ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2003 МАТЕМАТИКА № 4 (491)

УДК 517.977

А.Г. ИВАНОВ

К ВОПРОСУ ОБ ОПТИМАЛЬНОМ УПРАВЛЕНИИ ПОЧТИ ПЕРИОДИЧЕСКИМИ ДВИЖЕНИЯМИ

В ряде задач оптимального управления (напр., [1], [2] и приведенная там библиография) учитываются одновременно геометрические ограничения на управление и смешанные ограничения, имеющие большое прикладное значение. В задачах же оптимального управления периодическими движениями, как отмечено, например, в [3], [4], для приложений представляют интерес уже управления вида $(q, u(\cdot))$, где q принадлежит заданному множеству $Q \subset \mathbb{R}^k$, а $u : \mathbb{R} \to \mathfrak{U}$, $\mathfrak{U} \in \mathrm{comp}(\mathbb{R}^m)$, — это измеримая ω-периодическая функция. В данной статье продолжены исследования, начатые в [5]. Приводятся необходимые условия экстремума для почти периодической (п. п.) задачи оптимального управления, в которой в качестве допустимых управлений рассматриваются пары $(v(\cdot), u(\cdot))$, где $v(\cdot)$ принадлежит заданному подмножеству $\mathfrak{S}$ пространства $B(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ п. п. по Бору функций, а $u(\cdot)$ — множеству $S(\mathbb{R}, \mathfrak{U})$ п. п. по Степанову функций. Эти условия выводятся из соответствующих необходимых условий для овыпукленной к исходной задачи, в которой множество $S(\mathbb{R}, \mathfrak{U})$ расширено до мерозначных п. п. отображений.

1. Основные определения и обозначения

Пусть $\mathbb{R}^n$ — n-мерное евклидово пространство с нормой $|\cdot|$, $\overline{\mathrm{orb}}(\varphi)$ — замыкание (в $\mathbb{R}^n$) орбиты функции $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ и $\mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ — пространство линейных операторов $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ ($\mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n) = \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$) с нормой $|L| = \max\limits_{|x|\le 1} |Lx|$. Обозначим далее через $B(\mathbb{R}, \mathfrak{Y})$ и $S(\mathbb{R}, \mathfrak{Y})$ ($\mathfrak{Y} \subset \mathbb{R}^n$) совокупность отображений $f : \mathbb{R} \to \mathfrak{Y}$, которые п. п. в смысле Бора и соответственно в смысле Степанова относительно метрики $d(f, g) = \sup\limits_{t\in\mathbb{R}} \int\limits_t^{t+1} |f(s) - g(s)|ds$, $f, g \in L_1^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}, \mathfrak{Y})$ [6]. Напомним, что для каждой п. п. функции f (как по Бору, так и по Степанову) существует среднее $M\{f(t)\} = \lim\limits_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int\limits_0^T f(t)dt$. Теперь, если $(\mathfrak{X}, \rho)$ — компактное метрическое пространство, то через $B(\mathbb{R} \times \mathfrak{X}, \mathfrak{Y})$ обозначим совокупность непрерывных отображений

$$(t, x) \mapsto f(t, x) \in \mathfrak{Y}, \quad (t, x) \in \mathbb{R} \times \mathfrak{X}, \tag{1.1}$$

которые п. п. по $t \in \mathbb{R}$ в смысле Бора равномерно по $x \in \mathfrak{X}$ [7]. Всюду далее каждую функцию из $L_1^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}, C(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}))$ представляем в виде отображения (1.1) и через $S(\mathbb{R}, C(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}))$ обозначим подмножество из $L_1^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}, C(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}))$ таких функций вида (1.1), что для любого $\varepsilon > 0$ множество $\Big\{\tau \in \mathbb{R} : \sup\limits_{t\in\mathbb{R}} \int\limits_t^{t+1} \max\limits_{x\in\mathfrak{X}} |f(s+\tau, x) - f(s, x)|ds < \varepsilon\Big\}$ относительно плотно.

Будем говорить, что функция f из $L_1^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}, C(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}))$ удовлетворяет *условию* A), если для всякого $\varsigma > 0$ выполняется равенство $\lim\limits_{\gamma\downarrow 0} \sup\limits_{t\in\mathbb{R}} \mathrm{mes}\{s \in [t, t+1] : w_\gamma[f(s, \cdot), \mathfrak{X}] \ge \varsigma\} = 0$, где mes — мера Лебега на $\mathbb{R}$ и $w_\gamma[f(s, \cdot), \mathfrak{X}]$ — γ-колебание на $\mathfrak{X}$ непрерывной функции $x \mapsto f(s, x)$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Конкурсного центра Министерства образования Российской Федерации, грант Е00-1.0-5.

Лемма 1.1 ([8]). *Имеют место следующие утверждения*:

1) *для того чтобы функция* f *из* $L_1^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}, C(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}))$ *принадлежала* $S(\mathbb{R}, C(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}))$, *необходимо, а в случае, если* $\sup\limits_{(t,x)\in\mathbb{R}\times\mathfrak{X}} |f(t,x)| < \infty$, *то и достаточно, чтобы она удовлетворяла условию* A) *и* $f(\cdot, x) \in S(\mathbb{R}, \mathfrak{Y})$ *при каждом* $x \in \mathfrak{X}$;

2) *если* $f \in S(\mathbb{R}, C(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}))$, *то* $\lim\limits_{\gamma\downarrow 0} \sup\limits_{t\in\mathbb{R}} \int\limits_t^{t+1} w_\gamma[f(s,\cdot), \mathfrak{X}]ds = 0$.

Определение 1.1. Отображение (1.1) называется п. п. по $t \in \mathbb{R}$ в смысле Степанова равномерно по $x \in \mathfrak{X}$ (это условие запишем в виде $f \in S(\mathbb{R} \times \mathfrak{X}, \mathfrak{Y})$), если оно удовлетворяет одновременно следующим условиям: $f(\cdot, x) \in S(\mathbb{R}, \mathfrak{Y})$ и $\lim\limits_{\gamma\downarrow 0} \mathfrak{d}_\gamma[f, \mathfrak{X}] = 0$ при каждом $x \in \mathfrak{X}$, где

$$\mathfrak{d}_\gamma[f, \mathfrak{X}] = \sup\{d(f(\cdot, x_1), f(\cdot, x_2)),\ x_1, x_2 \in \mathfrak{X},\ \rho(x_1, x_2) \le \gamma\}.$$

Определим мерозначные п. п. функции[1]. С этой целью обозначим через $(\mathrm{frm}(\mathfrak{U}), |\cdot|_w)$ [9] нормированное пространство таких мер Радона на $\mathbb{R}^m$, носитель которых содержится в $\mathfrak{U} \in \mathrm{comp}(\mathbb{R}^m)$, и через $\mathrm{rpm}(\mathfrak{U})$ обозначим его подмножество, состоящее из вероятностных мер Радона. В дальнейшем $\mathrm{DIR}(\mathfrak{U})$ — совокупность мер Дирака δ_u, сосредоточенных в точках $u \in \mathfrak{U}$, и через $\mathcal{M} = \mathcal{M}(\mathbb{R}, \mathrm{frm}(\mathfrak{U}))$ обозначим совокупность таких измеримых отображений $\mu : \mathbb{R} \to (\mathrm{frm}(\mathfrak{U}), |\cdot|_w)$, что $\|\mu\| = \operatorname*{ess\,sup}\limits_{t\in\mathbb{R}} |\mu(t)|(\mathfrak{U}) < \infty$ ($|\mu(t)|(\mathfrak{U})$ — вариация меры $\mu(t)$). Пусть далее $\mathfrak{V}_n = \mathfrak{V}_n(\mathbb{R}\times\mathfrak{U}, \mathbb{R}^n)$ — совокупность отображений $\varphi : \mathbb{R}\times\mathfrak{U} \to \mathbb{R}^n$, удовлетворяющих следующим условиям: $\varphi(t, \cdot) \in C(\mathfrak{U}, \mathbb{R}^n)$ при п. в. $t \in \mathbb{R}$, для каждого $u \in \mathfrak{U}$ отображение $t \mapsto \varphi(t, u) \in \mathbb{R}^n$, $t \in R$, измеримо и существует такая функция $\psi_\varphi \in L_1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, что $\max\limits_{u\in\mathfrak{U}} |\varphi(t, u)| \le \psi_\varphi(t)$ при п. в. $t \in \mathbb{R}$. В $\mathfrak{V}_n$ можно ввести норму $\|\cdot\|_{\mathfrak{V}_n}$ [14] и показать, что нормированное пространство $(\mathfrak{V}_n, \|\cdot\|_{\mathfrak{V}_n})$ сепарабельно и изометрически изоморфно $L_1(\mathbb{R}, C(\mathfrak{U}, \mathbb{R}^n))$. Кроме того, оказывается $\mathcal{M} \cong \mathfrak{V}_1^*$. Последнее позволяет [14] в $\mathcal{M}$ ввести норму $\|\cdot\|_w$, относительно которой множества $\mathcal{M}_1 = \mathcal{M}(\mathbb{R}, \mathrm{rpm}(\mathfrak{U}))$, $\Sigma_1 = \{\mu \in \mathcal{M} : \|\mu\| \le 1\}$ компактны, и если $\{\nu_j\}_{j=1}^\infty \subset \Sigma_1$, то $\lim\limits_{j\to\infty} \|\nu_j\|_w = 0$ в том и только том случае, если $\lim\limits_{j\to\infty} \int\limits_{\mathbb{R}} \langle \nu_j(s), \varphi(s, u)\rangle ds = 0$ для каждой функции $\varphi \in \mathfrak{V}_1$, где $\langle \nu_j(s), \varphi(s, u)\rangle = \int\limits_{\mathfrak{U}} \varphi(s, u)\nu_j(s)du$.

Определение 1.2. Отображение $\mu \in \mathcal{M}$ называется п. п. по Степанову, если для любой функции $c \in C(\mathfrak{U}, \mathbb{R})$ отображение $t \mapsto \langle \mu(t), c(u)\rangle = \int\limits_{\mathfrak{U}} c(u)\mu(t)du$ принадлежит пространству $S(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Совокупность всех п. п. по Степанову отображений из $\mathcal{M}$ обозначим APM и $\mathrm{APM}_1 = \mathrm{APM} \cap \mathcal{M}_1$. Далее, через $\mathrm{APM}_1^{(1)}$ обозначим совокупность таких $\mu \in \mathrm{APM}_1$, что $\mu(t) = \delta_{u(t)}$ при п. в. $t \in \mathbb{R}$ и некотором измеримом отображении $u : \mathbb{R} \to \mathfrak{U}$. Можно показать, что $S(\mathbb{R}, \mathfrak{U}) \cong \mathrm{APM}_1^{(1)}$ и, следовательно, каждое $u(\cdot) \in S(\mathbb{R}, \mathfrak{U})$ можно рассматривать и как элемент множества $\mathrm{APM}_1^{(1)} \subset \mathrm{APM}_1$, отождествляя его с отображением $t \mapsto \delta_{u(t)} \in \mathrm{DIR}(\mathfrak{U})$.

Определение 1.3. Отображение $(t, x) \mapsto \mu(t, x) \in \mathrm{rpm}(\mathfrak{U})$ называется п. п. по $t \in \mathbb{R}$ в смысле Степанова равномерно по $x \in \mathfrak{X}$ (этот факт будем записывать в виде $\mu \in S(\mathbb{R} \times \mathfrak{X}, \mathrm{rpm}(\mathfrak{U}))$), если для любой функции $c \in C(\mathfrak{U}, \mathbb{R})$ отображение $(t, x) \mapsto \langle \mu(t, x), c(u)\rangle = \int\limits_{\mathfrak{U}} c(u)\mu(t, x)du$ принадлежит пространству $S(\mathbb{R} \times \mathfrak{X}, \mathbb{R})$.

В [14] показано, что $u \in S(\mathbb{R} \times \mathfrak{X}, \mathfrak{U})$ в том и только том случае, если отображение $(t, x) \mapsto \delta_{u(t,x)}$ принадлежит пространству $S(\mathbb{R} \times \mathfrak{X}, \mathrm{rpm}(\mathfrak{U}))$.

[1] О важности процедуры расширения или овыпукления в задачах оптимального управления см., напр., [2], [9]–[11], а в игровых задачах [12], [13].

Пусть далее G — область в $\mathbb{R}^n$, дифференцируемое по x и v в каждой точке $(t,x,v,u) \in \mathbb{R} \times G \times \mathbb{R}^k \times \mathfrak{U}$ отображение $(t,x,v,u) \mapsto f(t,x,v,u) \in \mathbb{R}^n$ для любых $K \in \mathrm{comp}(\mathbb{R}^m)$ и $V \in \mathrm{comp}(\mathbb{R}^k)$ удовлетворяет следующим условиям:

1) $f \in B(\mathbb{R} \times K \times V \times \mathfrak{U}, \mathbb{R}^n)$,
2) $f'_x \in S(\mathbb{R}, C(K \times V \times \mathfrak{U}, \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n)))$,
3) измеримое отображение $t \mapsto \max\limits_{(x,v,u)\in K\times V\times\mathfrak{U}} |f'_x(t,x,v,u)|$, $t \in \mathbb{R}$, ограничено,
4) $f'_v \in S(\mathbb{R}, C(K \times V \times \mathfrak{U}, \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^n)))$.

Теорема 1.1 ([14]). *Пусть ограниченная функция $g \in S(\mathbb{R}, C(K \times \mathfrak{U}, \mathbb{R}^n))$, $K \in \mathrm{comp}(G)$. Тогда для любой функции $x(\cdot) \in S(\mathbb{R}, K)$ отображение $(t,u) \mapsto g(t,x(t),u)$ принадлежит пространству $S(\mathbb{R}, C(K\times\mathfrak{U}, \mathbb{R}^n))$, и если множество $\mathfrak{M} \subset \Sigma_1 \cap \mathrm{APM}$ равностепенно п. п.*[2]*, то совокупность отображений $\{t \mapsto \langle \mu(t), g(t,x(t),u)\rangle,\ \mu \in \mathfrak{M}\}$ принадлежит пространству $S(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ и является равностепенно п. п.*

Фиксируем теперь множество $\mathfrak{S} \subset B(\mathbb{R}, \mathbb{R}^k)$ и при $v(\cdot) \in \mathfrak{S}$ рассмотрим (см. теорему 1.1 и [15]) п. п. по Степанову систему дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = \langle \mu(t), f(t,x,v(t),u)\rangle = \int_{\mathfrak{U}} f(t,x,v(t),u)\mu(t)du, \quad (t,x) \in \mathbb{R} \times G, \quad \mu \in \mathrm{APM}_1, \tag{1.2}$$

для которой набор $(x(\cdot), v(\cdot), \mu(\cdot)) \in B(\mathbb{R}, G) \times \mathfrak{S} \times \mathrm{APM}_1$ называется допустимым, если $x(\cdot)$ — решение этой системы уравнений, отвечающее паре $(v(\cdot), \mu(\cdot))$ и такое, что $\overline{\mathrm{orb}}(x(\cdot)) \subset G$.

Совокупность всех допустимых наборов системы (1.2) обозначим через D_c и через D — совокупность наборов вида $(x(\cdot), v(\cdot), u(\cdot)) \in B(\mathbb{R}, G) \times \mathfrak{S} \times S(\mathbb{R}, \mathfrak{U})$ таких, что $(x(\cdot), v(\cdot), \delta_{u(\cdot)}) \in D_c$.

Пусть далее функция $f_0 : \mathbb{R}\times G\times\mathbb{R}^k\times\mathfrak{U} \to \mathbb{R}$ удовлетворяет условиям, аналогичным условиям 1), 2) и 4) для функции f. В силу теоремы 1.1 на D_c корректно определен функционал

$$(x(\cdot), v(\cdot), \mu(\cdot)) \mapsto \mathfrak{T}(x(\cdot), v(\cdot), \mu(\cdot)) = M\{\langle \mu(t), f_0(t,x(t),v(t),u)\rangle\}.$$

Теперь рассмотрим задачу

$$\mathfrak{T}(x(\cdot), v(\cdot), \mu(\cdot)) \to \inf, \quad (x(\cdot), v(\cdot), \mu(\cdot)) \in D_c, \tag{1.3}$$

для которой набор $(\widehat{x}(\cdot), \widehat{v}(\cdot), \widehat{\mu}(\cdot)) \in D_c$ называется решением, если $\mathfrak{T}(\widehat{x}(\cdot), \widehat{v}(\cdot), \widehat{\mu}(\cdot)) \le \mathfrak{T}(x(\cdot), v(\cdot), \mu(\cdot))$ для всех $(x(\cdot), v(\cdot), \mu(\cdot)) \in D_c$ и отображение

$$(t,x,v,\nu,p) \mapsto \mathbb{H}(t,x,v,\nu,p) = \int_{\mathfrak{U}} H(t,x,v,u,p)\nu du, \quad (t,x,v,\nu,p) \in \mathbb{R} \times G \times \mathbb{R}^k \times \mathrm{rpm}(\mathfrak{U}) \times \mathbb{R}^{n*},$$

где $H(t,x,v,u,p) = pf(t,x,v,u) - f_0(t,x,v,u)$, является функцией Понтрягина.

Замечание 1.1. Поскольку для каждого набора $(x(\cdot), v(\cdot), u(\cdot)) \in D$

$$\mathfrak{T}(x(\cdot), v(\cdot), \delta_{u(\cdot)}) = M\{f_0(t,x(t),v(t),u(t))\} \stackrel{\mathrm{def}}{=} I(x(\cdot), v(\cdot), u(\cdot)), \tag{1.4}$$

то задача (1.3) является расширением (овыпуклением) следующей задачи:

$$I(x(\cdot), v(\cdot), u(\cdot)) \to \inf, \quad (x(\cdot), v(\cdot), u(\cdot)) \in D. \tag{1.5}$$

Корректность такого расширения вытекает из теоремы 1.3 [16] (см. также [17]), и для получения необходимых условий оптимальности допустимого процесса задачи (1.5) приведем

Определение 1.4. Набор $(\widehat{x}(\cdot), \widehat{v}(\cdot), \widehat{\mu}(\cdot)) \in D_c$ называется решением задачи (1.3) в ослабленном смысле, если не существует такого набора $(x(\cdot), v(\cdot), u(\cdot)) \in D$, что (см. (1.4))

$$I(x(\cdot), v(\cdot), u(\cdot)) < \mathfrak{T}(\widehat{x}(\cdot), \widehat{v}(\cdot), \widehat{\mu}(\cdot)).$$

[2] т.е. для любой функции $c \in C(\mathfrak{U}, \mathbb{R})$ совокупность отображений $t \to \langle \mu(t), c(u)\rangle$, $\mu \in \mathfrak{M}$, принадлежащих (см. определение 1.1) $S(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, является равностепенно п. п. [6].

Отметим, что всякое решение задачи (1.3) является решением в ослабленном смысле и для задачи (1.5) оба этих понятия совпадают.

Для формулировки основного утверждения статьи напомним [18], [19], что система

$$\dot{x} = A(t)x, \quad A \in L_1^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}, \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n)), \quad d(A, 0) < \infty, \tag{1.6}$$

допускает экспоненциальную дихотомию (э. д.) на $\mathbb{R}$, если существует пара взаимно дополнительных проекторов $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2 \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n)$ и положительные константы $\mathfrak{r}_j, \sigma_j$, $j = 1, 2$, такие, что

$$\begin{aligned} |P_1(t,s)| &= |\Phi(t)\mathfrak{P}_1\Phi^{-1}(s)| \le \mathfrak{r}_1 e^{-\sigma_1(t-s)}, \quad \text{если} \quad -\infty < s \le t < \infty, \\ |P_2(t,s)| &= |\Phi(t)\mathfrak{P}_2\Phi^{-1}(s)| \le \mathfrak{r}_2 e^{-\sigma_2(s-t)}, \quad \text{если} \quad -\infty < t \le s < \infty, \end{aligned} \tag{1.7}$$

где $\Phi(t)$ — фундаментальная матрица системы (1.6). В этом случае функция $(t, s) \mapsto \mathcal{G}(t, s) \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n)$, определенная равенством $\mathcal{G}(t, s) = \chi_{(-\infty,t)}(s)P_1(t, s) - \chi_{(t,\infty)}(s)P_2(t, s)$, $t, s \in \mathbb{R}$, χ_F — характеристическая функция множества $F \subset \mathbb{R}$, называется (главной) функцией Грина системы (1.6). Для всякой функции $b \in L_1^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$, $d(b, 0) < \infty$, система $\dot{x} = A(t)x + b(t)$ имеет единственное ограниченное на $\mathbb{R}$ решение $x(t) = \int\limits_{\mathbb{R}} \mathcal{G}(t, s)b(s)ds$, $t \in \mathbb{R}$, [18], [19]. При этом, если $A \in S(\mathbb{R}, \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n))$, $b \in S(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$, то $x \in B(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$.

В дальнейшем $T_{v(\cdot)}\mathfrak{S}$ — касательный конус для $v(\cdot) \in \mathfrak{S}$.

Теорема 1.2. *Пусть допустимый процесс* $(\widehat{x}(\cdot), \widehat{v}(\cdot), \widehat{\mu}(\cdot)) \in D_c$ *является решением в ослабленном смысле задачи* (1.3) *и п. п. по Степанову система*

$$\dot{y} = \langle \widehat{\mu}(t), f'_x(t, \widehat{x}(t), \widehat{v}(t), u)\rangle y, \quad (t, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n, \tag{1.8}$$

допускает э. д. Тогда

$$\sup_{\mu(\cdot)\in \mathrm{APM}_1} M\{\mathbb{H}(t, \widehat{x}(t), \widehat{v}(t), \mu(t), \widehat{p}(t))\} = M\{\mathbb{H}(t, \widehat{x}(t), \widehat{v}(t), \widehat{\mu}(t), \widehat{p}(t))\}, \tag{1.9}$$

где $\widehat{p}(t) \in \mathbb{R}^{n*}$, $t \in \mathbb{R}$, *— п. п. по Бору решение системы*

$$\dot{p} = -p\langle \widehat{\mu}(t), f'_x(t, \widehat{x}(t), \widehat{v}(t), u)\rangle + \langle \widehat{\mu}(t), f'_{0x}(t, \widehat{x}(t), \widehat{v}(t), u)\rangle, \tag{1.10}$$

и при каждом $h(\cdot) \in T_{\widehat{v}(\cdot)}\mathfrak{S}$

$$M\{\langle \widehat{\mu}(t), H'_v(t, \widehat{x}(t), \widehat{v}(t), u, \widehat{p}(t))\rangle h(t)\} \le 0. \tag{1.11}$$

Замечание 1.2. Поскольку отображение $(t, u) \mapsto H(t, \widehat{x}(t), \widehat{v}(t), u, \widehat{p}(t))$ принадлежит пространству $B(\mathbb{R} \times \mathfrak{U}, \mathbb{R})$, то [20] равенство (1.9) равносильно тому, что при п. в. $t \in \mathbb{R}$

$$\max_{u\in\mathfrak{U}} H(t, \widehat{x}(t), \widehat{v}(t), u, \widehat{p}(t)) = \mathbb{H}(t, \widehat{x}(t), \widehat{v}(t), \widehat{\mu}(t), \widehat{p}(t)) = \langle \widehat{\mu}(t), H(t, \widehat{x}(t), \widehat{v}(t), u, \widehat{p}(t))\rangle.$$

Замечание 1.3. В случае, если $T_{\widehat{v}(\cdot)}\mathfrak{S}$ является линейным многообразием в $B(\mathbb{R}, \mathbb{R}^k)$, то условие (1.11) в теореме 1.2 влечет для всех $h(\cdot) \in T_{\widehat{v}(\cdot)}\mathfrak{S}$ равенство

$$M\{\langle \widehat{\mu}(t), H'_v(t, \widehat{x}(t), \widehat{v}(t), u, \widehat{p}(t))\rangle h(t)\} = 0. \tag{1.12}$$

Далее, если $\mathrm{int}\,\mathfrak{S} \ne \emptyset$ и $\widehat{v}(\cdot) \in \mathrm{int}\,\mathfrak{S}$, то $T_{\widehat{v}(\cdot)}\mathfrak{S} = B(\mathbb{R}, \mathbb{R}^k)$ и поэтому при всех $h(\cdot) \in B(\mathbb{R}, \mathbb{R}^k)$ имеет место равенство (1.12). Отсюда следует, что все коэффициенты Фурье $M\{\langle \widehat{\mu}(t), H'_v(t, \widehat{x}(t), \widehat{v}(t), u, \widehat{p}(t))\rangle e^{-i\lambda t}\}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, ограниченной (в существенном) п. п. по Степанову функции $t \mapsto \langle \widehat{\mu}(t), H'_v(t, \widehat{x}(t), \widehat{v}(t), u, \widehat{p}(t))\rangle$ равны нулю. Значит, по теореме о единственности разложения п. п. функции в ряд Фурье [6] получаем, что в условиях теоремы 1.2 $\langle \widehat{\mu}(t), H'_v(t, \widehat{x}(t), \widehat{v}(t), u, \widehat{p}(t))\rangle = 0$ при $\widehat{v}(\cdot) \in \mathrm{int}\,\mathfrak{S}$ для п. в. $t \in \mathbb{R}$. Отметим также, что в случае, если в теореме 1.2 в качестве $\mathfrak{S}$ рассматривается некоторое подмножество векторов из $\mathbb{R}^k$ и окажется, что $\widehat{v} \equiv \widehat{v}(t)$ принадлежит $\mathrm{int}\,\mathfrak{S}$, то, во-первых, $T_{\widehat{v}}\mathfrak{S} = \mathbb{R}^k$, а во-вторых, равенство (1.12) будет выполнено для всех $h \equiv h(t) \in \mathbb{R}^k$. Последнее означает, что в рассматриваемом случае $M\{\langle \widehat{\mu}(t), H'_v(t, \widehat{x}(t), \widehat{v}, u, \widehat{p}(t))\rangle\} = 0$.

Доказательство теоремы 1.2 приведем в § 4.

2. Непрерывная зависимость п. п. решения от параметра

С фиксированным $\widehat{\mu}(\cdot) \in \mathrm{APM}_1$ и $\varepsilon_0 > 0$ свяжем множество $\mathfrak{M} = \{\mu(\cdot,\varepsilon)\}_{\varepsilon\in[0,\varepsilon_0]} \subset \mathrm{APM}_1$ $(\mu(\cdot,0) \equiv \widehat{\mu}(\cdot))$ и при каждом $m \in \mathbb{Z}$ полагаем

$$\mathbb{I}_m(\varepsilon) = \{t \in [ma,(m+1)a] : \mu(t,\varepsilon) \neq \widehat{\mu}(t)\} \quad (a > 0). \tag{2.1}$$

Скажем, что множество $\mathfrak{M}$ равномерно липшицево, если существует такое $L > 0$, что

$$\sup_{m\in\mathbb{Z}} (\operatorname{mes} \mathbb{I}_m(\varepsilon)) \leq L\varepsilon. \tag{2.2}$$

Лемма 2.1. *Если $\mathfrak{M}$ равномерно липшицево, то $\lim\limits_{\varepsilon\downarrow 0} \|\mu(\cdot,\varepsilon) - \widehat{\mu}(\cdot)\|_w = 0$.*

Доказательство. Пусть $\varphi \in \mathfrak{V}_1$. Поскольку $\max\limits_{u\in\mathfrak{U}} |\varphi(t,u)| \leq \psi_\varphi(t)$ при п. в. $t \in \mathbb{R}$, а $\psi_\varphi(\cdot) \in L_1(\mathbb{R},\mathbb{R})$, то для заданного $\gamma > 0$ найдется такое $N \in \mathbb{N}$, что

$$J(\varepsilon) = \left| \int_{\mathbb{R}} \langle \mu(t,\varepsilon) - \widehat{\mu}(t), \varphi(t,u)\rangle dt \right| \leq J_N(\varepsilon) + \gamma/2,\ J_N(\varepsilon) = \left| \int_{-N}^{N} \langle \mu(t,\varepsilon) - \widehat{\mu}(t), \varphi(t,u)\rangle dt \right|. \tag{2.3}$$

В силу (2.1) $J_N(\varepsilon) \leq \sum\limits_{|m|\leq N} \int\limits_{\mathbb{I}_m(\varepsilon)} \psi_\varphi(t)dt$. Отсюда по теореме Лебега об абсолютной непрерывности интеграла [9] найдется такое $\widehat{\varepsilon} > 0$, что $J_N(\varepsilon) \leq \gamma/2$ при всех $\varepsilon \in (0,\widehat{\varepsilon}]$, а значит (см. (2.3)), $J(\varepsilon) \leq \gamma$.

Далее, для $\widehat{v}(\cdot) \in \mathfrak{S}$ рассмотрим касательный конус $T_{\widehat{v}(\cdot)}\mathfrak{S}$. В соответствии с определением (см., напр., [21]) в нашем случае $h(\cdot) \in T_{\widehat{v}(\cdot)}\mathfrak{S}$, если найдется константа $\varrho > 0$ и такое отображение $\varepsilon \mapsto \eta(\cdot,\varepsilon) \in B(\mathbb{R},\mathbb{R}^n)$, $\varepsilon \in (0,\varrho]$, $\eta(\cdot,0) \equiv 0$, что

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0} \|\eta(\cdot,\varepsilon)\|_{C(\mathbb{R},\mathbb{R}^k)} = 0 \tag{2.4}$$

и при всех $\varepsilon \in [0,\varrho]$

$$v_\varepsilon(\cdot) = \widehat{v}(\cdot) + \varepsilon(h(\cdot) + \eta(\cdot,\varepsilon)) \in \mathfrak{S}. \tag{2.5}$$

Теорема 2.1. *Пусть равномерно липшицево множество $\mathfrak{M}$ равностепенно п. п. и допустимый набор $(\widehat{x}(\cdot),\widehat{v}(\cdot),\widehat{\mu}(\cdot)) \in D_c$ системы (1.2) такой, что система (1.8) является э. д. Тогда найдется такое $\widehat{\varepsilon} \in (0,\varepsilon_0]$ и компактное множество $K_r = \overline{\operatorname{orb}}(\widehat{x}(\cdot)) + O_r[0] \subset G$, что при каждом $\varepsilon \in (0,\widehat{\varepsilon}]$ система*

$$\dot{x} = \langle \mu(t,\varepsilon), f(t,x,v_\varepsilon(t),u)\rangle = \int_{\mathfrak{U}} f(t,x,v_\varepsilon(t),u)\mu(t,\varepsilon)du, \tag{2.6}$$

где $v_\varepsilon(\cdot) \in \mathfrak{S}$ определено равенством (2.5), имеет единственное п. п. по Бору решение $x(\cdot,\varepsilon)$ такое, что $\overline{\operatorname{orb}}(x(\cdot,\varepsilon)) \subset K_r$ и

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0} \|x(\cdot,\varepsilon) - \widehat{x}(\cdot)\|_{C(\mathbb{R},\mathbb{R}^n)} = 0. \tag{2.7}$$

Кроме того, множество $\{\frac{1}{\varepsilon}\|x(\cdot,\varepsilon) - \widehat{x}(\cdot)\|_{C(\mathbb{R},\mathbb{R}^n)},\ \varepsilon \in (0,\widehat{\varepsilon}]\}$ ограничено.

Доказательство. Поскольку набор $(\widehat{x}(\cdot),\widehat{v}(\cdot),\widehat{\mu}(\cdot))$ является допустимым для системы (1.2), то $\overline{\operatorname{orb}}(\widehat{x}) \subset G$ и, следовательно, найдется такое $r > 0$, что $K_r = \overline{\operatorname{orb}}(\widehat{x}) + O_r[0] \subset G$ $(O_r[0] = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leq r\})$. Далее, для $h(\cdot) \in T_{\widehat{v}(\cdot)}\mathfrak{S}$ при каждом $\varepsilon \in [0,\varrho]$ (считаем $\varrho \leq \varepsilon_0$) рассмотрим функцию $v_\varepsilon(\cdot) \in \mathfrak{S}$, определенную равенством (2.5). В силу (2.4) без ограничения общности можно считать, что $\|\eta(\cdot,\varepsilon)\|_{C(\mathbb{R},\mathbb{R}^k)} \leq 1$ при всех $\varepsilon \in [0,\varrho]$. Поэтому $\{v_\varepsilon(\cdot)\}_{\varepsilon\in[0,\varrho]} \subset \mathbb{B}(\mathbb{R},V) \cap \mathfrak{S}$, где

$$V = \overline{\operatorname{orb}}(\widehat{v}) + O_{\varrho_1}[0], \quad \varrho_1 = \varrho(\|h\|_{C(\mathbb{R},\mathbb{R}^k)} + 1). \tag{2.8}$$

В дальнейшем, чтобы не загромождать обозначений, считаем

$$\mathfrak{d}=\mathfrak{d}(V,K_r)=\sup_{(t,x,v,u)\in\mathbb{R}\times K_r\times V\times\mathfrak{U}}(|f_0(t,x,v,u)|+|f(t,x,v,u)|+|f'_x(t,x,v,u)|), \tag{2.9}$$

$$\begin{aligned}
&\mathfrak{f}(t,x,u)=f(t,x,\widehat{v}(t),u),\quad \mathfrak{f}'_x(t,x,u)=f'_x(t,x,\widehat{v}(t),u);\\
&\mathfrak{f}_\varepsilon(t,x,u)=f(t,x,v_\varepsilon(t),u),\quad \mathfrak{f}'_{\varepsilon x}(t,x,u)=f'_x(t,x,v_\varepsilon(t),u);\\
&\mathfrak{f}_0(t,x,u)=f_0(t,x,\widehat{v}(t),u),\quad \mathfrak{f}'_{0x}(t,x,u)=f'_{0x}(t,x,\widehat{v}(t),u);\\
&\nu(t,\varepsilon)=\widehat{\mu}(t)-\mu(t,\varepsilon),
\end{aligned} \tag{2.10}$$

и, кроме того, для э. д. системы (1.8) сохраняем обозначения, входящие в определение э. д. системы (1.6) с матрицей $A(t)=\langle\widehat{\mu}(t),f'_x(t,\widehat{x}(t),\widehat{v}(t),u)\rangle$. Отметим (см. теорему 1.1 и [15]), что

$$\mathfrak{f},\mathfrak{f}_\varepsilon\in B(\mathbb{R}\times K_r\times\mathfrak{U},\mathbb{R}^n),\quad \mathfrak{f}'_x,\mathfrak{f}'_{\varepsilon x}\in S(\mathbb{R},C(K_r\times\mathfrak{U},\mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n))) \tag{2.11}$$

и, следовательно, снова по теореме 1.1 функции $(t,u)\mapsto\mathfrak{f}(t,\widehat{x}(t),u)$ и $(t,u)\mapsto\mathfrak{f}'_x(t,\widehat{x}(t),u)$ принадлежат пространствам $B(\mathbb{R}\times\mathfrak{U},\mathbb{R}^n)$ и $S(\mathbb{R},C(\mathfrak{U},\mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n)))$ соответственно.

Далее, в системе (2.5) сделаем замену $z=\widehat{x}(t)-x$, которая относительно z запишется в виде

$$\dot{z}=A(t)z+h_1(t;z)+h_2(t;\varepsilon,z)+h_3(t;\varepsilon,z),\quad (t,z)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n,\quad \varepsilon\in[0,\varrho], \tag{2.11$'$}$$

где (см. обозначения (2.10))

$$\begin{aligned}
h_1(t;z)&=\langle\widehat{\mu}(t),\mathfrak{f}(t,\widehat{x}(t),u)-\mathfrak{f}(t,\widehat{x}(t)-z,u)\rangle-A(t)z,\\
h_2(t;\varepsilon,z)&=\langle\nu(t,\varepsilon),\mathfrak{f}(t,\widehat{x}(t)-z,u)\rangle,\\
h_3(t;\varepsilon,z)&=\langle\mu(t,\varepsilon),\mathfrak{f}(t,\widehat{x}(t)-z,u)-\mathfrak{f}_\varepsilon(t,\widehat{x}(t)-z,u)\rangle.
\end{aligned}$$

Для $\varepsilon\in[0,\varrho]$ рассмотрим оператор $\mathcal{F}[\cdot,\varepsilon]:B(\mathbb{R},O_r[0])\to B(\mathbb{R},\mathbb{R}^n)$, определенный для каждой функции $z\in B(\mathbb{R},O_r[0])$ равенством $\mathcal{F}[z(\cdot),\varepsilon](t)=\mathcal{P}[z(\cdot),\varepsilon](t)+\mathbb{P}[z(\cdot),\varepsilon](t)$, где

$$\mathcal{P}[z(\cdot),\varepsilon](t)=\int_{\mathbb{R}}\mathcal{G}(t,s)[h_1(s,z(s))+h_2(s,\varepsilon,z(s))]ds,\quad \mathbb{P}[z(\cdot),\varepsilon](t)=\int_{\mathbb{R}}\mathcal{G}(t,s)h_3(s,\varepsilon,z(s))ds.$$

Полагаем далее для $\gamma>0$ и $t\in\mathbb{R}$

$$w^{(1)}_\gamma(t)=\sup_{\substack{(x_k,v,u)\in K_r\times V\times\mathfrak{U}\\ k=1,2,\ |x_1-x_2|\le\gamma}}|f'_x(t,x_1,v,u)-f'_x(t,x_2,v,u)|, \tag{2.12}$$

$$w^{(2)}_\gamma(t)=\sup_{\substack{(x,v_k,u)\in K_r\times V\times\mathfrak{U}\\ k=1,2,\ |v_1-v_2|\le\gamma}}|f(t,x,v_1,u)-f(t,x,v_2,u)|. \tag{2.13}$$

Из ограничений, наложенных на f (см. (2.11) и [7], а также лемму 1.1), вытекает

$$\lim_{\gamma\downarrow 0}\sup_{t\in\mathbb{R}}w^{(2)}_\gamma(t)+\sup_{t\in\mathbb{R}}\int_t^{t+1}w^{(1)}_\gamma(s)ds=0, \tag{2.14}$$

и т. к. $d(\widehat{v}(\cdot),v_\varepsilon(\cdot))\le\|\widehat{v}(\cdot)-v_\varepsilon(\cdot)\|_{C(\mathbb{R},\mathbb{R}^k)}$, то $\lim\limits_{\varepsilon\downarrow 0}d(\widehat{v}(\cdot),v_\varepsilon(\cdot))\overset{(2.4)}{=}0$. Так как множество $\mathfrak{M}$ равностепенно п. п., то множество $\{\nu(\cdot,\varepsilon)\}_{\varepsilon\in[0,\varrho]}$ из $\mathrm{APM}\cap\Sigma_2$ также равностепенно п. п. При выполнении этого условия в [22] доказано, что

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\sup_{t\in\mathbb{R}}I_\varepsilon(t)=0,\quad I_\varepsilon(t)=\left|\int_{\mathbb{R}}\mathcal{G}(t,s)\langle\nu(s,\varepsilon),\mathfrak{f}(s,\widehat{x}(s),u)\rangle ds\right|, \tag{2.15}$$

и там же показано, что для любых фиксированных $i\in\mathbb{Z}_+$ и $\mathfrak{k}\in(0,\infty)$ имеют место равенства

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\sup_{\varsigma\in(0,\mathfrak{k}]}\sup_{t\in\mathbb{R}}\left|\int_{\mathfrak{s}_k(t,i)}P_k(t,s)\langle\nu(s,\varepsilon),\mathfrak{f}'_x(s,\widehat{x}(s),u)\rangle ds\right|=0,\quad k=1,2, \tag{2.16}$$

где $\mathfrak{s}_1(t,i)=[t-i\varsigma-\varsigma,t-i\varsigma]$, $\mathfrak{s}_2(t,i)=[t+i\varsigma,t+i\varsigma+\varsigma]$. Введем оператор $\mathfrak{I}[\cdot,\varepsilon]:B(\mathbb{R},O_r[0])\to B(\mathbb{R},\mathbb{R}^n)$, определенный для каждой функции $z\in B(R,O_r[0])$ и всякого $\varepsilon\in[0,\varrho]$ равенством

$$\mathfrak{I}[z(\cdot),\varepsilon](t)=\int_{\mathbb{R}}\mathcal{G}(t,s)\langle\nu(s,\varepsilon),\mathfrak{f}'_x(s,\widehat{x}(s),u)\rangle z(s)\,ds,\quad t\in\mathbb{R}.$$

С помощью равенств (2.16) в [22] доказана (см. (1.7), (2.8) и (2.9))

Лемма 2.2. *Для любого $\gamma>0$ найдется такое $\varepsilon_0>0$, что для всех $\varepsilon\in[0,\varepsilon_0]$ и каждой функции $z\in B(\mathbb{R},O_r[0])$ выполнено неравенство $\sup\limits_{t\in\mathbb{R}}|\mathfrak{I}[z(\cdot),\varepsilon](t)|\le\gamma(2\mathfrak{d}(\frac{\mathfrak{r}_1}{\sigma_1}+\frac{\mathfrak{r}_2}{\sigma_2})+\|z\|_{C(\mathbb{R},\mathbb{R}^k)})$.*

Таким образом, принимая во внимание, что в рассматриваемой ситуации равенство (2.15) и лемма 2.2 аналогичны соответственно равенству (3.1) и лемме 3.2 работы [16], а также способ задания оператора $\mathcal{F}[\cdot,\varepsilon]:B(\mathbb{R},O_r[0])\to B(\mathbb{R},\mathbb{R}^n)$, воспользовавшись схемами доказательства теорем 2.1 и 6.1 работы [16], можно показать существование такого $\widetilde{\varepsilon}\in(0,\varrho]$ и константы $\beta\in(0,r]$, что при каждом $\varepsilon\in(0,\widetilde{\varepsilon}]$ на $B(\mathbb{R},O_\beta[0])$ оператор $\mathcal{F}[\cdot,\varepsilon]$ имеет неподвижную точку, т. е. существует такая функция $z(\cdot,\varepsilon)\in B(\mathbb{R},O_\beta[0])$, что

$$z(t,\varepsilon)=\int_{\mathbb{R}}\mathcal{G}(t,s)[h_1(s,z(s,\varepsilon))+h_2(s;\varepsilon,z(s,\varepsilon))+h_3(s;\varepsilon,z(s,\varepsilon))]ds,\quad t\in\mathbb{R}. \tag{2.17}$$

При этом $\overline{\mathrm{orb}}(z(\cdot,\varepsilon))\subset O_\beta[0]$ и

$$\lim_{\varepsilon\downarrow0}\|z(\cdot,\varepsilon)\|_{C(\mathbb{R},\mathbb{R}^n)}=0. \tag{2.18}$$

Из (2.17) и (2.11′) получаем, что при каждом $\varepsilon\in(0,\widetilde{\varepsilon}]$ п. п. по Бору функция $x(\cdot,\varepsilon)=\widehat{x}(\cdot)-z(\cdot,\varepsilon)$ является решением системы (2.6). При этом $\overline{\mathrm{orb}}(x(\cdot,\varepsilon))\subset K_r$ и (см. (2.18)) выполнено равенство (2.7).

Докажем последнее утверждение теоремы 2.1. Из (2.17), учитывая определение функций h_1, h_2, h_3, при каждом $t\in\mathbb{R}$ и всех $\varepsilon\in(0,\widetilde{\varepsilon}]$ имеем равенство

$$\frac{z(t,\varepsilon)}{\varepsilon}=\sum_{i=1}^{2}J_i^{(1)}(t,\varepsilon)+J^{(2)}(t,\varepsilon)+V(t,\varepsilon), \tag{2.19}$$

где (см. (2.5) и обозначения (2.10))

$$J_i^{(1)}(t,\varepsilon)=\frac{1}{\varepsilon}\int_{\mathfrak{s}_i(t)}P_i(t,s)\langle\nu(s,\varepsilon),\mathfrak{f}(s,x(s,\varepsilon),u)\rangle ds,\quad i=1,2,$$

$$J^{(2)}(t,\varepsilon)=\int_{\mathbb{R}}\mathcal{G}(t,s)\langle\widehat{\mu}(s,\varepsilon),\int_0^1(\mathfrak{f}'_x(s,\widehat{x}(s)-\theta z(s;\varepsilon),u)-\mathfrak{f}'_x(s,\widehat{x}(s),u))d\theta\rangle\frac{z(s,\varepsilon)}{\varepsilon}\,ds,$$

$$V(t,\varepsilon)=\int_{\mathbb{R}}\mathcal{G}(t,s)\langle\mu(s,\varepsilon),\int_0^1 f'_v(s,x(s,\varepsilon),v_\varepsilon(s,\theta),u)d\theta\rangle(h(s)+\eta(s,\varepsilon))\,ds \tag{2.20}$$

и $\mathfrak{s}_1(t)=(-\infty,t]$, $\mathfrak{s}_2(t)=[t,\infty)$, $v_\varepsilon(t,\theta)=\widehat{v}(t)+\varepsilon\theta(h(t)+\eta(t,\varepsilon))$, $0\le\theta\le1$. Теперь, представив каждое $t\in\mathbb{R}$ в виде $t=m_ta+\theta_ta$, $m_t\in\mathbb{Z}$, $\theta_t\in[0,1)$, используя (1.7), в силу (2.1) и (2.9) получим

$$|J_2^{(1)}(t,\varepsilon)|\le\frac{2\mathfrak{r}_2\mathfrak{d}}{\varepsilon(1-e^{-a\sigma_2})}\sup_{m\in\mathbb{Z}}\operatorname{mes}I_m(\varepsilon)\overset{(2.2)}{\le}\frac{2\mathfrak{r}_2\mathfrak{d}L}{1-e^{-a\sigma_2}}=\varkappa_2^{(1)}\quad\forall t\in\mathbb{R}. \tag{2.21}$$

Аналогично убеждаемся, что

$$|J_1^{(1)}(t,\varepsilon)|\le\frac{2\mathfrak{r}_1\mathfrak{d}L}{1-e^{-a\sigma_1}}=\varkappa_1^{(1)}. \tag{2.22}$$

Так как (см. (2.12))

$$|J^{(2)}(t,\varepsilon)|\overset{(1.8)}{\le}\frac{\mathfrak{k}}{\varepsilon}\|z(\cdot,\varepsilon)\|_{C(\mathbb{R},\mathbb{R}^n)}\sup_{t\in\mathbb{R}}\int_t^{t+a}w^{(1)}_{\|z(\cdot,\varepsilon)\|_{C(\mathbb{R},\mathbb{R}^n)}}(s)\,ds,$$

где

$$\mathfrak{k} = \frac{\mathfrak{r}_1}{1-e^{-a\sigma_1}} + \frac{\mathfrak{r}_2}{1-e^{-a\sigma_2}}, \tag{2.23}$$

то из (2.14) и (2.18) вытекает существование такого $\widetilde{\varepsilon}_1 \in (0, \widetilde{\varepsilon}]$, что при всех $\varepsilon \in (0, \widetilde{\varepsilon}_1]$

$$|J^{(2)}(t,\varepsilon)| \leq \frac{1}{2\varepsilon}\|z(\cdot,\varepsilon)\|_{C(\mathbb{R},\mathbb{R}^n)}. \tag{2.24}$$

Покажем, что

$$V(t,\varepsilon) \underset{t\in\mathbb{R}}{\rightrightarrows} y(t) \quad \text{при} \quad \varepsilon \downarrow 0, \quad y(t) = y(t,h(\cdot)) = \int_{\mathbb{R}} \mathcal{G}(t,s)\langle\widehat{\mu}(s), f'_v(s,\widehat{x}(s),\widehat{v}(s),u)\rangle h(s)\,ds. \tag{2.25}$$

В самом деле, полагая $\mathfrak{y}(t,\varepsilon) = h(t) + \eta(t,\varepsilon)$ и учитывая (2.20), получим $V(t,\varepsilon) = \sum\limits_{i=1}^{4} V_i(t,\varepsilon)$, где

$$\begin{aligned}
V_1(t,\varepsilon) &= \int_{\mathbb{R}} \mathcal{G}(t,s)\langle\nu(t,s), \int_0^1 f'_v(s,x(s,\varepsilon),v_\varepsilon(s,\theta)u)d\theta\rangle\mathfrak{y}(s,\varepsilon)ds,\\
V_2(t,\varepsilon) &= \int_{\mathbb{R}} \mathcal{G}(t,s)\langle\widehat{\mu}(s), \int_0^1 (f'_v(s,\widehat{x}(s)-z(s,\varepsilon),v_\varepsilon(s,\theta),u) -\\
&\qquad - f'_v(s,\widehat{x}(s),v_\varepsilon(s,\theta),u))\,d\theta\rangle\mathfrak{y}(s,\varepsilon)ds,\\
V_3(t,\varepsilon) &= \int_{\mathbb{R}} \mathcal{G}(t,s)\langle\widehat{\mu}(s), \int_0^1 (f'_v(s,\widehat{x}(s),v_\varepsilon(s,\theta),u) - f'_v(s,\widehat{x}(s),\widehat{v}(s),u))d\theta\rangle\mathfrak{y}(s,\varepsilon)ds,\\
V_4(t,\varepsilon) &= \int_{\mathbb{R}} \mathcal{G}(t,s)\langle\widehat{\mu}(s), f'_v(s,\widehat{x}(s),\widehat{v}(s),u)\rangle\mathfrak{y}(s,\varepsilon)ds.
\end{aligned}$$

Пусть далее $F(t) = \max\limits_{(x,v,u)\in K_r\times V\times\mathfrak{U}} |f'_v(t,x,v,u)|$, $t\in\mathbb{R}$. Поскольку $F \in S(\mathbb{R},\mathbb{R}_+)$, то [22] для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что $\sup\limits_{t\in\mathbb{R}} \int\limits_E F(s+t)ds \leq \varepsilon$, если измеримое множество $E \subset [0,a]$ такое, что $\operatorname{mes} E \leq \delta$. Поэтому из неравенства (см. (2.1) и (2.23))

$$|V_1(t,\varepsilon)| \leq 2\mathfrak{k}\sup_{m\in\mathbb{Z}}\int_{\mathbb{I}_0(\varepsilon)} F(s+ma)ds\|h\|_{C(\mathbb{R},\mathbb{R}^k)} + d(F(\cdot),0)\|\eta(\cdot,\varepsilon)\|_{C(\mathbb{R},\mathbb{R}^k)}$$

и из равенства (2.4) получим $V_1(t,\varepsilon) \underset{t\in\mathbb{R}}{\rightrightarrows} 0$ при $\varepsilon\downarrow 0$. Определив далее $w^{(3)}_\gamma(t)$, $w^{(4)}_\gamma(t)$, $t\in\mathbb{R}$, аналогично $w^{(1)}_\gamma(t)$ и $w^{(2)}_\gamma(t)$ (см. (2.12), (2.13)), при $f'_x = f'_v$ соответственно $f = f'_v$ имеем

$$\begin{aligned}
|V_2(t,\varepsilon)| &\leq \mathfrak{k}(1+\|h\|_{C(\mathbb{R},\mathbb{R}^k)})\sup_{t\in\mathbb{R}}\int_t^{t+a} w^{(3)}_{\xi(\varepsilon)}(s)ds, \quad \xi(\varepsilon) = \|z(\cdot,\varepsilon)\|_{C(\mathbb{R},\mathbb{R}^n)},\\
|V_3(t,\varepsilon)| &\leq \mathfrak{k}(1+\|h\|_{C(\mathbb{R},\mathbb{R}^k)})\sup_{t\in\mathbb{R}}\int_t^{t+a} w^{(4)}_{\zeta(\varepsilon)}(s)ds, \quad \zeta(\varepsilon) = \varepsilon(1+\|h\|_{C(\mathbb{R},\mathbb{R}^k)}).
\end{aligned}$$

Из последних двух неравенств в силу (2.18) и леммы 1.1 (см. (2.10)) получим, что $V_l(t,\varepsilon) \underset{t\in\mathbb{R}}{\rightrightarrows} 0$ при $\varepsilon\downarrow 0$, $l = 2,3$. Так как $|V_4(t,\varepsilon) - y(t)| \leq \mathfrak{k}d(F(\cdot),0)\|\eta(\cdot,\varepsilon)\|_{C(\mathbb{R},\mathbb{R}^k)}$, то (см. (2.4)) $V_4(t,\varepsilon) \underset{t\in\mathbb{R}}{\rightrightarrows} y(t)$ при $\varepsilon\downarrow 0$. Последнее соотношение совместно с доказанными соотношениями влечет (2.25). Стало быть, найдется $\widehat{\varepsilon} \in (0,\widetilde{\varepsilon}_1]$ такое, что $|V(t,\varepsilon)| \leq \varkappa_3 = (1+\|y\|_{C(\mathbb{R},\mathbb{R}^n)})$ для всех $\varepsilon \in (0,\widehat{\varepsilon}]$ и $t\in\mathbb{R}$. Отсюда в силу (2.19), (2.21), (2.22) и (2.24) получим, что $\|\frac{z(\cdot,\varepsilon)}{\varepsilon}\|_{C(\mathbb{R},\mathbb{R}^n)} \leq 2(\varkappa^{(1)}_1 + \varkappa^{(1)}_2 + \varkappa_3)$ для всех $\varepsilon \in (0,\widehat{\varepsilon}]$, и теорема 2.1 доказана.

Замечание 2.1. Теорема 2.1 доказана для непосредственного ее использования при доказательстве теоремы 1.2. Вместе с тем, в силу результатов работы [22] утверждение о существовании решения $x(\cdot,\varepsilon)$ системы (2.6), удовлетворяющего равенству (2.7), имеет место, если f удовлетворяет условиям 4) и 2), аналогичному для f'_x, а для доказательства последнего утверждения — условию 3), аналогичному для f'_x.

3. Свойства почти периодических вариаций

Определение 3.1. Последовательность $\{\nu(m)\}_{m\in\mathbb{Z}} \subset \mathrm{rpm}(\mathfrak{U})$ называется п. п., если для каждой функции $c \in C(\mathfrak{U},\mathbb{R})$ числовая последовательность $\{\langle \nu(m), c(u)\rangle\}_{m\in\mathbb{Z}}$ является п. п. [23].

Совокупность всех п. п. последовательностей из $\mathrm{rpm}(\mathfrak{U})$ обозначим $\mathbb{APS}$.

Далее, фиксированной точке $\vartheta \in [0,a]$, константе $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0]$, $\varepsilon_0 = a-\vartheta$ $(a>0)$, п. п. последовательности $\iota = \{\nu(m)\}_{m\in\mathbb{Z}} \in \mathbb{APS}$ и заданному $\widehat{\mu}(\cdot) \in \mathrm{APM}_1$ поставим в соответствие отображение $t \mapsto \mu(t,\varepsilon) = \mu(t,\varepsilon,\vartheta,\iota) \in \mathrm{rpm}(\mathfrak{U})$ $(\mu(t,0) \equiv \widehat{\mu}(t))$, определенное при всех $t \in \mathbb{R}$ равенством

$$\mu(t,\varepsilon) = \begin{cases} \widehat{\mu}(t), & t \in \bigcup\limits_{m\in\mathbb{Z}} ([ma,(m+1)a)/\mathbb{T}_m(\varepsilon,\vartheta)); \\ \nu(m), & t \in \mathbb{T}_m(\varepsilon,\vartheta) = [ma+\vartheta, ma+\vartheta+\varepsilon), \quad m \in \mathbb{Z}. \end{cases} \tag{3.1}$$

Введенное отображение $t \mapsto \mu(t,\varepsilon)$ называется игольчатой вариацией, отвечающей заданному $\widehat{\mu}(\cdot) \in \mathrm{APM}_1$.

Из теоремы 4.1 [14] вытекает

Лемма 3.1. *Отображение* $(t,\varepsilon) \mapsto \mu(t,\varepsilon)$, *заданное равенством* (3.1), *принадлежит пространству* $S(\mathbb{R}\times[0,\varepsilon_0],\mathrm{rpm}(\mathfrak{U}))$ *и для каждой функции* $g \in S(\mathbb{R}, C(\mathfrak{U},\mathbb{R}))$

$$\lim_{\gamma\downarrow 0} \sup_{\substack{\varepsilon_1,\varepsilon_2\in[0,\varepsilon_0]\\ |\varepsilon_1-\varepsilon_2|\le\gamma}} \sup_{t\in\mathbb{R}} \int_t^{t+1} |\langle \mu(s,\varepsilon_1)-\mu(s,\varepsilon_2), g(s,u)\rangle| ds = 0.$$

Теперь для произвольно фиксированного $h(\cdot) \in T_{\widehat{v}(\cdot)}\mathfrak{S}$ $(\widehat{v}(\cdot) \in \mathfrak{S})$ рассмотрим отвечающую ему совокупность функций $\{v_\varepsilon(\cdot)\}_{\varepsilon\in(0,\varrho]} \subset \mathfrak{S}$, заданную равенством (2.5), в котором без ограничения общности можно считать $\varrho \le \varepsilon_0$. Таким образом, заданной паре $(\widehat{v}(\cdot),\widehat{\mu}(\cdot)) \in \mathfrak{S}\times\mathrm{APM}_1$ можно поставить в соответствие множество $\{(v_\varepsilon(\cdot),\mu_\varepsilon(\cdot))\}_{\varepsilon\in(0,\varrho]} \subset \mathfrak{S}\times\mathrm{APM}_1$ п. п. вариаций. Поскольку (см. (2.1)) для отображений $\mu(\cdot,\varepsilon)$, определенных равенством (3.1), $\sup\limits_{m\in\mathbb{Z}}(\mathrm{mes}\,\mathbb{I}_m(\varepsilon)) = \varepsilon$, то $\lim\limits_{\varepsilon\downarrow 0}\|\Delta\mu(\cdot,\varepsilon)\|_w = 0$ по лемме 2.1; здесь и в дальнейшем $\Delta\mu(\cdot,\varepsilon) = \widehat{\mu}(\cdot)-\mu(\cdot,\varepsilon)$. Далее, т. к. отображение $(t,\varepsilon)\mapsto\mu(t,\varepsilon)$ принадлежит пространству $S(\mathbb{R}\times[0,\varepsilon_0],\mathrm{rpm}(\mathfrak{U}))$, то [14] множество $\{\mu(\cdot,\varepsilon)\}_{\varepsilon\in(0,\varepsilon_0]} \subset \mathrm{APM}_1$ и равностепенно п. п. Поэтому по теореме 2.1 найдутся такие $\widehat{\varepsilon} \in (0,\varrho]$ и $K_r \in \mathrm{comp}(G)$, что система (2.6) при $\mu(\cdot,\varepsilon)$, заданном равенством (3.1), имеет такое п. п. по Бору решение $x(\cdot,\varepsilon) = x(\cdot,\varepsilon,\vartheta,\iota)$, что $\overline{\mathrm{orb}}(x(\cdot,\varepsilon)) \subset K_r$ и удовлетворяется равенство (2.7). Кроме того,

$$\sup\left\{\frac{1}{\varepsilon}\|\Delta x(\cdot,\varepsilon)\|_{C(\mathbb{R},\mathbb{R}^n)},\ \varepsilon\in(0,\widehat{\varepsilon}]\right\} = \varkappa < \infty, \quad \Delta x(\cdot,\varepsilon) = \widehat{x}(\cdot)-x(\cdot,\varepsilon). \tag{3.2}$$

В дальнейшем (см. обозначения (2.10))

$$\begin{gathered} \Delta\mathfrak{f}(t,\nu) = \langle\widehat{\mu}(t)-\nu, \mathfrak{f}(t,\widehat{x}(t),u)\rangle, \quad \mathfrak{f}_m(t,\nu) = \mathfrak{f}(t+ma,\nu), \quad m\in\mathbb{Z}, \quad \nu\in\mathrm{rpm}(\mathfrak{U}); \\ \Delta\mathfrak{f}_0(t,\nu) = \langle\widehat{\mu}(t)-\nu, \mathfrak{f}_0(t,\widehat{x}(t),u)\rangle, \quad \Delta\mathfrak{f}_{0,m}(t,\nu) = \mathfrak{f}_0(t+ma,\nu), \\ \psi(t) = \langle\widehat{\mu}(t), \mathfrak{f}'_{0x}(t,\widehat{x}(t),u)\rangle, \quad \psi_m(t) = \psi(t+ma). \end{gathered} \tag{3.3}$$

Лемма 3.2. *Имеет место равенство*

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\left\|\frac{\Delta x(\cdot,\varepsilon)}{\varepsilon} - \frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{\mathbb{R}} \mathcal{G}(\cdot,s)\langle\Delta\mu(s,\varepsilon),\mathfrak{f}(s,\widehat{x}(s),u)\rangle ds - y(\cdot)\right\|_{C(\mathbb{R},\mathbb{R}^n)} = 0,$$

где п. п. по Бору функция $y(\cdot)$ *определена в* (2.25).

Доказательство. Так как при $\varepsilon \in (0,\widehat{\varepsilon}]$ функция $\Delta x(\cdot,\varepsilon)$ является решением уравнения (2.17), то, используя (3.1) (см. обозначения (2.20), (2.12) и (2.13)), имеем следующие соотношения:

$$\Big|\frac{\Delta x(t,\varepsilon)}{\varepsilon}-\frac{1}{\varepsilon}\int_{\mathbb{R}}\mathcal{G}(t,s)\langle\Delta\mu(s,\varepsilon),\mathfrak{f}(s,\widehat{x}(s),u)\rangle ds-y(t)\Big|\le$$

$$\le\Big|\int_{\mathbb{R}}\mathcal{G}(t,s)\langle\widehat{\mu}(s),\int_0^1(\mathfrak{f}'_x(s,\widehat{x}(s)-\theta\Delta x(s,\varepsilon),u)-\mathfrak{f}'_x(s,\widehat{x}(s),u))d\theta\rangle\frac{\Delta x(s,\varepsilon)}{\varepsilon}ds\Big|+$$

$$+\frac{1}{\varepsilon}\Big|\int_{\mathbb{R}}\mathcal{G}(t,s)\langle\Delta\mu(s,\varepsilon),\mathfrak{f}(s,\widehat{x}(s)-\Delta x(s,\varepsilon),u)-\mathfrak{f}(s,\widehat{x}(s),u)\rangle ds\Big|+|y(t)-V(t,\alpha)|\overset{(1.8),\,(3.2)}{\le}$$

$$\le\varkappa\mathfrak{k}\sup_{t\in\mathbb{R}}\int_t^{t+a}w^{(1)}_{\xi(\varepsilon)}(s)ds+\mathfrak{k}\sup_{t\in\mathbb{R}}w^{(2)}_{\xi(\varepsilon)}(t)+\sup_{t\in\mathbb{R}}|y(t)-V(t,\alpha)|,$$

где $\xi(\varepsilon)=\|\Delta x(\cdot,\varepsilon)\|_{C(\mathbb{R},\mathbb{R}^n)}$. Теперь нужное нам равенство вытекает из (2.14) и (2.25).

Далее, по теореме 1.1 (см. также (2.11)) отображения $t\mapsto\langle\widehat{\mu}(t),\mathfrak{f}(t,\widehat{x}(t),u)\rangle\in\mathbb{R}^n$, $t\mapsto\langle\widehat{\mu}(t),\mathfrak{f}_0(t,\widehat{x}(t),u)\rangle\in\mathbb{R}$ п. п. по Степанову. Поэтому из теоремы 1.4 и леммы 4.2 работы [14] вытекает

Лемма 3.3. *Существуют такие последовательности* $\{q_l\}_{l=1}^{\infty}\subset\mathbb{N}$, $\lim\limits_{l\to\infty}q_l=\infty$, $\{\eta_p\}_{p=1}^{\infty}\subset(0,a]$, $\lim\limits_{p\to\infty}\eta_p=0$, *а также измеримое множество* $\Xi\subset[0,a]$ *полной меры, что при каждом* $\vartheta\in\Xi$

$$\lim_{p\to\infty}\lim_{l\to\infty}\frac{1}{q_la}\sum_{m=0}^{q_l-1}\frac{1}{\eta_p}\int_0^{\eta_p}\sup_{\nu\in\mathrm{rpm}(\mathfrak{U})}|\Delta\mathfrak{f}_m(t+\vartheta,\nu)-\Delta\mathfrak{f}_m(\vartheta,\nu)|dt=0,\tag{3.4}$$

$$\lim_{p\to\infty}\lim_{l\to\infty}\frac{1}{q_la}\sum_{m=0}^{q_l-1}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{e^{-ka\sigma}}{\eta_p}\int_0^{\eta_p}\sup_{\nu\in\mathrm{rpm}(\mathfrak{U})}|\Delta\mathfrak{f}_{m+k}(t+\vartheta,\nu)-\Delta\mathfrak{f}_{m+k}(\vartheta,\nu)|dt=0.\tag{3.5}$$

Кроме того, для любой п. п. последовательности $\iota=\{\nu(m)\}_{m\in\mathbb{Z}}\in\mathbb{APS}$ *существуют пределы*

$$\lim_{l\to\infty}\frac{1}{q_la}\sum_{m=0}^{q_l-1}\Delta\mathfrak{f}_m(\vartheta,\nu(m)),\tag{3.6}$$

$$\mathfrak{c}(\vartheta,\iota)=\lim_{l\to\infty}\frac{1}{q_la}\sum_{m=0}^{q_l-1}\Delta\mathfrak{f}_{0,m}(\vartheta,\nu(m))\tag{3.7}$$

и для функции $\Delta\mathfrak{f}_0$ *справедливы предельные соотношения, аналогичные* (3.4) *и* (3.5).

Всюду далее, не оговаривая, предполагаем, что в определении 3.1 точка ϑ принадлежит множеству Ξ, определенному в лемме 3.3. Отметим, что в этом случае из (3.1) и существования предела (3.7) вытекает

$$\mathfrak{c}(\vartheta,\iota)=\lim_{p\to\infty}\frac{1}{\eta_p}M\{\langle\Delta\mu(t,\eta_p),\mathfrak{f}_0(t,\widehat{x}(t),u)\rangle\}.$$

Кроме того, из свойств функции Грина $\mathcal{G}(t,s)$ и существования предела (3.6) вытекает

$$\mathfrak{b}(\vartheta,\iota)=\lim_{l\to\infty}\frac{1}{q_la}\sum_{m=0}^{q_l-1}L^{(m)}(\vartheta,\iota)\quad(\iota=\{\nu(m)\}_{m\in\mathbb{Z}}\in\mathbb{APS}),\tag{3.8}$$

где

$$L^{(m)}(\vartheta,\iota)=\int_0^a\psi_m(t)\sum_{k=0}^{\infty}\{\mathcal{G}_m(t,\vartheta-(k+1)a)\Delta\mathfrak{f}_m(\vartheta-(k+1)a,\nu(m-(k+1)))+$$
$$+\mathcal{G}_m(t,\vartheta+ka)\Delta\mathfrak{f}_m(\vartheta+ka,\nu(m+k))\}dt,\quad m\in\mathbb{Z},\quad\mathcal{G}_m(\cdot,\cdot)=\mathcal{G}(\cdot+ma,\cdot+ma).\tag{3.9}$$

Лемма 3.4. *Для каждой точки $\vartheta \in \Xi$ и всякой последовательности $\iota \in \mathbb{APS}$ имеет место равенство*

$$\lim_{p\to\infty}\lim_{l\to\infty}\frac{1}{q_l a}\sum_{m=0}^{q_l-1}\int_{ma}^{(m+1)a}\psi(t)\biggl(\frac{1}{\eta_p}\int_{\mathbb{R}}\mathcal{G}(t,s)\langle\Delta\mu(s,\eta_p),\mathfrak{f}(s,\widehat{x}(s),u)\rangle ds\biggr)dt=\mathfrak{b}(\vartheta,\iota).$$

Громоздкое доказательство леммы 3.4 опускаем. Отметим лишь, что для ее доказательства надо воспользоваться определением $\mu(\cdot,\varepsilon)$, равенствами (3.4), (3.5), оценками (1.7) и схемой доказательства теоремы 6.7 работы [24].

Из лемм 3.2 и 3.4 вытекает (см. (2.22))

Лемма 3.5. *Для каждой точки $\vartheta \in \Xi$ и всякой последовательности $\iota \in \mathbb{APS}$*

$$\lim_{p\to\infty}M\biggl\{\psi(t)\frac{\Delta x(t,\eta_p)}{\eta_p}\biggr\}=\mathfrak{b}(\vartheta,\iota)+M\{\psi(t)y(t)\}.$$

Пусть далее $y_0(t)=y_0(t,h(\cdot))\stackrel{\text{def}}{=}\langle\widehat{\mu}(t),f'_{0v}(t,\widehat{x}(t),\widehat{v}(t),u)\rangle$, $t\in\mathbb{R}$. Теперь для всех пар $(\iota,h(\cdot))\in\mathbb{APS}\times T_{\widehat{v}(\cdot)}\mathfrak{S}$ полагаем (см. (3.7), (3.8) и обозначения в (3.3))

$$\mathfrak{a}(\vartheta,\iota,h(\cdot))=-\mathfrak{b}(\vartheta,\iota)-\mathfrak{c}(\vartheta,\iota)+M\{y_0(t,h(\cdot))\}+M\{\psi(t)y(t,h(\cdot))\}. \qquad (3.10)$$

Напомним далее, что справедливо включение $\{(x(\cdot,\varepsilon),v_\varepsilon(\cdot),\mu(\cdot,\varepsilon))\}_{\varepsilon\in(0,\widehat{\varepsilon}\,]}\subset D_c$, где $v_\varepsilon(\cdot)=v_\varepsilon(\cdot,h(\cdot))$ — это функция (см. (2.5)) из $\mathfrak{S}$, отвечающая $h(\cdot)\in T_{\widehat{v}(\cdot)}\mathfrak{S}$. Стало быть, определено отображение $(\varepsilon,\iota,h(\cdot))\mapsto\mathfrak{T}(x(\cdot,\varepsilon),v_\varepsilon(\cdot),\mu(\cdot,\varepsilon))$.

Лемма 3.6. *Для каждой $\vartheta\in\Xi$ и всех $(\iota,h(\cdot))\in\mathbb{APS}\times T_{\widehat{v}(\cdot)}\mathfrak{S}$*

$$\lim_{p\to\infty}\frac{1}{\eta_p}(\mathfrak{T}(x(\cdot,\eta_p),v_{\eta_p}(\cdot),\mu(\cdot,\eta_p))-\mathfrak{T}(\widehat{x}(\cdot),\widehat{v}(\cdot),\widehat{\mu}(\cdot)))=\mathfrak{a}(\vartheta,\iota,h(\cdot)).$$

Доказательство. При каждом $\varepsilon\in(0,\widehat{\varepsilon}\,]$ имеем следующие соотношения:

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\varepsilon}(\mathfrak{T}(x(\cdot,\varepsilon),v_\varepsilon(\cdot),\mu(\cdot,\varepsilon))-\mathfrak{T}(\widehat{x}(\cdot),\widehat{v}(\cdot),\widehat{\mu}(\cdot)))=M\{V_0(t,\varepsilon)\}+\\&\qquad+\frac{1}{\varepsilon}(\mathfrak{T}(x(\cdot,\varepsilon),\widehat{v}(\cdot),\mu(\cdot,\varepsilon))-\mathfrak{T}(\widehat{x}(\cdot),\widehat{v}(\cdot),\widehat{\mu}(\cdot)))=M\{V_0(t,\varepsilon)\}-I(\varepsilon)-\\&\qquad\qquad-M\biggl\{\psi(t)\frac{\Delta x(t,\varepsilon)}{\varepsilon}\biggr\}-\frac{1}{\varepsilon}M\{\langle\Delta\mu(t,\varepsilon),\mathfrak{f}_0(t,\widehat{x}(t),u)\rangle\},\end{aligned}$$

в которых

$$\begin{aligned}V_0(\varepsilon)&\stackrel{\text{def}}{=}M\biggl\{\langle\mu(t,\vartheta),\int_0^1 f'_{0v}(t,x(t,\varepsilon),v_\varepsilon(t,\vartheta),u)d\vartheta\rangle(h(t)+\eta(t,\varepsilon))\biggr\},\\I(\varepsilon)&=M\biggl\{\langle\mu(t,\varepsilon),\int_0^1(\mathfrak{f}'_{0x}(t,\widehat{x}(t)-\vartheta\Delta x(t,\varepsilon),u)-\mathfrak{f}'_{0x}(t,\widehat{x}(t),u))d\vartheta\rangle\frac{\Delta x(t,\varepsilon)}{\varepsilon}\biggr\}.\end{aligned}$$

Аналогично доказательству предельного соотношения в (2.25) показываем, что $\lim\limits_{\varepsilon\downarrow 0}V_0(\varepsilon)=M\{y_0(t)\}$. Далее, определив $w^{(4)}_\gamma(t)$ аналогично $w^{(1)}_\gamma(t)$ (см. (2.12)) при $f'_x=f'_{0x}$, получим $|I(\varepsilon)|\stackrel{(3.2)}{\leq}\varkappa\sup\limits_{t\in\mathbb{R}}\int\limits_t^{t+1}w^{(4)}_{\xi(\varepsilon)}(s)ds$, где $\xi(\varepsilon)=\|\Delta x(\cdot,\varepsilon)\|_{C(\mathbb{R},\mathbb{R}^n)}$. Учитывая лемму 1.1 и равенство (2.6), получаем $\lim\limits_{\varepsilon\downarrow 0}|I(\varepsilon)|=0$. Используя доказанные предельные равенства, лемму 3.5 и равенство (3.7), из приведенных в начале доказательства соотношений получаем утверждение леммы 3.6.

4. Доказательство теоремы 1.2

Доказательству теоремы 2.1 предпошлем следующее утверждение (см. (3.10) и замечание 1.1).

Лемма 4.1. *Если* $\mathfrak{a}(\vartheta,\iota,h(\cdot))<0$ *при некоторых* $\vartheta\in\Xi$ *и* $(\iota,h(\cdot))\in\mathbb{APS}\times T_{\widehat{v}(\cdot)}\mathfrak{S}$, *то найдется такой допустимый набор* $(x(\cdot),v(\cdot),u(\cdot))\in D$, *что* $I(x(\cdot),v(\cdot),u(\cdot))<\mathfrak{T}(\widehat{x}(\cdot),\widehat{v}(\cdot),\widehat{\mu}(\cdot))$.

Доказательство. По точке $\vartheta\in\Xi$ и последовательности $\iota=\{\nu(m)\}_{m\in\mathbb{Z}}\in\mathbb{APS}$ построим отображение $\mu(\cdot,\varepsilon)\in\mathrm{APM}_1$, определенное равенством (3.1). Пусть $v_\varepsilon(\cdot)\in\mathfrak{S}$ — функции (см. (2.5)), отвечающие условию $h(\cdot)\in T_{\widehat{v}(\cdot)}\mathfrak{S}$. В дальнейшем $(x(\cdot,\varepsilon),v_\varepsilon(\cdot),\mu(\cdot,\varepsilon))$ — допустимый набор, указанный в предыдущем пункте, для которого, не оговаривая, сохраняем связанные с ним константы $\widehat{\varepsilon}\in(0,\varrho]$ и последовательности $\{q_l\}_{l=1}^{\infty}$, $\{\eta_p\}_{p=1}^{\infty}$. Из леммы 3.1, равенств (2.14) и (2.4), а также включений (2.11) получаем

$$\lim_{\varepsilon\downarrow0}\sup_{t\in\mathbb{R}}\int_t^{t+1}|\langle\mu(s,\varepsilon),f'_x(s,x(s,\varepsilon),v_\varepsilon(s),u)\rangle-\langle\widehat{\mu}(s),\mathfrak{f}'_x(s,\widehat{x}(s),u)\rangle|ds=0.$$

Отсюда в силу э. д. системы (1.8) и свойства устойчивости э. д. к малым возмущениям [18] вытекает существование такого $\widetilde{\varepsilon}\in(0,\widehat{\varepsilon}]$, что при $\varepsilon\in[0,\widetilde{\varepsilon}]$ п. п. по Степанову система уравнений $\dot{y}=\langle\mu(t,\varepsilon),f'_x(t,x(t,\varepsilon),v_\varepsilon(t),u)\rangle y$, $(t,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$, допускает э. д. При этом существуют положительные константы $\widetilde{\mathfrak{r}}$, $\widetilde{\sigma}$ такие, что для функции Грина $\mathcal{G}(t,s;\varepsilon)$ этой системы выполнено неравенство $|\mathcal{G}(t,s;\varepsilon)|\le\widetilde{\mathfrak{r}}e^{-\widetilde{\sigma}|t-s|}$, $t,s\in\mathbb{R}$. Далее, в силу леммы 3.6 найдется такое $\mathfrak{p}\in\mathbb{N}$, что будет выполнено неравенство

$$\mathfrak{I}(x(\cdot,\eta_{\mathfrak{p}}),v_{\eta_{\mathfrak{p}}}(\cdot),\mu(\cdot,\eta_{\mathfrak{p}}))-\mathfrak{I}(\widehat{x}(\cdot),\widehat{v}(\cdot),\mu(\cdot))<\frac{\eta_{\mathfrak{p}}}{2}\mathfrak{a}(\vartheta,\iota,h(\cdot)),\tag{4.1}$$

и т. к. $\lim\limits_{p\to\infty}\eta_p=0$, то можно считать, что $\eta_{\mathfrak{p}}\in(0,\widetilde{\varepsilon}]$. С этим $\mathfrak{p}$ для отображения $\mu(\cdot,\eta_{\mathfrak{p}})\in\mathrm{APM}_1$ рассмотрим аппроксимирующую его последовательность $\{u_j\}_{j=1}^{\infty}\subset S(\mathbb{R},\mathfrak{U})$ [14], [25]. Так как функция $(t,u)\mapsto f(t,x(t,\eta_{\mathfrak{p}}),v_{\eta_{\mathfrak{p}}}(t),u)$ принадлежит $B(\mathbb{R}\times\mathfrak{U},\mathbb{R}^n)$ (см. теорему 1.1 и [15]), то [14], [25]

$$\lim_{\gamma\to0}\sup_{t\in\mathbb{R}}\left|\int\limits_t^{t+1}\langle\mu(s,\eta_{\mathfrak{p}})-\delta_{u_j(s)},f(s,x(s,\eta_{\mathfrak{p}}),v_{\eta_{\mathfrak{p}}}(s),u)\rangle ds\right|=0.\tag{4.2}$$

Кроме того, поскольку для системы $\dot{x}=\langle\mu(t,\eta_{\mathfrak{p}}),f(t,x,v_{\eta_{\mathfrak{p}}}(t),u)\rangle$ все условия теоремы 2.1 выполнены, то п. п. по Степанову система

$$\dot{x}=f(t,x,v_{\eta_{\mathfrak{p}}}(t),u_j(t)),$$

начиная с некоторого j_0, будет иметь такое п. п. по Бору решение $x_j(\cdot)$, что $\overline{\mathrm{orb}}(x_j)\subset\mathrm{comp}(G)$ и

$$\lim_{j\to\infty}\|\Delta x_j(\cdot,\eta_{\mathfrak{p}})\|_{C(\mathbb{R},\mathbb{R}^n)}=0,\quad\Delta x_j(\cdot,\eta_{\mathfrak{p}})=x(\cdot,\eta_{\mathfrak{p}})-x_j(\cdot).\tag{4.3}$$

Теперь из соотношений

$$|I(x_j(\cdot),v_{\eta_{\mathfrak{p}}}(\cdot),u_j(\cdot))-\mathfrak{T}(x(\cdot,\eta_{\mathfrak{p}}),v_{\eta_{\mathfrak{p}}}(\cdot),\mu(\cdot,\eta_{\mathfrak{p}}))|\le$$
$$\le\sup_{t\in\mathbb{R}}\int_t^{t+1}w^{(3)}_{\xi_j}(s)ds+\sup_{t\in\mathbb{R}}\left|\int_t^{t+1}\langle\mu(s,\eta_{\mathfrak{p}})-\delta_{u_j(s)},f_0(s,x(s,\eta_{\mathfrak{p}}),v_{\eta_{\mathfrak{p}}}(s),\mu)\rangle ds\right|,$$

где $\xi_j=\|\Delta x_j(\cdot,\eta_{\mathfrak{p}})\|_{C(\mathbb{R},\mathbb{R}^n)}$, учитывая (4.2) и (4.3), получаем

$$\lim_{j\to\infty}I(x_j(\cdot),v_{\eta_{\mathfrak{p}}}(\cdot),u_j(\cdot))=\mathfrak{T}(x(\cdot,\eta_{\mathfrak{p}}),v_{\eta_{\mathfrak{p}}}(\cdot),\mu(\cdot,\eta_{\mathfrak{p}})).$$

Поэтому в силу (4.1) при всех достаточно больших j будут выполнены неравенства

$$I(x_j(\cdot),v_{\eta_{\mathfrak{p}}}(\cdot),u_j(\cdot))<\mathfrak{T}(\widehat{x}(\cdot),\widehat{v}(\cdot),\widehat{\mu}(\cdot))+\frac{\eta_{\mathfrak{p}}}{4}\mathfrak{a}(\vartheta,\iota,h(\cdot))<\mathfrak{T}(\widehat{x}(\cdot),\widehat{v}(\cdot),\widehat{\mu}(\cdot)).\quad\square$$

Из леммы 4.1 и определения 1.4 вытекает

Следствие 4.1. Если набор $(\widehat{x}(\cdot), \widehat{v}(\cdot), \widehat{\mu}(\cdot)) \in D_c$ является решением в ослабленном смысле для задачи (1.3), то $\mathfrak{a}(\vartheta, \iota, h(\cdot)) \geq 0$ при каждом $\vartheta \in \Xi$ и всех $(\iota, h(\cdot)) \in \mathbb{APS} \times T_{\widehat{v}(\cdot)}\mathfrak{S}$.

Далее понадобится понятие стекловского усреднения для $\mu(\cdot) \in \mathrm{APM}_1$. Для его определения при фиксированном $\zeta > 0$ и каждом $t \in \mathbb{R}$ рассмотрим функционал

$$c(\cdot) \mapsto \frac{1}{\zeta} \int_t^{t+\zeta} \langle \mu(s), c(u) \rangle ds, \quad c(\cdot) \in C(\mathfrak{U}, \mathbb{R}),$$

который, как легко видеть, принадлежит $(C(\mathfrak{U}, \mathbb{R}))^*$. Поэтому по теореме Рисса [9] с учетом $\mu(\cdot) \in \mathrm{APM}_1 \subset \mathcal{M}(\mathbb{R}, \mathrm{rpm}(\mathfrak{U}))$ вытекает существование такой меры $\mu(t, \zeta) \in \mathrm{rpm}(\mathfrak{U})$, что для каждой функции $c(\cdot) \in C(\mathfrak{U}, \mathbb{R})$ будет выполнено равенство

$$\langle \mu(t, \zeta), c(u) \rangle = \frac{1}{\zeta} \int_t^{t+\zeta} \langle \mu(s), c(u) \rangle ds, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{4.4}$$

Из (4.4) следует, что для каждой функции $c(\cdot) \in C(\mathfrak{U}, \mathbb{R})$ отображение $t \mapsto \langle \mu(t, \zeta), c(u) \rangle$ непрерывно на $\mathbb{R}$. Поэтому $\mu(\cdot, \zeta) \in C(\mathbb{R}, (\mathrm{rpm}(\mathfrak{U}), \rho_w))$, где ρ_w — метрика на $\mathrm{rpm}(\mathfrak{U})$, индуцированная нормой $|\cdot|_w$.

Определение 4.1. Пусть $\mu(\cdot) \in \mathrm{APM}_1$. Тогда отображение $\mu(\cdot, \zeta) \in C(\mathbb{R}, (\mathrm{rpm}(\mathfrak{U}), \rho_w))$, удовлетворяющее при каждом $t \in \mathbb{R}$ и всякой функции $c(\cdot) \in C(\mathfrak{U}, \mathbb{R})$ равенству (4.4), называется стекловским усреднением для $\mu(\cdot)$.

В [14] доказано, что если $\mu(\cdot) \in \mathrm{APM}_1$, то $\mu(\cdot, \zeta)$ принадлежит множеству $B(\mathbb{R}, \mathrm{rpm}(\mathfrak{U})) \subset C(\mathbb{R}, (\mathrm{rpm}(\mathfrak{U}), \rho_w))$, состоящему из мерозначных п. п. по Бору функций. Там же доказана

Теорема 4.1. *Пусть отображение $\mu(\cdot) \in \mathrm{APM}_1$ и $\mu(\cdot, \zeta) \in B(\mathbb{R}, \mathrm{rpm}(\mathfrak{U}))$ — его стекловское усреднение. Тогда для каждой функции $g \in S(\mathbb{R}, C(\mathfrak{U}, \mathbb{R}))$*

$$\lim_{\zeta \downarrow 0} \sup_{t \in \mathbb{R}} \left| \int_t^{t+1} \langle \mu(s, \zeta) - \mu(s), g(s, u) \rangle ds \right| = 0$$

и, следовательно, $\lim\limits_{\zeta \downarrow 0} M\{\langle \mu(t, \zeta), g(t, u) \rangle\} = M\{\langle \mu(t), g(t, u) \rangle\}$.

Докажем, наконец, теорему 1.2. Для произвольного фиксированного $\mu \in \mathrm{APM}_1$ рассмотрим его стекловское усреднение $\mu(\cdot, \zeta)$. Так как $\mu(\cdot, \zeta) \in B(\mathbb{R}, \mathrm{rpm}(\mathfrak{U}))$, то [14] последовательность $\iota(\vartheta) = \{\mu(\vartheta + ma, \zeta)\}_{m \in \mathbb{Z}} \subset \mathrm{rpm}(\mathfrak{U})$ при каждом $\vartheta \in [0, a]$ является п. п. и, следовательно (см. лемму 3.3), при каждом $\vartheta \in \Xi$ существуют пределы $\mathfrak{c}(\vartheta, \iota(\vartheta))$ и $\mathfrak{b}(\vartheta, \iota(\vartheta))$ (см. (3.7) и (3.8)). Так как $(\widehat{x}(\cdot), \widehat{v}(\cdot), \widehat{\mu}(\cdot))$ — решение задачи (1.3) в ослабленном смысле, то по следствию 4.1 при всех $\vartheta \in \Xi$ и $h(\cdot) \in T_{\widehat{v}(\cdot)}\mathfrak{S}$ будет выполнено неравенство $\mathfrak{a}(\vartheta, \iota(\vartheta), h(\cdot)) \geq 0$ или (см.(3.7), (3.8)–(3.10) и (2.22))

$$\lim_{l \to \infty} \frac{1}{q_l a} \sum_{m=0}^{q_l - 1} \Bigg(\Delta \mathfrak{f}_0(\vartheta + ma, \mu(\vartheta + ma, \zeta)) +$$
$$+ \int_0^a \psi(t + ma) \sum_{k=0}^{\infty} \{\mathcal{G}_m(t, \vartheta - (k+1)a) \Delta \mathfrak{f}(\vartheta + ma - (k+1)a, \mu(\vartheta + ma, \zeta)) +$$
$$+ \mathcal{G}_m(t, \vartheta + ka) \Delta \mathfrak{f}(\vartheta + ma + ka, \mu(\vartheta + ma, \zeta))\} dt \Bigg) - M\{\langle \widehat{\mu}(t), H'_v(t, \widehat{x}(t), \widehat{v}(t), u, \widehat{p}(t)) \rangle h(t)\} \geq 0.$$

Проинтегрировав последнее неравенство по ϑ от 0 до a, для всех $h(\cdot) \in T_{\widehat{v}(\cdot)}\mathfrak{S}$ получаем

$$M\{\Delta \mathfrak{f}(t, \mu(t, \zeta)) + \langle \widehat{\mu}(t), \mathfrak{f}_{0x}(t, \widehat{x}(t), u) \rangle z(t, h)\} - aM\{\langle \widehat{\mu}(t), H'_v(t, \widehat{x}(t), \widehat{v}(t), u, \widehat{p}(t)) \rangle h(t)\} \geq 0,$$

где $z(t,\zeta) = \int\limits_{\mathbb{R}} \mathcal{G}(t,\vartheta)\Delta f(\vartheta,\mu(\vartheta,\zeta))d\vartheta$. Отсюда в силу произвольности $h(\cdot) \in T_{\widehat{v}(\cdot)}\mathfrak{S}$ вытекает неравенство (1.9). Далее, т. к. $z(\cdot,\zeta)$ — п. п. по Бору решение системы

$$\dot{y} = \langle\widehat{\mu}(t), \mathfrak{f}'_x(t,\widehat{x}(t),u)\rangle y + \Delta\mathfrak{f}(t,\mu(t,\zeta)),$$

то для п. п. по Бору решения $\widehat{p}(\cdot)$ системы (1.10) выполнено равенство

$$\frac{d}{dt}(\widehat{p}(t), z(t,\zeta)) = \langle\widehat{\mu}(t), \mathfrak{f}_{0x}(t,\widehat{x}(t),u)\rangle z(t,\zeta) + \Delta\mathfrak{f}(t,\mu(t,\zeta)).$$

Поэтому, принимая во внимание, что $\sup\limits_{t\in\mathbb{R}}|\widehat{p}(t)|, \sup\limits_{t\in\mathbb{R}}|z(t,\zeta)| < \infty$, получаем равенство

$$M\{\langle\widehat{\mu}(t), \mathfrak{f}_{0x}(t,\widehat{x}(t),u)\rangle z(t,\zeta)\} = -M\{\widehat{p}(t)\Delta\mathfrak{f}(t,\mu(t,\zeta))\},$$

из которого совместно с доказанным выше неравенством вытекает неравенство

$$M\{\mathbb{H}(t,\widehat{x}(t),\widehat{v}(t),\mu(t,\zeta),\widehat{p}(t))\} \le M\{\mathbb{H}(t,\widehat{x}(t),\widehat{v}(t),\mu(t),\widehat{p}(t))\}.$$

Далее, т.к. отображение $(t,u) \mapsto H(t,\widehat{x}(t),\widehat{v}(t),u,\widehat{p}(t))$ принадлежит пространству $B(\mathbb{R}\times\mathfrak{U},\mathbb{R})$, то по теореме 4.1

$$M\{\mathbb{H}(t,\widehat{x}(t),\widehat{v}(t),\mu(t),\widehat{p}(t))\} = M\{\langle\mu(t), H(t,\widehat{x}(t),\widehat{v}(t),u,\widehat{p}(t))\rangle\} =$$

$$= \lim_{\zeta\downarrow 0} M\{\langle\mu(t,\zeta), H(t,\widehat{x}(t),\widehat{v}(t),u,\widehat{p}(t))\rangle\} \overset{(4.6)}{\le} M\{\mathbb{H}(t,\widehat{x}(t),\widehat{v}(t),\widehat{\mu}(t),\widehat{p}(t))\},$$

и тем самым теорема 1.2 доказана.

Из определения 1.4 и теоремы 1.2 вытекает

Теорема 4.2. *Пусть допустимый процесс $(\widehat{x}(\cdot),\widehat{v}(\cdot),\widehat{u}(\cdot)) \in D$ является решением задачи (1.5) и п. п. по Степанову система $\dot{y} = f'_x(t,\widehat{x}(t),\widehat{v}(t),\widehat{u}(t))y$ допускает э. д. Тогда $\max\limits_{u\in\mathfrak{U}} H(t,\widehat{x}(t),\widehat{v}(t),u,\widehat{p}(t)) = H(t,\widehat{x}(t),\widehat{v}(t),\widehat{u}(t),\widehat{p}(t))$ при п. в. $t\in\mathbb{R}$, где $\widehat{p}(t)\in\mathbb{R}^{n*}$ — п. п. по Бору решение системы $\dot{p} = -pf'_x(t,\widehat{x}(t),\widehat{v}(t),\widehat{u}(t)) + f'_{0x}(t,\widehat{x}(t),\widehat{v}(t),\widehat{u}(t))$ и $M\{H'_v(t,\widehat{x}(t),\widehat{v}(t),\widehat{u}(t))h(t)\} \le 0$ при каждом $h(\cdot)\in T_{\widehat{v}(\cdot)}\mathfrak{S}$.*

Пример 4.1. Пусть $\Gamma = \{\mathbb{M}\in\mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n) : \mathrm{Re}\,\lambda_j(\mathbb{M}) < 0,\ j=1,\dots,n\}$ и $A\in\mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n)$, $b\in\mathbb{R}^n$ такие, что матрица $\mathbb{K} = [b, Ab, \dots, A^{n-1}b]$ невырождена. Зафиксируем также такую функцию $f\in S(\mathbb{R},\mathbb{R}^n)$, что $M\{f(t)\}\ne 0$ и при $v\in\mathfrak{S} = \{\mathfrak{s}\in\mathbb{R}^n : A + b\mathfrak{s}^*\in\Gamma\}$ рассмотрим систему

$$\dot{x} = (A + bv^*)x + f(t), \quad (t,x)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n. \tag{4.5}$$

Из определения $\mathfrak{S}$ вытекает, что каждому $v\in\mathfrak{S}$ отвечает единственное п. п. по Бору решение $x(\cdot) = x(\cdot,v)$ системы (4.5). Теперь рассмотрим задачу

$$J(v) = M\{q^*x(t,v)\} \to \inf, \quad v\in\mathfrak{S}, \quad q\in\mathbb{R}^n. \tag{4.6}$$

Отметим, что аналогичная задача для случая, когда f — непрерывная ω-периодическая функция с условием $M\{f(t)\} = \frac{1}{\omega}\int\limits_0^\omega f(t)dt \ne 0$, решена в [3].

Поскольку множество $\mathfrak{S}$ открыто в $\mathbb{R}^n$, то из теоремы 4.2 (см. замечание 1.3 и определение 1.4) получаем, что решение $\widehat{v}\in\mathfrak{S}$ задачи (4.6) необходимо удовлетворяет равенству $M\{\widehat{p}(t)b\widehat{x}(t)\} = 0$, где $\widehat{x}(t) = x(t,\widehat{v})$, $\widehat{p}(t)\in\mathbb{R}^{n*}$, $t\in\mathbb{R}$, — п. п. по Бору решение системы $\dot{p} = -p(A + b\widehat{v}^*) + q^*$, а т. к. $\widehat{p}(t)\equiv q^*(A + b\widehat{v}^*)^{-1}$ и $(A + b\widehat{v}^*)M\{\widehat{x}(t)\} + M\{f(t)\} = 0$, то

$$q^*(A + b\widehat{v}^*)^{-1}b = 0. \tag{4.7}$$

С другой стороны, поскольку (см. (4.6) и прием, использованный в конце доказательства теоремы 1.2) $J(\widehat{v}) = -q^*(A + b\widehat{v}^*)^{-1}M\{f(t)\}$, то для нахождения $\widehat{v}$ достаточно найти решение уравнения (4.7). С этой целью приведем краткое описание множества $\mathfrak{S}$. Рассмотрим множество Λ, состоящее из таких $\lambda=(\lambda_j)_{j=1}^n \in \mathbb{R}^n$, что полином $P(\lambda,z)=z^n-\sum\limits_{j=1}^n \lambda_j z^{j-1}$ гурвицев, и пусть $\eta=[0,\dots,0,1]\mathbb{K}^{-1}$. Тогда (см. [3], а также [26]) $\mathfrak{S}=\{-(\eta P(\lambda,A))^*,\ \lambda\in\Lambda\}$. В силу вышесказанного получаем следующее утверждение Е.Л. Тонкова в п. п. случае.

Теорема 4.3. *Пусть $\widehat{\lambda}\in\Lambda$ — решение уравнения $q^*(A-b\eta P(\lambda,A))^{-1}b=0$, $\lambda\in\Lambda$. Тогда $\widehat{v}=\eta P(\widehat{\lambda},A)$ — решение задачи* (4.6) *и $J(\widehat{v})=-q^*(A-b\eta P(\widehat{\lambda},A))^{-1}M\{f(t)\}$.*

Пример 4.2. Пусть

$$\mathfrak{S}=\{v(\cdot)\in B(\mathbb{R},\mathbb{R}^k): M\{|v(t)|^2\}\le 1\}. \tag{4.8}$$

Покажем, что если $\widehat{v}(\cdot)\in\mathfrak{S}$ и $M\{|\widehat{v}(t)|^2\}=1$, то

$$T_{\widehat{v}(\cdot)}\mathfrak{S}=\{h(\cdot)\in B(\mathbb{R},\mathbb{R}^k): M\{\widehat{v}^*(t)h(t)\}\le 0\}. \tag{4.9}$$

В самом деле, на $B(\mathbb{R},\mathbb{R}^k)$ определено [6] скалярное произведение $(v,w)=M\{v^*(t)w(t)\}$, $v,w\in B(\mathbb{R},\mathbb{R}^k)$. Полученное гильбертово пространство обозначим через APC. Следовательно, $\mathfrak{S}$ — единичный шар в APC и $\widehat{v}(\cdot)$ определяет на APC линейный непрерывный функционал $v(\cdot)\mapsto(\widehat{v}(\cdot),v(\cdot))$, $v(\cdot)\in APC$. Поэтому, используя вид [27] нормального конуса N_xK для шара K единичного радиуса в нормированном пространстве $(X,\|\cdot\|)$ в точке $x\in K$, $\|x\|=1$, получаем, что в нашем случае $N_{\widehat{v}(\cdot)}\mathfrak{S}=\{\lambda\widehat{v}(\cdot)\}_{\lambda>0}$ и, стало быть, касательный конус $T_{\widehat{v}(\cdot)}\mathfrak{S}$ задается равенством (4.9).

Заметим здесь, что множество $\mathfrak{S}$, определенное равенством (4.8), в задачах управления колебаниями в теории электрических цепей может быть интерпретировано как ограничение мощности входа.

Используя пример 4.2, приведем еще один пример, иллюстрирующий теорему 4.2.

Пример 4.3. Рассмотрим задачу

$$J(v(\cdot))=M\{\tfrac12 v^*(t)v(t)-x^*(t)x(t)\}\to\inf,\quad v(\cdot)\in\mathfrak{S}, \tag{4.10}$$

в которой $\mathfrak{S}$ определено равенством (4.8) при $k=2$, а $x(\cdot)=x(\cdot,v(\cdot))$ — п. п. по Бору решение системы

$$\dot{x}=Ax-v(t),\ x\in\mathbb{R}^2,\ A\in\operatorname{Hom}(\mathbb{R}^2), \tag{4.11}$$

отвечающее $v(\cdot)\in\mathfrak{S}$, в которой собственные значения матрицы A равны $1\pm i\beta$ $(\beta>0)$. По теореме 4.2 для решения $\widehat{v}(\cdot)$ задачи (4.10) при всех $h(\cdot)\in T_{\widehat{v}(\cdot)}\mathfrak{S}$ будет выполнено неравенство $M\{-(\widehat{p}(t)+\widehat{v}^*(t))h(t)\}\le 0$, где $\widehat{p}(\cdot)$ — п. п. по Бору решение системы

$$\dot{p}=-pA-2\widehat{x}^*(t),\quad p\in\mathbb{R}^{2*},\quad \widehat{x}(\cdot)=x(\cdot,\widehat{v}(\cdot)). \tag{4.12}$$

Из последнего неравенства получаем $-(\widehat{p}^*(\cdot)+\widehat{v}^*(\cdot))\in N_{\widehat{v}(\cdot)}\mathfrak{S}=\{\lambda\widehat{v}(\cdot)\}_{\lambda>0}$, т. е. при некотором $\widehat{\lambda}>0$

$$-\widehat{p}^*(\cdot)=(1+\widehat{\lambda})\widehat{v}(\cdot). \tag{4.13}$$

Таким образом (см. (4.11)–(4.13)), пара $(\widehat{x}(\cdot),\widehat{p}^*(\cdot))$ — п. п. по Бору решение системы

$$\begin{bmatrix}\dot{x}\\ \dot{y}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}A & \frac{1}{1+\widehat{\lambda}}E\\ -2E & -A^*\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix},\quad x,y\in\mathbb{R}^2.$$

Несложно показать, что эта система имеет периодические решения, отвечающие лишь $\widehat{\lambda}\in(0,1]$, и $\widehat{\lambda}=1$ отвечает пара $(\widehat{x}(\cdot),\widehat{p}^*(\cdot))$, в которой $\widehat{x}(\cdot)=-\widehat{p}^*(\cdot)/2$, $\widehat{p}(t)=[-2\cos\beta t,2\sin\beta t]$. Наконец, поскольку (см. (4.11), (4.12)) $M\{\frac12\widehat{p}^*(t)\widehat{v}(t)\}=-M\{\widehat{x}^*(t)\widehat{x}(t)\}$, то (см. (4.10) и (4.13)) $J(\widehat{v}(\cdot))=$

$-\frac{\widehat{\lambda}}{2}M\{\widehat{v}^*(t)\widehat{v}(t)\} \geq -\frac{\widehat{\lambda}}{2}$. Следовательно, решением задачи (4.10) будет $2\pi/\beta$-периодическая функция $\widehat{v}(t) = [\cos\beta t, -\sin\beta t]^*$, $t \in \mathbb{R}$, и $J(\widehat{v}(\cdot)) = -\frac{1}{2}$.

Замечание 4.1. Отметим, что схему решения задачи (4.10) можно использовать при доказательстве существования решения и для более общей задачи, рассмотренной в [28].

Литература

1. Арутюнов А.В. *Условия экстремума. Анормальные и вырожденные задачи.* – М.: Изд-во “Факториал”, 1997. – 256 с.
2. Дмитрук А.В. *Принцип максимума для общей задачи оптимального управления с фазовыми и регулярными смешанными ограничениями* // Оптимальность управляемых динамических систем. – М.: ВНИИСИ, 1990. – Вып. 14. – С. 26–42.
3. Тонков Е.Л. *Оптимальные периодические движения управляемой системы* // Матем. физика. – 1977. – Вып. 21. – С. 45–59.
4. Gilbert E.G. *Optimal periodic control*: *a general theory of necessary conditions* // SIAM J. Contr. Optimisation. – 1977. – V. 15. – № 5. – P. 717–746.
5. Иванов А.Г. *Об оптимальном управлении почти периодическими движениями* // ПММ. – 1992. – Т. 56. – Вып. 5. – С. 745–753.
6. Левитан Б.М. *Почти периодические функции.* – М.: Гостехиздат, 1953. – 396 с.
7. Fink A.M. *Almost periodic differential equation* // Lect. Notes Math. – 1973. – V. 377. – 336 p.
8. Иванов А.Г. *О непрерывной дифференцируемости по параметру почти периодического решения* // Дифференц. уравнения. – 2001. – Т. 37. – № 4. – С. 478–487.
9. Варга Дж. *Оптимальное управление дифференциальными и функциональными уравнениями.* – М.: Наука, 1977. – 622 с.
10. Гамкрелидзе Р.В. *Основы оптимального управления.* – Тбилиси: Изд-во Тбил. ун-та, 1975. – 256 с.
11. Ченцов А.Г. *Приложения теории меры к задачам управления.* – Свердловск: Сред.-Урал. кн. изд-во, 1985. – 126 с.
12. Красовский Н.Н. *Управление динамической системой. Задача о минимуме гарантированного результата.* – М.: Наука, 1985. – 518 с.
13. Субботин А.И., Ченцов А.Г. *Оптимизация гарантии в задачах управления.* – М.: Наука, 1981. – 287 с.
14. Иванов А.Г. *Элементы аппарата задач оптимального управления почти периодическими движениями.* I. Удм. ун-т. – Ижевск, 2001. – 49 с. – Деп. в ВИНИТИ 28.06.01, № 1536-В01.
15. Иванов А.Г. *Об эквивалентности дифференциальных включений управляемых почти периодических систем* // Дифференц. уравнения. – 1997. – Т. 33. – № 7. – С. 876–884.
16. Иванов А.Г. *О корректности расширения задач управления почти периодическими движениями* // Изв. вузов. Математика. – 2002. – № 6. – С. 14–25.
17. Иванов А.Г. *О непрерывной зависимости почти периодического решения от мерозначного управления* // Дифференц. уравнения. – 1992. – Т. 28. – №11. – С. 1907–1915.
18. Далецкий Ю.Л., Крейн М.Г. *Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве.* – М.: Наука, 1970. – 534 с.
19. Массера Х.Л., Шеффер Х.Х. *Линейные дифференциальные уравнения и функциональные пространства.* – М.: Мир, 1970. – 456 с.
20. Иванов А.Г. *О почти периодической ляпуновской задаче* // ПММ. – 1991. – Т. 55. – Вып. 5. – С. 718–724.
21. Иоффе А.Д., Тихомиров В.М. *Теория экстремальных задач.* – М.: Наука, 1974. – 479 с.
22. Иванов А.Г. *О ряде свойств линейных почти периодических систем управления.* Удм. ун-т. – Ижевск, 2001. – 25 с. – Деп. в ВИНИТИ 27.08.01, № 1302-В01.
23. Самойленко А.М., Перестюк Н.А. *Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием.* – Киев: Вища школа, 1987. – 287 с.

24. Иванов А.Г. *Об оптимальном управлении почти периодическими движениями при наличии ограничений на средние типа равенств и неравенств.* I // Дифференц. уравнения. – 1997. – Т. 33. – № 3. – С. 316–323.
25. Иванов А.Г. *Об одном свойстве почти периодического интеграла, зависящего от параметра* // Изв. вузов. Математика. – 2001. – № 6. – С. 34–43.
26. Тонков Е.Л. *Устойчивость решений обыкновенных дифференциальных уравнений.* – М.: Изд-во Московского ин-та хим. машиностр., 1972. – 87 с.
27. Обэн Ж.-П. *Нелинейный анализ и его экономические приложения.* – М.: Мир, 1988. – 264 с.
28. Иванов А.Г. *О существовании почти периодического решения линейной системы с квадратичным функционалом качества* // Дифференц. уравнения. – 2001. – Т. 37. – № 2. – С. 203–211.

Удмуртский государственный университет

Поступила
20.06.2002