ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2006 МАТЕМАТИКА № 12 (535)

УДК 519.853

Е.О. МАЗУРКЕВИЧ

МЕТОД РЕГУЛЯРИЗАЦИИ ДЛЯ ЗАДАЧ ОЛИГОПОЛИСТИЧЕСКОГО РАВНОВЕСИЯ

1. Введение

Пусть заданы открытое множество V и непустое выпуклое подмножество $K \subseteq V$ в n-мерном евклидовом пространстве R^n, отображение $G : V \to R^n$, и выпуклая, но необязательно дифференцируемая функция $f : V \to R$. Задача состоит в определении точки $x^* \in K$ такой, что выполняется смешанное вариационное неравенство

$$\langle G(x^*), x - x^* \rangle + f(x) - f(x^*) \geq 0 \quad \forall x \in K. \tag{1}$$

Во многих неравенствах вида (1), возникающих в приложениях, основное отображение G обладает свойствами порядковой монотонности. В этом случае исходную задачу можно исследовать и решать, например, с помощью подхода, основанного на D-интервальных функциях, который был предложен для таких задач в [1]. Однако применение этого подхода требует невырожденности, т. е. выполнения строгих свойств порядковой монотонности основного отображения. В случае вырожденности отображения G можно применить комбинацию методов спуска и классического метода регуляризации. Однако в отличие от обычного монотонного случая оказалось, что метод регуляризации не гарантирует сходимости в условиях порядковой монотонности даже для однозначных задач дополнительности, когда допустимое множество неограничено ([2]; [3], раздел 12.2). Поэтому актуальным является вопрос о достаточных условиях сходимости метода, которые должны быть приспособлены для конкретного класса задач.

В данной работе этот вопрос решается применительно к модели олигополистического равновесия, которая при достаточно естественных условиях может быть сформулирована в виде смешанного вариационного неравенства вида (1), причем основное отображение обладает свойствами порядковой монотонности, но в общем случае является вырожденным. Для изучаемой задачи обоснованы различные варианты метода регуляризации, в том числе при неограниченном допустимом множестве.

Пусть L – произвольное подмножество множества $N = \{1, \dots, n\}$. Обозначим через A_L квадратную диагональную матрицу порядка n, чьи диагональные элементы определены следующим образом:

$$a_{ii} > 0, \text{ если } i \in L; \quad a_{ii} = 0, \text{ если } i \notin L.$$

Тогда A_N — матрица с положительной диагональю. Далее, если $a_{ii} = 1$ для всех i, то $A_N = I_N$, где I_N — единичная матрица порядка n.

2. Вспомогательные результаты

Вначале напомним некоторые определения и приведем свойства, которые будут использоваться в дальнейших рассуждениях.

Определение 2.1 ([4]). Квадратная матрица A порядка n называется
a) P-*матрицей*, если все ее главные миноры положительные,
b) P_0-*матрицей*, если все ее главные миноры неотрицательные.

Эти классы матриц естественным образом порождают соответствующие классы аффинных отображений вида $F(x) = Ax + b$ с нетрудным обобщением на случай нелинейных отображений. Для индексного множества $L = \{i_1, \ldots, i_l\} \subseteq N = \{1, \ldots, n\}$ обозначим через $Q_L(x)$ квадратную матрицу с элементами $\frac{\partial G_i(x)}{\partial x_j}$ для $i, j \in L$; $x_L = (x_i)_{i \in L}$, значит, $Q_N(x) = \nabla G(x)$.

Определение 2.2. Пусть X — выпуклое подмножество в R^n. Отображение $F : X \to R^n$ называется

a) *P_0-отображением* [5], если для любой пары точек $x, y \in X$, $x \neq y$, существует индекс i такой, что $x_i \neq y_i$ и $(x_i - y_i)(F_i(x) - F_i(y)) \geq 0$,

b) *P-отображением* [5], если для любой пары точек $x, y \in X$, $x \neq y$, существует индекс i такой, что $(x_i - y_i)(F_i(x) - F_i(y)) \geq 0$,

c) *строгим P-отображением* [1], если существует число $\gamma > 0$ такое, что $F - \gamma I_N$ есть P-отображение.

Если отображение F аффинно, т. е. $F(x) = Ax + b$, то F есть P-отображение (соответственно P_0-отображение) тогда и только тогда, когда его якобиан $\nabla F(x) = A$ есть P-матрица (соответственно P_0-матрица) [5]. В общем нелинейном случае, если $\nabla F(x)$ — P-матрица для любого элемента x, то F — P-отображение, но обратное утверждение в общем случае неверно. В то же время F есть P_0-отображение тогда и только тогда, когда $\nabla F(x)$ есть P_0-матрица. Кроме того, если F есть строгое P-отображение, то $\nabla F(x)$ есть P-матрица [1], [2], [5]. Заметим, что если однозначное отображение монотонно (соответственно строго монотонно, сильно монотонно), то оно является P_0-отображением (соответственно P-отображением, строгим P-отображением), но обратные утверждения в общем случае также неверны.

Опираясь на свойства P-отображений, можно получить результаты существования и единственности решений для смешанных вариационных неравенств, которые будут использоваться для обоснования корректности метода регуляризации.

Рассмотрим задачу (1) при следующих предположениях:

(A1) *отображение $G : R^n_+ \to R^n$ непрерывно на множестве K,*

(A2) *множество K имеет вид параллелепипеда, т. е.*

$$K = K_1 \times K_2 \times \cdots \times K_n,$$

где $K_i = [\alpha_i, \beta_i] \subseteq [0, +\infty]$ для всех $i = 1, \ldots, n$,

(A3) *функция f имеет вид $f(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} f_i(x_i)$, где $f_i : K_i \to R$ — выпуклая непрерывная функция для всех $i = 1, \ldots, n$.*

Заметим, что из (A3) следует, что K – непустое, выпуклое и замкнутое множество. Если $\alpha_i = 0$ и $\beta_i = +\infty$ для всех $i = 1, \ldots, n$, то $K = R^n_+$.

Предложение 2.1. a) ([1], предложение 3). *Пусть выполняются условия* (A1)–(A3)*, и G — строгое P-отображение. Тогда задача* (1) *имеет единственное решение.*

b) ([1], следствие 4.3). *Пусть выполняются условия* (A1)–(A3)*, G — P-отображение и K — ограниченное множество. Тогда задача* (1) *имеет единственное решение.*

3. Метод регуляризации для общей модели олигополистического равновесия

Модели равновесия в экономике в условиях несовершенной конкуренции привлекают внимание в силу их широкой распространенности в реальных экономических системах. Классической в этой области является модель олигополии, простейший случай которой рассматривался еще А. Курно. Кроме того, в виде такой же модели записываются многие задачи управления водными ресурсами, контроля окружающей среды и т. п. (напр., [6], [7]).

Рассмотрим модель олигополистического равновесия, где n производителей предлагают однородный продукт. Обозначим через $p(\sigma)$ цену товара на рынке при объеме поставки σ. Если

i-й производитель предлагает q_i единиц товара, то объем предложения товара на рынке определяется очевидным образом: $\sigma_q = \sum\limits_{i=1}^{n} q_i$.

Обозначим через $f_i(q_i)$ затраты i-го производителя при производстве q_i единиц товара. Тогда доход i-го производителя определяется формулой $\varphi_i(q) = q_i p(\sigma_q) - f_i(q_i)$.

Как обычно, количество выпускаемого товара, предлагаемое каждой фирмой, неотрицательно и может быть ограничено сверху, т. е. $0 \leq q_i \leq \beta_i$, $i = 1, \ldots, n$. В данной модели точка равновесия q^* определяется как точка равновесия по Нэшу в бескоалиционной игре n лиц с функциями выигрыша φ_i. Иначе говоря, точка $q^* = (q_1^*, q_2^*, \ldots, q_n^*)$ есть решение задачи олигополистического равновесия, если каждая компонента q_i^* есть решение задачи оптимизации

$$\max_{0 \leq q_i \leq \beta_i} \to \{q_i p(q_i + \sigma_i^*) - f_i(q_i)\}, \tag{2}$$

где $\sigma_i^* = \sum\limits_{j=1, j \neq i}^{n} q_j^*$, $i = 1, \ldots, n$.

Преобразуем эту задачу к смешанному вариационному неравенству. Следующий набор дополнительных предположений соответствует общепринятому экономическому поведению участников.

(H1) *Функция цены $p(\sigma)$ невозрастающая, непрерывно дифференцируемая*; *функция дохода $\sigma p(\sigma)$ вогнута для $\sigma \geq 0$. Функции затрат $f_i : R_+^n \to R$ выпуклые, но в общем случае не обязательно дифференцируемые для $i = 1, \ldots, n$.*

В отличие от уже известных условий (напр., [6]), здесь допускается недифференцируемость функций затрат, что позволяет учитывать ситуацию, когда существует несколько технологий процесса производства, и расширить область приложений. Из предположений (H1) следует, что каждая i-я функция дохода φ_i вогнута на R_+ ([8], лемма 1). Следовательно, (2) есть задача вогнутой максимизации. Далее, полагаем

$$K = K_1 \times K_2 \times \cdots \times K_n, \quad K_i = [0, \beta_i], \quad i = 1, \ldots, n. \tag{3}$$

Определим многозначное отображение $M : R_+^n \to \Pi(R^n)$ по формуле

$$M(q) = (M_1(q), \ldots, M_n(q)) = (\partial_{q_1}[-\varphi_1(q)], \ldots, \partial_{q_n}[-\varphi_n(q)]),$$

где $M_i(q) = \partial_{q_i}[-\varphi_i(q)] = G_i(q) + \partial f_i(q_i)$, и $G_i(q) = -p(\sigma_q) - q_i p'(\sigma_q)$ для всех $i = 1, \ldots, n$. Тогда (напр., [8]; [9], гл. 5) задача нахождения по Нэшу в модели олигополистического равновесия может быть записана в виде вариационного неравенства: *найти точку $q^* \in K$ такую, что*

$$\exists d_i^* \in \partial f_i(q_i^*), \quad i = 1, \ldots, n; \quad \langle G(q^*), q - q^* \rangle + \sum_{i=1}^{n} d_i^*(q_i - q_i^*) \geq 0 \quad \forall q \in K,$$

что эквивалентно ([1], предложение 1)

$$\langle G(q^*), q - q^* \rangle + \sum_{i=1}^{n} [f_i(q_i) - f_i(q_i^*)] \geq 0 \quad \forall q \in K. \tag{4}$$

Иначе говоря, справедливо

Предложение 3.1. *Если выполняются условия* (H1), *то задача олигополистического равновесия эквивалентна задаче* (4).

При предположениях (H1) для задачи (4) выполняются предположения (A1)–(A3). Очевидно, что если $\beta_i = +\infty$ для всех $i = 1, \ldots, n$, то $K = R_+^n$.

Поскольку $p(\sigma)$ — невозрастающая функция, то $p^{'}(\sigma) \le 0$. Аналогично, т. к. функция $\mu(\sigma) = \sigma p(\sigma)$ вогнута, то $\mu''(\sigma) \le 0$. Положим для краткости $\alpha_i = -p'(\sigma_q) - q_i p''(\sigma_q)$ и $\beta = -p'(\sigma_q)$. Тогда имеем

$$\nabla G(q) = \begin{pmatrix} \beta+\alpha_1 & \alpha_1 & \alpha_1 & \dots & \alpha_1 \\ \alpha_2 & \beta+\alpha_2 & \alpha_2 & \dots & \alpha_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_n & \alpha_n & \alpha_n & \dots & \beta+\alpha_n \end{pmatrix}.$$

Лемма 3.1. *Если* $L = \{1, \dots, l\}$, *то*

$$\det Q_L(q) = \left[-(l+1)p'(\sigma_q) - \left(\sum_{i=1}^{l} q_i\right) p''(\sigma_q)\right] (-p'(\sigma_q))^{l-1}.$$

Доказательство. По определению

$$\det Q_L(q) = \begin{vmatrix} \beta+\alpha_1 & \alpha_1 & \alpha_1 & \dots & \alpha_1 \\ \alpha_2 & \beta+\alpha_2 & \alpha_2 & \dots & \alpha_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_l & \alpha_l & \alpha_l & \dots & \beta+\alpha_l \end{vmatrix}.$$

Прибавляя все строки к первой и вычитая первый столбец из остальных, получим

$$\det Q_L(q) = \begin{vmatrix} \beta+\sum\limits_{i=1}^{l}\alpha_i & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \alpha_2 & \beta & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_k & 0 & 0 & \dots & \beta \end{vmatrix} = \beta^{l-1}\left(\beta + \sum_{i=1}^{l}\alpha_i\right).$$

Следовательно,

$$\det Q_L(q) = \left[-(l+1)p'(\sigma_q) - \left(\sum_{i=1}^{l} q_i\right) p''(\sigma_q)\right] (-p'(\sigma_q))^{l-1}. \quad \square$$

Предложение 3.2. *Пусть выполняются условия* (H1). *Тогда* $\nabla G(q)$ — P_0*-матрица для всех* $q \in V$.

Доказательство. В силу (H1) имеем $p'(\sigma) \le 0$. Зафиксируем $q \in K$. Если $p''(\sigma) \le 0$, то по лемме 3.1 $\det Q_L(q) \ge 0$. Кроме того, если $p''(\sigma) \ge 0$, видим, что

$$\det Q_L(q) = (-p'(\sigma_q))^{l-1}\left[(-l-1)p'(\sigma_q) - \mu''(\sigma_q) + \left(\sum_{i=l+1}^{n} q_i\right)p''(\sigma_q)\right].$$

Так как $\mu''(\sigma_q) \le 0$, получаем $\det Q_L(q) \ge 0$. $\square$

Учитывая предложение 3.2, аппроксимируем задачу нахождения олигополистического равновесия следующим вариационным неравенством: найти точку $q^\varepsilon \in K$ такую, что

$$\langle G(q^\varepsilon) + \varepsilon A_L q^\varepsilon, q - q^\varepsilon\rangle + f(q) - f(q^\varepsilon) \ge 0 \quad \forall q \in K, \tag{5}$$

где $\varepsilon > 0$ — параметр, L — непустое подмножество N.

Таким образом, в отличие от классического метода полной регуляризации, здесь количество регуляризирующих компонент может меняться. Вначале дадим обоснование метода в ограниченном случае.

Теорема 3.1. *Предположим, что выполняются условия* (H1), $\beta_i < +\infty$ *для любого* $i \in N$. *Пусть существует индексное множество* $J \subseteq N$ *такое, что* f_i, $i \in J$, — *сильно выпуклые функции. Если положить* $L = N \setminus J$, *тогда задача* (5) *имеет единственное решение* q^ε, *а любая последовательность* $\{q^{\varepsilon_k}\}$ *такая, что* $\{\varepsilon_k\} \searrow 0$, *имеет предельные точки, и все эти точки являются решениями задачи* (4).

Доказательство. Определим отображение $\widetilde{G} : V \to R^n$ следующим образом:

$$\widetilde{G}_i(q) = \begin{cases} G_i(q) + \varepsilon a_{ii} q_i & \text{если } i \in L; \\ G_i(q) + \gamma q_i & \text{если } \ i \in N \setminus L, \end{cases}$$

где $\gamma < \tau$, а τ — наименьшая из констант сильной выпуклости для функций f_i, $i \in J$. По предложению 3.2 G есть P_0-отображение, значит, $\widetilde{G}$ — строгое P-отображение. Функции

$$\varphi_i(q_i) = \begin{cases} f_i(q_i), & \text{если } i \in L; \\ f_i(q_i) - 0{,}5\gamma q_i^2, & \text{если } i \in N \setminus L, \end{cases}$$

являются выпуклыми. Тогда существует по предложению 2.1 a) единственная точка $\widetilde{q} \in K$ такая, что

$$\sum_{i=1}^{n} [\widetilde{G}_i(\widetilde{q})(q_i - \widetilde{q}_i) + \varphi_i(q_i) - \varphi_i(\widetilde{q}_i)] \geq 0 \ \ \forall q_i \in K, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Согласно предложению 3.1 эта задача эквивалентна (5), т. е. задача (5) имеет единственное решение q^ε. Так как последовательность $\{q^\varepsilon\}$ содержится в ограниченном множестве K, то она имеет предельные точки. Если q^* — произвольная предельная точка последовательности $\{q^\varepsilon\}$, тогда, переходя к пределу в (5), получим

$$\langle G(q^*), q - q^* \rangle + f(q) - f(q^*) \geq 0 \quad \forall q \in K,$$

т. е. q^* — решение смешанного вариационного неравенства (4). $\square$

Для обоснования метода регуляризации при неограниченном допустимом множестве K используем модификацию условия ограниченности выпуска из [10].

Определение 3.1. Производственный выпуск в задаче олигополистического равновесия называется ограниченным, если существует компактное подмножество P множества R^n_+ такое, что для любого $\widetilde{q} \in R^n_+ \setminus P$ выполняется

$$(-p(\sigma_{\widetilde{q}}) - \widetilde{q}_i p'(\sigma_{\widetilde{q}}))\widetilde{q}_i + f_i(\widetilde{q}_i) - f_i(0) > 0 \tag{6}$$

для некоторого $i = 1, \ldots, n$. Не ограничивая общности, считаем $0 \in P$.

Рассмотрим теперь усеченную задачу для вариационного неравенства: найти точку $\widetilde{q} \in \widetilde{K}$ такую, что

$$\langle G(\widetilde{q}), q - \widetilde{q} \rangle + f(q) - f(\widetilde{q}) \geq 0 \quad \forall q \in \widetilde{K}, \tag{7}$$

где

$$\widetilde{K} = \prod_{i=1}^{n} [0, \widetilde{\beta}_i], \quad 0 < \widetilde{\beta}_i < +\infty \quad \text{и} \quad \widetilde{\beta}_i = \beta_i, \ \ \text{если} \ \ \beta_i < +\infty, \tag{8}$$

для $i = 1, \ldots, n$. Обозначим через $\widetilde{K}^*$ множество решений задачи (7), (8). Рассмотрим задачу для соответствующего регуляризированного вариационного неравенства: найти точку $z^\varepsilon \in \widetilde{K}$ такую, что

$$\langle G(z^\varepsilon) + \varepsilon A_L z^\varepsilon, q - z^\varepsilon \rangle + f(q) - f(z^\varepsilon) \geq 0 \quad \forall q \in \widetilde{K}. \tag{9}$$

Теорема 3.2. *Предположим, что выполняются условия* (H1), *производственный выпуск ограничен так, что для любого* $i = 1, \ldots, n$ *и для любого* $p \in K \bigcap P$ *выполняется* $p_i < \widetilde{\beta}_i$, *если* $\beta_i = +\infty$, *и пусть существует индексное множество* $J \subseteq N$ *такое, что* $f_i(q_i)$ *— сильно выпуклые функции для* $q_i \in [0, \widetilde{\beta}_i]$ *и* $i \in J$. *Если положить* $L = N \setminus J$, *то задача* (8), (9) *имеет единственное решение* z^ε, *а последовательность* $\{z^{\varepsilon_k}\}$ *такая, что* $\{\varepsilon_k\} \searrow 0$, *имеет предельные точки, и все эти точки являются решениями задачи* (4).

Доказательство. Рассуждая аналогично доказательству теоремы 3.1, видим, что вариационное неравенство (8), (9) имеет единственное решение z^ε и что последовательность $\{z^{\varepsilon_k}\}$ при $\{\varepsilon_k\} \to 0$ имеет предельные точки, и все эти точки являются решениями задачи (7), (8). Так как производственный выпуск ограничен, то условие (6) означает, что выполняется следующее условие при $D = P$ и $\widetilde{D} = \{0\}$: пусть существуют множества $\widetilde{D} \subseteq D \subseteq R^n$ такие, что для любой точки $\widetilde{q} \in K \setminus D$ существует точка $q \in \widetilde{D} \bigcap K$ такая, что выполняется

$$\max_{i=1,\dots,n} [G_i(\widetilde{q})(\widetilde{q}_i - q_i) + f_i(\widetilde{q}_i) - f_i(q_i)] > 0.$$

Ясно, что $K^* \subseteq P$ и поэтому $K^* \subseteq \widetilde{K}^*$. Пусть существует точка $\widetilde{q} \in \widetilde{K}^* \setminus K^*$, тогда $\widetilde{q} \in P$ и существует точка $q \in K \setminus \widetilde{K}$ и индекс i такие, что выполняется неравенство $G_i(\widetilde{q})(q_i - \widetilde{q}_i) + f_i(q_i) - f_i(\widetilde{q}_i) < 0$. Отсюда следует $\widetilde{q}_i < \widetilde{\beta}_i < q_i$. Тогда существует число $\lambda \in (0, 1)$ такое, что $\lambda q_i + (1 - \lambda)\widetilde{q}_i \in \widetilde{K}_i$, значит,

$$G_i(\widetilde{q})[\lambda q_i + (1 - \lambda)\widetilde{q}_i - \widetilde{q}_i] + f_i(\lambda q_i + (1 - \lambda)\widetilde{q}_i) - f_i(\widetilde{q}_i) \geq 0.$$

В силу выпуклости функции f_i имеем $f_i(\lambda q_i + (1 - \lambda)\widetilde{q}_i) \leq \lambda f_i(q_i) + (1 - \lambda) f_i(\widetilde{q}_i)$, отсюда следует $\lambda[G_i(\widetilde{q})(q_i - \widetilde{q}_i) + f_i(q_i) - f_i(\widetilde{q}_i)] \geq 0$. Получено противоречие. Значит, $K^* = \widetilde{K}^*$. $\square$

В случае, когда любая функция f_i не сильно выпуклая, $L = N$ и (9) соответствует полной регуляризации. Отметим, что в силу компактности множества P условия на выбор $\widetilde{K}$ в теореме 3.2 не ограничительны. Таким образом, предложенный подход гарантирует сходимость метода регуляризации, при этом вид регуляризирующих добавок можно выбирать в зависимости от свойств сильной выпуклости, что делает метод достаточно гибким.

Литература

1. Konnov I.V. *Properties of gap functions for mixed variational inequalities* // Siberian J. Numer. Math. – 2000. – V. 3. – № 3. – P. 259–270.
2. Facchinei F., Kanzow C. *Beyond monotonicity in regularization methods for nonlinear complementarity problems* // SIAM J. Control and Optimiz. – 1999. – V. 37. – № 4. – P. 1150–1161.
3. Facchinei F., Pang J.-S. *Finite-dimensional variational inequalities and complementarity problems.* – Berlin: Springer-Verlag, – 2003.
4. Ортега Дж., Рейнболдт В. *Итерационные методы решения нелинейных систем уравнений со многими неизвестными.* – М.: Мир, 1975. – 560 с.
5. Moré J., Rheinboldt W. *On P-and S-functions and related classes of n-dimensional nonlinear mappings* // Linear Algebra and Appl. – 1973. – V. 6. – № 1. – P. 45–68.
6. Nagurney A. *Network economics: a variational inequality approach.* – Dordrecht: Kluwer Academic Publ., 1999. – 436 p.
7. Okuguchi K., Szidarovsky F. *The theory of oligopoly with multi-product firms.* – Berlin: Springer-Verlag, 1990. – 268 p.
8. Murphy F.H., Sherali H.D., Soyster A.L. *A mathematical programming approach for determining oligopolistic market equilibrium* // Math. Progr. – 1982. – V. 24. – P. 92–106.
9. Гольштейн Е.Г., Третьяков Н.В. *Модифицированные функции Лагранжа.* – М.: Наука, 1989. – 400 с.
10. Kolstad C.D., Mathiesen L. *Necessary and sufficient conditions for uniqueness of a Cournot equilibrium* // Rev. Econ. Studies. – 1987. – V. 54. – P. 681–690.

Институт проблем информатики академии наук Республики Татарстан

Поступила
19.05.2006