолистной вариации

$$v(w,t,t') = w(z(w,t),t'), \tag{11}$$

$z(w,t)$ — функция, обратная к функции $w(z,t)$. То обстоятельство, что функцию (11) можно квалифицировать как вариацию, следует из оценки (10).[1]

Воспользуемся вариационной формулой (2). Для этого из уравнения (9) найдем разность $v - w$ и подставим ее в (2). Роли функций $\Phi_w(z)$ и $\Phi_v(z)$ будут при этом играть соответственно функции $\Phi(z,t)$ и $\Phi(z,t')$. После деления на $t'-t$ и перехода к пределу при $t' \to t$ получим уравнение

$$\frac{\partial \ln \Phi(z,t)}{\partial t} = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{T'^2(w,t)}{T(w,t)(T(w,t)-\Phi(z,t))}\,\frac{\partial w}{\partial t}\,dw. \tag{12}$$

Напомним, что точка $s = w(z,t)$ должна охватываться кривой γ. Теперь под знаком интеграла (12) перейдем к новой переменной ξ по формуле $w = w(\xi,t)$. Поскольку $T'(w,t)w'(\xi,t) = \Phi'(\xi,t)$, то уравнение (12) можно привести к виду

$$\frac{\partial \ln \Phi(z,t)}{\partial t} = \frac{1}{2\pi i}\int_\beta \frac{\Phi'^2(\xi,t)}{\Phi(\xi,t)(\Phi(\xi,t)-\Phi(z,t))}\,\frac{w'_t(\xi,t)}{w'_\xi(\xi,t)}\,d\xi.$$

В этом выражении β — замкнутая спрямляемая кривая Жордана, разделяющая граничные компоненты кольца $\delta_t < |z| < 1/\delta_t$ и охватывающая точку z. Наконец, если воспользоваться уравнением Голузина–Комацу для функции $w(\xi,t)$, придем к уравнению (6) для функции $\Phi(z,t)$.

Тем самым доказано, что функция $\Phi(z,t)$ удовлетворяет интегродифференциальному уравнению (2). Соотношение (7) для функции $\Phi(z,t)$ вытекает из формул (5). □

[1]Отметим, что хотя при $t' < t$ функция $v(w,t,t')$ определена лишь в некоторой подобласти области D_t, но это не нарушает смысла оценки (10) при $t' \to t$.

Теорема 4. *При любом фиксированном ω из дополнения к континууму $\Upsilon_{t=0}$ функция $T(\omega,t)$, $0<t<+\infty$, является решением интегродифференциального уравнения*

$$\frac{\partial \ln T(\omega,t)}{\partial t}=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{T'^2(\xi,t)\xi}{T(\xi,t)(T(\xi,t)-T(\omega,t))}(K_{\delta_t}(\tfrac{\omega_t}{\xi})-K_{\delta_t}(\omega_t))\,d\xi,$$

удовлетворяющим начальному условию $T(\omega,0)=\omega$, где γ — произвольная замкнутая, спрямляемая кривая Жордана, расположенная в области $\Delta_{t=0}$, разделяющая ее граничные компоненты и содержащая точку ω в своей внешности; $\omega_t=\delta_t e^{i\psi(t)}$, $\psi(t)$ — вещественная, полунепрерывная справа функция, определенная на промежутке $0\le t<+\infty$ и имеющая конечное число разрывов только первого рода.

Доказательство. Вновь выберем два произвольных значения t, t' из промежутка $[0,+\infty)$. Как и прежде, значение t будем считать фиксированным, а t' — переменным. Функция $\omega(z,t)$ при любом фиксированном z из кольца $\delta_0<|z|<1/\delta_0$ дифференцируема по параметру t на промежутке $(0,+\infty)$, а ее производная $\partial\omega/\partial t$ регулярна в кольце $\delta_0<|z|<1/\delta_0$ [8]. Следовательно, внутри кольца $\delta_0<|z|<1/\delta_0$ для этой функции имеем равномерную оценку

$$\omega(z,t')=\omega(z,t)+\frac{\partial\omega}{\partial t}(z,t)(t'-t)+o(t'-t),\quad t'\to t. \tag{13}$$

Положим $\nu=\omega(z,t')$, $\omega=\omega(z,t)$. В новых обозначениях (13) перепишется следующим образом:

$$\nu=\omega+\frac{\partial\omega}{\partial t}(t'-t)+o(t'-t). \tag{14}$$

В частности, внутри кольца $\delta_0<|z|<1/\delta_0$ выполняется равномерная оценка $\nu=\omega+o(1)$, $t'\to t$. Функцию (13) можно рассматривать как композицию функции $\omega(z,t)$ и ее однолистной вариации $\nu(\omega,t,t')=\omega(z(\omega,t),t')$; здесь $z(\omega,t)$ — функция, обратная к $\omega(z,t)$.

Теперь воспользуемся вариационной формулой (3). Для этого из уравнения (14) найдем разность $\nu-\omega$ и подставим ее в (3). Роль функций $T_w(w)$ и $T_w(v)$ будут при этом играть соответственно функции $T(\omega,t)$ и $T(\omega,t')$. После деления на $t-t'$ и перехода к пределу при $t'\to t$ получим уравнение

$$\frac{\partial \ln T(w,t)}{\partial t}=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{T'^2(\omega,t)}{T(\omega,t)(T(\omega,t)-T(w,t))}\,\frac{\partial\omega}{\partial t}\,d\omega; \tag{15}$$

здесь γ — произвольная замкнутая, спрямляемая кривая, лежащая в области Δ_t и разделяющая ее граничные компоненты. Уравнение (15) получено в предположении, что точка w лежит вне кривой γ.

Воспользуемся уравнением Голузина–Комацу для функции $\omega(z,t)$. В итоге приходим к искомому дифференциальному уравнению для функции $T(w,t)$. □

В заключение мне хочется высказать слова благодарности моему прежнему, безвременно ушедшему из жизни руководителю, профессору И.П. Митюку, а также слова признательности моему нынешнему руководителю, доценту Б.Е. Левицкому за неизменное внимание к моей научной работе.

Литература

1. Ерохин В.Д. *О конформных преобразованиях колец и об основном базисе пространства функций, аналитических в элементарной окрестности континуума* // ДАН СССР. – 1958. – Т. 120. – № 4. – С. 689–692.
2. Ерохин В.Д. *К теории конформных и квазиконформных отображений многосвязных областей* // ДАН СССР. – 1959. – Т. 127. – № 6. – С. 1155–1157.
3. Hübner O. *Die Faktorisierung konformer Abbildungen und Anwendungen* // Math. Zeitschr. – 1966. – Bd. 92, H. 2. – S. 95–109.

4. Landau H.J. *On canonical conformal maps of multiply connected domains* // Trans. Amer. Math. Soc. – 1961. – V. 99. – № 1. – P. 1–20.
5. Гельфер С.А. *О распространении вариационного метода Голузина–Шиффера на многосвязные области* // ДАН СССР. – 1962. – Т. 142. – № 3. – С. 503–506.
6. Löwner K. *Untersuchungen über schlichte konforme Abbildungen des Einheitskreises* // Math. Ann. – 1923. – Bd. 89. – S. 103–121.
7. Кожевников В.В. *Вариационные формулы для композиционных сомножителей из теоремы В.Д. Ерохина о факторизации* // Кубанск. ун-т. – Краснодар, 1999. – 6 с. – Деп. в ВИНИТИ 12.08.99, № 2637–В99.
8. Голузин Г.М. *О параметрическом представлении функций, однолистных в кольце* // Матем. сб. – 1951. – Т. 29. – № 2. – С. 469–476.

Кубанский государственный университет

Поступили
первый вариант 14.04.1995
окончательный вариант 21.02.2000