ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2004 МАТЕМАТИКА № 2 (501)

УДК 517.54

А.Ю. ПОГОДИНА

О ПРЕДЕЛЕ СИММЕТРИЧЕСКОЙ РАЗНОСТИ ИНТЕГРАЛА ТИПА КОШИ

Введение

Рассмотрим интеграл типа Коши

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(\tau)d\tau}{\tau - z} \tag{1}$$

с непрерывной плотностью $f(\tau)$, взятый по гладкой кривой Γ. Пусть $\nu = e^{i\theta}$, $\theta = \theta(t)$, — единичная нормаль к кривой Γ, направленная влево от Γ относительно ее положительного направления обхода. Известно [1], [2], что почти всюду на Γ существуют предельные значения $\Phi^{\pm}(t) = \lim\limits_{h\to 0+}\Phi(t \pm h\nu)$, удовлетворяющие соотношению $\Phi^+(t) - \Phi^-(t) = f(t)$, $t \in \Gamma$. Утверждать, что граничные значения $\Phi^+(t)$ и $\Phi^-(t)$ существуют в каждой точке $t \in \Gamma$, вообще говоря, нельзя. В данной статье исследуется симметрическая разность интеграла типа Коши

$$\Delta_h\Phi(t) = \Phi(t + h\nu) - \Phi(t - h\nu), \quad t \in \Gamma, \tag{2}$$

где $h \in \mathrm{R}_+$ (h — достаточно малое число). Из [1], [2] следует, что

$$\lim_{h\to 0+}\Delta_h\Phi(t) = f(t) \tag{3}$$

существует во всех тех точках t, где существуют предельные значения $\Phi^+(t)$ и $\Phi^-(t)$, т.е. почти всюду. Мы покажем, что на самом деле предел симметрической разности существует и равен значению функции при любом $t \in \Gamma$, и получим обобщение этого результата для интегрируемых функций.

Напомним определение точки Лебега и обобщим его на случай функций, заданных на кривых (см., напр., [3], гл. 10, § 1).

Определение 1. Пусть функция g определена на отрезке $[\alpha,\beta]$. Точка $t \in (\alpha,\beta)$ является точкой Лебега функции g, если

$$\lim_{\delta\to 0}\frac{1}{\delta}\int_t^{t+\delta}\{g(\tau) - g(t)\}d\tau = 0.$$

Для функции, заданной на спрямляемой кривой Γ, это определение можно сформулировать следующим образом.

Определение 2. Пусть $\tau = \tau(s)$, $0 \le s \le l$, — натуральная параметризация кривой Γ. Точка $\tau_0 = \tau(s_0)$ называется точкой Лебега функции f, определенной на Γ, если точка s_0 является точкой Лебега функции $g(s) = f(\tau(s))$.

Основные результаты статьи содержатся в следующих двух теоремах.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 01-01-00088.

Теорема 1. *Если функция $f(\tau)$ непрерывна на гладкой кривой Γ, то предел (3) существует и равен значению функции в каждой точке $t \in \Gamma$ за возможным исключением концов Γ, если кривая разомкнута.*

Теорема 2. *Если функция $f(t)$ интегрируема на гладкой кривой Γ, то предел симметрической разности интеграла типа Коши при $h \to 0$ существует в каждой точке Лебега этой функции и равен значению функции в этой точке.*

Для доказательства этих теорем использованы некоторые результаты из теории сингулярного интеграла в смысле Лебега ([3], гл. 10, § 1, 2). Отметим, что в отличие от [3] рассматриваем не последовательности, а семейства функций, зависящие от вещественного положительного параметра h.

Определение 3. Семейство функций $\Phi_h(x,\xi)$, $h \in \mathrm{R}_+$, заданных на квадрате $(0 \le x \le 1, 0 \le \xi \le 1)$, называется ядром, если

1) функция $\Phi_h(x,\xi)$ суммируема по x при произвольном фиксированном ξ,

2)

$$\lim_{h\to 0+} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \Phi_h(x,\xi)dx = 1 \tag{4}$$

для любых α_1, α_2 таких, что $0 \le \alpha_1 < \xi < \alpha_2 \le 1$.

Определение 4. Функция $\Psi_h(x,\xi)$ называется горбатой мажорантой функции $\Phi_h(x,\xi)$, если

1) $|\Phi_h(x,\xi)| \le \Psi_h(x,\xi)$,

2) $\Psi_h(x,\xi)$ при фиксированном ξ возрастает на $[0,x]$ и убывает на $[x,1]$.

Интеграл вида $\int\limits_0^1 \Phi_h(x,\xi)\phi(x)dx$, где $\Phi_h(x,\xi)$ — ядро в смысле определения 3, называют сингулярным интегралом по Лебегу (см., напр., [3], гл. 10, § 1).

В дальнейшем используется Д.К. Фаддеева

Теорема ([3], гл. 10, § 2). *Если ядро $\Phi_h(x,\xi)$ при каждом h имеет горбатую мажоранту $\Psi_h(x,\xi)$ такую, что*

$$\int_0^1 \Psi_h(x,\xi)dx < B(\xi) < +\infty, \tag{5}$$

где $B(\xi)$ зависит лишь от ξ, то для любой суммируемой функции $g(x)$, имеющей точку $x=\xi$ точкой Лебега,

$$\lim_{h\to 0+} \int_0^1 \Phi_h(x,\xi)g(x)dx = g(\xi). \tag{6}$$

Для упрощения вычислений без ограничения общности можно считать, что

1) Γ — разомкнутая гладкая кривая и t — ее внутренняя точка;

2) кривая Γ начинается в точке 0, а ее касательная в этой точке направлена вдоль положительного луча вещественной оси;

3) при обходе кривой Γ ее касательная поворачивается на угол, меньший $\pi/4$; можно представить такую кривую в виде

$$\Gamma = \{(x, Y(x)) : x \in [0,1],\ y = Y(x)\},$$

где $Y(x)$ — дифференцируемая вещественная функция, $Y(0)=0$, $Y'(0)=0$, $|Y'(x)| \le k < 1$, $0 \le x \le 1$.

Семейство функций $\Phi_h(x,\xi)$ строим следующим образом. Учитывая (1) и делая замену $\tau = x+iY(x)$, $0\le x\le 1$, $t=\xi+iY(\xi)$, $0\le\xi\le 1$, в формуле (2)

$$\Delta_h\Phi(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(\tau)d\tau}{\tau-(t+h\nu)} - \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(\tau)d\tau}{\tau-(t-h\nu)} = \frac{1}{h\nu\pi i}\int_0^1 \frac{f(\tau)\tau'(x)dx}{(\tau(x)-t)^2(h\nu)^{-2}-1},$$

получим представление симметрической разности в виде

$$\Delta_h\Phi(t) = \int_0^1 \Phi_h(x,\xi)f(x+iY(x))dx,$$

где

$$\Phi_h(x,\xi) = \frac{1+iY'(x)}{h\nu\pi i([x-\xi+i(Y(x)-Y(\xi))]^2(h\nu)^{-2}-1)}. \tag{7}$$

Лемма 1. *Семейство функций* (7) *является ядром.*

Доказательство. Фиксируем $0<\alpha_1<\alpha_2<1$. Учитывая (7) и делая замену $z=[x-\xi+i(Y(x)-Y(\xi))](h\nu)^{-1}$ в интеграле (4), получим

$$\int_{\alpha_1}^{\alpha_2}\Phi_h(x,\xi)dx = \frac{1}{\pi i}\int_{z_1}^{z_2}\frac{dz}{z^2-1} = \frac{1}{2\pi i}\ln\frac{z-1}{z+1}\Big|_{z_1}^{z_2},$$

где $z_j(h) = [\alpha_j-\xi+i(Y(\alpha_j)-Y(\xi))](h\nu)^{-1}$, $j=1,2$.

Обозначим $w_j(h)=(z_j(h)-1)/(z_j(h)+1)$. Очевидно, $|w_j(h)|\to 1$, $\arg w_1(h)\to-\pi$, $\arg w_2(h)\to\pi$ при $h\to 0$. Следовательно,

$$\lim_{h\to 0+}\int_{\alpha_1}^{\alpha_2}\Phi_h(x,\xi)dx = \frac{1}{2\pi i}\lim_{h\to 0+}[\ln|w_2(h)/w_1(h)|+i(\arg w_2(h)-\arg w_1(h))] = 1. \quad \square$$

Теперь найдем горбатую мажоранту $\Psi_h(x,\xi)$ ядра $\Phi_h(x,\xi)$. Так как $|1+iY'(x)|\le(1+k^2)^{1/2}$, то простые оценки дают

$$|\Phi_h(x,\xi)| \le \frac{\sqrt{2}}{\pi}\frac{h^{-1}}{\{[h^{-2}(x-\xi)^2-1/\sqrt{2}\,]^2+1/2\}^{1/2}}. \tag{8}$$

Обозначим правую часть неравенства (8) через $\Psi_h(x,\xi)$.

Лемма 2. *Функция* $\Psi_h(x,\xi)$ *является горбатой мажорантой функции* $\Phi_h(x,\xi)$ *и удовлетворяет условию* (5).

Доказательство. Очевидно, что функция $\Psi_h(x,\xi)$ удовлетворяет всем условиям определения 4.

Сделав замену $u=\sqrt{2}h^{-1}(x-\xi)$ в интеграле (5), получим

$$\int_0^1\Psi_h(x,\xi)dx = \int_{u_1}^{u_2}\frac{du}{[(u^2-1/\sqrt{2})^2+1/2]^{1/2}} \le \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{du}{[(u^2-1/\sqrt{2})^2+1/2]^{1/2}} \le B<+\infty,$$

где $u_1=-\sqrt{2}h^{-1}\xi$, $u_2=\sqrt{2}h^{-1}(1-\xi)$. Таким образом, условие (5) выполнено. $\square$

Докажем сначала теорему 2. Вычисления показывают, что если t — точка Лебега функции f, то $x=\mathrm{Re}\,t$ — точка Лебега функции $g(x)=f(x+iY(x))$. В силу леммы 2 ядро $\Phi_h(x,\xi)$ имеет горбатую мажоранту, удовлетворяющую условиям теоремы Д.К. Фаддеева. Следовательно, соотношение (6) справедливо и теорема 2 доказана.

Если функция f непрерывна на гладкой кривой Γ, то каждая точка кривой, за исключением концов, является ее точкой Лебега. Отсюда следует справедливость теоремы 1.

Следствие 1. Если функция $f(t)$ непрерывна и в какой-то точке $t\in\Gamma$ существует предельное значение по нормали к кривой Γ интеграла типа Коши (1) с одной стороны, то существует предельное значение его по нормали к кривой и с другой стороны.

Имеет место и более сильный результат, когда функция $f(t)$ интегрируема.

Следствие 2. Если функция $g(x)$ интегрируема на кривой Γ и в некоторой лебеговой точке $x = \xi$ функции $g(x)$ существует предельное значение по нормали к кривой Γ интеграла типа Коши (1) с одной стороны, например, $\Phi^+(t)$, то и с другой стороны существует предельное значение $\Phi^-(t)$ по нормали к кривой Γ.

Теорема 1 гарантирует разрешимость следующей краевой задачи. Пусть Γ — замкнутая гладкая кривая, разбивающая плоскость на области D^+ и D^-, и на этой кривой задана непрерывная функция $f(t)$. Требуется найти аналитическую в $\overline{\mathbf{C}} \setminus \Gamma$ функцию, для которой $\lim\limits_{h\to 0+} \Delta_h \Phi(t)$ существует и равен значению функции в каждой точке $t \in \Gamma$. Согласно теореме 1 решением этой задачи является интеграл типа Коши (1).

Литература

1. Привалов И.И. *Граничные свойства аналитических функций.* – 2-е изд. – М.–Л.: ГИТТЛ, 1950. – 336 с.
2. Хведелидзе Б.В. *Линейные разрывные граничные задачи теории функций, сингулярные интегральные уравнения и некоторые их приложения.* – Тр. Тбил. матем. ин-та АН ГрузССР. – 1956. – Т. 23. – С. 3–158.
3. Натансон И.П. *Теория функций вещественной переменной.* – 2-е изд. – Физматгиз, 1974. – 480 с.

Казанский государственный технический университет

Поступили
первый вариант 24.01.2002
окончательный вариант 23.04.2003