И З В Е С Т И Я   В Ы С Ш И Х   У Ч Е Б Н Ы Х   З А В Е Д Е Н И Й

2005 МАТЕМАТИКА № 12 (523)

УДК 519.854

Г.Г. ЗАБУДСКИЙ

О СЛОЖНОСТИ ЗАДАЧИ РАЗМЕЩЕНИЯ НА ЛИНИИ С ОГРАНИЧЕНИЯМИ НА МИНИМАЛЬНЫЕ РАССТОЯНИЯ

Изучается задача размещения взаимосвязанных прямоугольных объектов на линии с минимальной суммарной стоимостью связей и ограничениями на минимальные расстояния. Доказано, что задача является NP-трудной, если структура связей между объектами является либо корневым деревом, либо графом последовательно-параллельного типа и полиномиально разрешима для цепи.

1. Постановка задачи

Пусть n — число размещаемых объектов, $V = \{1, \dots, n\}$ — множество их номеров. Объект — это прямоугольник с размерами $a_i \times h_i$, $i \in V$. Связь проходит вертикально от центров объектов до линии размещения, а затем по указанной линии. Длина вертикальной составляющей связи для объектов i и j равна $h_i/2 + h_j/2$, $i, j \in V$, $i \neq j$. Исходные минимально допустимые расстояния задаются между ближайшими точками объектов, однако в них можно учесть величины a_i, $i \in V$. Задача сводится к размещению точечных объектов, т.е. проекций геометрических центров прямоугольников на линию. Минимально допустимое расстояние между объектами i и j обозначается через r_{ij}, $R = (r_{ij})$, $r_{ij} = r_{ji}$, $r_{ii} = 0$, $i, j \in V$, — матрица минимально допустимых расстояний. Структура связей между объектами задается с помощью графа $\Gamma = (V, E)$. Ребро $(i, j) \in E$, если существует связь между объектами i и j с удельной стоимостью $C_{ij} > 0$, $C_{ij} = C_{ji}$. Если для связанных объектов задан порядок взаимного расположения на линии, например, i-й объект должен быть расположен левее j-го, то (i, j) — дуга.

Пусть координатная ось направлена вдоль линии размещения и x_i — координата центра объекта i, $i \in V$, тогда модель сформулированной задачи имеет вид

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{(i,j)\in E} C_{ij}|x_i - x_j| \to \min, \tag{1.1}$$

$$|x_i - x_j| \geq r_{ij}, \quad i, j \in V, \quad i < j. \tag{1.2}$$

Задача (1.1), (1.2) является NP-трудной, т.к. если $r_{ij} = 1$, $i, j \in V$, $i \neq j$; $C_{ij} = 1$, $(i, j) \in E$, и Γ — произвольный неориентированный граф, она эквивалентна NP-трудной задаче оптимального линейного упорядочения ([1], с. 250).

2. Сложность задачи (1.1), (1.2)

Рассматриваются следующие условия на элементы матрицы R:
a) $r_{ij} = (a_i + a_j)/2$, $i, j \in V$, $i \neq j$ (условия непересечения);
b) $r_{ij} + r_{jk} \geq r_{ik}$, $i, j, k \in V$, $i \neq j \neq k$ (метрическая задача);
c) r_{ij} произвольные, $i, j \in V$ (неметрическая задача).

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского гуманитарного научного фонда, грант № 04-02-00238а.

Рассмотрим задачу (1.1), (1.2) с условиями a), b) и c), если Γ — неориентированная цепь, корневое дерево или граф последовательно-параллельного типа (ППТ) [2]. При условии a) задача (1.1), (1.2) полиномиально разрешима для указанных графов [2], [3].

Произвольному размещению объектов $x = (x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_n})$, $x_{i_k} < x_{i_{k+1}}$, $k \in V$, $k < n$, соответствует перестановка $\pi(x) = (i_1, i_2, \dots, i_n)$. Отметим, что при условии c) для получения оптимального решения задачи (1.1), (1.2) недостаточно знать соответствующую ему перестановку.

Γ — **неориентированная цепь**. Пусть Γ — цепь $(i, i+1)$, $i \in V$, $i < n$, тогда для решения задачи (1.1), (1.2) достаточно рассмотреть перестановку $\pi_0 = (1, 2, \dots, n)$.

Утверждение. *Если* Γ *— цепь, то существует оптимальное решение* x^0 *задачи* (1.1), (1.2), *для которого* $\pi(x^0) = \pi_0$.

Справедливость утверждения доказывается конструктивно. Пусть $\widetilde{x}$ — некоторое оптимальное решение и $\pi(\widetilde{x}) \neq \pi_0$. Построим решение x', для которого $\pi(x') = \pi_0$ и $f(\widetilde{x}) = f(x')$. Полагаем

$$x_1' = \widetilde{x_1}, \quad x_i' = x_{i-1}' + d(i-1, i; \widetilde{x}), \quad i \in V, \quad i \geq 2,$$

где $d(i-1, i; \widetilde{x})$ — расстояние между объектами $i-1$ и i в решении $\widetilde{x}$. Тогда $\pi(x') = \pi_0$. Кроме того, $\forall i$, $i < n$, справедливо

$$d(i, i+1; x') = |x_{i+1}' - x_i'| = |x_i' + d(i, i+1; \widetilde{x}) - x_i'| = d(i, i+1; \widetilde{x}).$$

Построенный набор x' удовлетворяет (1.2). Действительно, $\forall s, k \in V$, $s < k$,

$$x_k' - x_s' = x_s' + d(s, s+1, \widetilde{x}) + \dots + d(k-1, k; \widetilde{x}) - x_s' \geq d(s, k; \widetilde{x}) = |\widetilde{x_k} - \widetilde{x_s}| \geq r_{sk},$$

$x_k' - x_s' = |\widetilde{x_k} - \widetilde{x_s}|$, если $\widetilde{x}_{s+i} < \widetilde{x}_{s+i+1}$, $i \in V$, $i < k$, т. е. $f(\widetilde{x}) = f(x')$.

Теорема 2.1. *Если* Γ *— цепь, а элементы матрицы* R *— произвольные рациональные числа, то задача* (1.1), (1.2) *полиномиально разрешима.*

Действительно, согласно утверждению достаточно рассмотреть перестановку π_0, для которой (1.1), (1.2) становится задачей линейного программирования (ЛП)

$$\overline{f}(x) = \sum_{i=1}^{n} \overline{C_i} x_i \to \min, \tag{2.1}$$

$$x_j - x_i \geq r_{ij}, \quad i, j \in V, \quad j > i, \tag{2.2}$$

где $\overline{C_i} = \sum\limits_{k=1}^{i-1} C_{ki} - \sum\limits_{k=i+1}^{n} C_{ik}$. Нетрудно убедиться, что двойственная к (2.1), (2.2) задача является задачей поиска оптимального потока в сети.

Введем переменные $u_{i,i+1}$, $i \in V$, $i < n$, определяющие расстояния между соседними объектами в перестановке π_0, и запишем задачу ЛП, эквивалентную (2.1), (2.2),

$$\widetilde{f}(u) = \sum_{i=1}^{n-1} \Bigg(\sum_{j=1}^{i} \sum_{k=i+1}^{n} C_{jk} \Bigg) u_{i,i+1} \to \min,$$

$$\sum_{i=k}^{l} u_{i,i+1} \geq r_{k,l+1}, \quad k = \overline{1, n-2}, \quad l = \overline{k+1, n-1},$$

$$u_{i,i+1} \geq r_{i,i+1}, \quad i = \overline{1, n-1}.$$

Нетрудно показать, что $x_{i+1} - x_i = u_{i,i+1}$, $i \in V$, $i < n$.

Γ — **корневое дерево**. Покажем, что если в матрице R выполнены неравенства b), то задача (1.1), (1.2) для корневого дерева является NP-трудной.

В качестве NP-трудной рассмотрим задачу коммивояжера со средним временем прибытия [4]. Пусть задано n городов и t_{ij} — время переезда из города i в город j, причем $t_{ij} + t_{jk} \geq t_{ik}$ для всех $i, j, k \in V$. Необходимо найти последовательность объезда городов $\pi(1), \pi(2), \ldots, \pi(n)$, минимизирующую среднее время прибытия. Если $b > 0$ — произвольное число, то соответствующая задача распознавания состоит в проверке существования перестановки π такой, что справедливо неравенство

$$\tau(\pi) = \frac{1}{n}\Big(\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{i=1}^{k} t_{\pi(i)\pi(i+1)}\Big) \leq b. \tag{2.3}$$

Пусть корневое дерево Γ — это “веер”, в котором корень имеет номер 1, а множество дуг $E = \{(1,i),\ i \in V,\ i > 1\}$ и $C_{1i} = 1,\ i \in V,\ i > 1$, и элементы матрицы R удовлетворяют условию b). Для такого графа задача (1.1), (1.2) сводится к поиску перестановки объектов π, доставляющей минимум функции

$$\eta(\pi) = \sum_{k=1}^{n-1}\sum_{i=1}^{k} r_{\pi(i)\pi(i+1)}.$$

Обозначим через α соответствующую задачу распознавания: существует ли перестановка π такая, что $\eta(\pi) \leq b_1$ для заданного числа $b_1 \geq 0$? Покажем, что (2.3) полиномиально сводится к α. Действительно, полагаем $r_{ij} = t_{ij},\ i, j \in V,\ i \neq j$. Если существует перестановка π' такая, что $\tau(\pi') \leq b$, тогда, полагая $b_1 = nb$, имеем $\eta(\pi') \leq b_1$. Если $\tau(\pi') > b$, то $\eta(\pi') > nb = b_1$, т. е. задача α имеет решение тогда и только тогда, когда имеет решение задача (2.3).

Теорема 2.2. *Если Γ — корневое дерево, а элементы матрицы R удовлетворяют неравенству треугольника, то задача* (1.1), (1.2) *является NP-трудной.*

Γ — **граф последовательно-параллельного типа**. Покажем, что если элементы матрицы R удовлетворяют b), то задача (1.1), (1.2) для графа ППТ является NP-трудной.

В качестве NP-трудной возьмем разомкнутый вариант задачи коммивояжера, т. е. гамильтонов путь минимальной длины. Пусть, как и ранее, t_{ij} — время переезда из города i в город j, причем $t_{ij} + t_{jk} \geq t_{ik}$ для всех $i, j, k \in V$. Тогда соответствующая задача распознавания состоит в проверке существования такой перестановки π, что для произвольного числа $b > 0$ справедливо неравенство

$$\tau_1(\pi) = \sum_{i=1}^{n-1} t_{\pi(i)\pi(i+1)} \leq b. \tag{2.4}$$

Рассмотрим граф ППТ с одной вершиной на каждой из n цепей между вершинами s и t [2] и $C_{si} = C_{it} = 1,\ i \in V$. Тогда задача распознавания, соответствующая задаче (1.1), (1.2), заключается в проверке существования перестановки π такой, что

$$\eta_1(\pi) = n\sum_{i=1}^{n-1} r_{\pi(i)\pi(i+1)} + 2n \leq b_1, \tag{2.5}$$

где $b_1 > 0$ — заданное число. Сведение задачи (2.4) к задаче (2.5) аналогично приведенному ранее для корневого дерева с $b = \frac{b_1 - 2n}{n}$. Имеет место также

Теорема 2.3. *Если Γ — граф последовательно-параллельного типа, а элементы матрицы R удовлетворяют неравенству треугольника, то задача* (1.1), (1.2) *является NP-трудной.*

В заключение отметим, что переходы от размещения корневого дерева и графа ППТ к позициям на линии с единичным расстоянием [2] или от условий a) [3] к минимально допустимым расстояниям переводят задачу (1.1), (1.2) из класса полиномиально разрешимых в класс NP-трудных.

Литература

1. Гэри М., Джонсон Д. *Вычислительные машины и трудно решаемые задачи.* – М.: Мир, 1982. – 416 с.
2. Забудский Г.Г. *Алгоритм решения одной задачи оптимального линейного упорядочения* // Изв. вузов. Математика. – 1997. – № 12. – С. 73–78.
3. Picard J.C., Queranne M. *On the one-dimensional space allocation problem* // Oper. Res. – 1981. – V. 29. – № 2. – P. 371–391.
4. Sahni S., Gonzalez T. *P-complete approximation problems* // J. Assoc. Comput. Math. – 1976. – V. 23. – № 3. – P. 555–565.

Омский филиал
Института математики
Сибирского отделения
Российской академии наук

Поступила
01.09.2005