ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2004 МАТЕМАТИКА № 8 (507)

УДК 517.968:519.6

Ю.Р. АГАЧЕВ

ОБ ОПТИМИЗАЦИИ ПРЯМЫХ МЕТОДОВ РЕШЕНИЯ ОБЫКНОВЕННЫХ ИНТЕГРОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

В работе решается задача оптимизации в смысле [1], [2] прямых методов решения линейных интегродифференциальных уравнений первого порядка, в которых дифференциальный оператор является внутренним по отношению к интегральному оператору.

Рассмотрим интегродифференциальное уравнение первого порядка вида

$$Kx \equiv x(t) + \int_0^1 h_0(t,s)x(s)ds + \int_0^1 h_1(t,s)x'(s)ds = y(t), \quad 0 \le t \le 1, \tag{1}$$

где $h_0(t,s)$, $h_1(t,s)$ и $y(t)$ — известные функции в своих областях определения, а $x(t)$ — искомая.

Известно (напр., [3]), что уравнение (1) относится, вообще говоря, к классу некорректно поставленных задач. Это приводит к дополнительным трудностям как при обосновании того или иного прямого метода решения уравнения (1), так и в особенности при решении проблемы оптимизации прямых методов решения указанных уравнений.

Следует отметить, что задача оптимизации по порядку точности для уравнений вида (1) в периодическом случае решена в [4]. Кроме того, указанная задача в случае интегродифференциальных уравнений, в которых порядок внешнего дифференциального оператора не ниже порядка соответствующего внутреннего дифференциального оператора, решалась в ряде работ (см., напр., [5], [6] и библиографию в них).

1. Постановка задачи

Приведем постановку задачи оптимизации прямых методов решения уравнения (1), следуя [1], [2], [7], в частном случае, когда пространства искомых элементов и правых частей совпадают.

Обозначим через $L_2 \equiv L_2(0,1)$ пространство квадратично-суммируемых в промежутке $[0,1]$ функций с обычной нормой $\|\cdot\|_2$, а через $W_2^1 \equiv W_2^1(0,1)$ — пространство Соболева функций, имеющих первую обобщенную производную из L_2. Норму в W_2^1 введем следующим образом:

$$\|z\|_{2,1} \equiv \|z\|_{W_2^1} = \max\{\|z\|_2, \|z'\|_2\} \quad (z \in W_2^1).$$

Пусть $X = W_2^1$, а $X_n \subset X$ — произвольно фиксированное конечномерное подпространство размерности $n \in \mathbb{N}$. Через $\mathcal{L}(X) = \mathcal{L}(X,X)$ будем обозначать пространство линейных (т. е. аддитивных и однородных) операторов, отображающих X в себя.

Рассмотрим класс $\mathcal{E} = \{e\}$ однозначно разрешимых уравнений (1), определяемый конкретными классами F_1, F_2 и F_3 функций $h_0(t,s)$, $h_1(t,s)$ и $y(t)$ соответственно. Тогда, очевидно, решения уравнений (1) будут пробегать некоторый класс $X^* \subset W_2^1$. Введем класс $\mathcal{E}_n = \{e_n\}$ однозначно разрешимых операторных уравнений

$$K_n x_n = y_n \quad (x_n, y_n \in X_n, \quad K_n \in \mathcal{L}(X_n)), \tag{2}$$

порождаемых прямыми методами решения уравнения (1) при произвольно фиксированном подпространстве X_n с $\dim X_n = n < \infty$.

Решение $x^* \in X$ уравнения (1) из класса $\mathcal{E}$ будем аппроксимировать решениями $x_n^* \in X_n \subset X$ уравнений (2) из класса $\mathcal{E}_n$. При этом за оптимальную оценку погрешности класса $\mathcal{E}_n$ прямых методов (2) на классе $\mathcal{E}$ уравнений (1) примем величину

$$V_N(\mathcal{E}) = \inf_{X_n} \inf_{e_n \in \mathcal{E}_n} \sup_{e \in \mathcal{E}} \|x^* - x_n^*\|_X, \tag{3}$$

где внутренний inf берется по всем уравнениям вида (2) при произвольно фиксированном подпространстве X_n, а внешний inf — по всевозможным подпространствам $X_n \subset X$ размерности n.

Определение. Пусть существует фиксированный прямой метод (уравнение)

$$K_n^\circ x_n^\circ = y_n^\circ \quad (x_n^\circ, y_n^\circ \in X_n^\circ \subset X, \quad K_n^\circ \in \mathcal{L}(X_n^\circ)) \tag{2°}$$

с $\dim X_n^\circ = n$, для которого выполняется одно из условий[1]

$$\sup_{x^* \in X^*} \|x^* - x_n^\circ\|_X \sim, \asymp V_n(\mathcal{E}), \quad x_n^\circ = K_n^{\circ -1} y_n^\circ.$$

Тогда метод (2°) называется соответственно асимптотически оптимальным, оптимальным по порядку среди всевозможных прямых методов вида (2) на классе $\mathcal{E}$ уравнений (1).

В связи со сказанным возникает задача нахождения оптимальной оценки погрешности (3) и построения оптимального фиксированного метода (2°).

В данной работе решается задача нахождения величины $V_n(\mathcal{E})$ для конкретных классов $\mathcal{E}$ уравнений (1) и доказывается оптимальность в указанном выше смысле метода сплайн-коллокации решения уравнения (1).

2. Вспомогательные результаты

Обозначим через $H_{2,\omega} \equiv H_{2,\omega}(0,1)$ класс функций $z \in L_2$, интегральный модуль непрерывности которых

$$\omega(z,\delta)_2 \equiv \sup_{0<\eta\le\delta} \left\{ \int_0^{1-\eta} |z(t+\eta) - z(t)|^2 dt \right\}^{1/2}$$

не превосходит заданного модуля непрерывности $\omega(\delta)$, $0 < \delta \le 1$. Аналогично, через $H_\omega \equiv H_\omega[0,1]$ обозначим класс непрерывных функций $z(t)$, модуль непрерывности которых

$$\omega(z,\delta) \equiv \sup_{0<\eta\le\delta} \sup_{0\le t\le 1} |z(t+\eta) - z(t)|$$

не превосходит заданного модуля непрерывности $\omega(\delta)$, $0 < \delta \le 1$.

В промежутке $[0,1]$ введем сетку узлов

$$\Delta_n : 0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = 1, \quad \|\Delta_n\| \equiv \max_{1\le k\le n} (t_k - t_{k-1}) \to 0, \quad n \to \infty. \tag{4}$$

Обозначим через $\varphi_k(t)$, $k = \overline{0,n}$, фундаментальные сплайны первой степени на сетке Δ_n:

$$\varphi_k(t) = \begin{cases} 0, & t \le t_{k-1}; \\ \frac{t - t_{k-1}}{t_k - t_{k-1}}, & t_{k-1} \le t \le t_k; \\ \frac{t_{k+1} - t}{t_{k+1} - t_k}, & t_k \le t \le t_{k+1}; \\ 0, & t \ge t_{k+1}, \end{cases}$$

[1]Здесь и далее символы $\sim$ и $\asymp$ означают соответственно сильную и слабую эквивалентности.

причем при $k=0$ и $k=n$ пренебрегаем соответственно первыми двумя и последними двумя звеньями. Пусть $\psi_k(t)$, $k=\overline{1,n}$, — фундаментальные сплайны нулевой степени на той же сетке узлов:

$$\psi_k(t)=\begin{cases}1, & t_{k-1}<t\le t_k;\\ 0, & t\notin(t_{k-1},t_k].\end{cases}$$

Для произвольной непрерывной на $[0,1]$ функции $z(t)$ обозначим через $S_n^1(z,t)$ ее интерполяционный сплайн первой степени на сетке Δ_n:

$$S_n^1(z,t)=\sum_{k=0}^{n} z(t_k)\varphi_k(t),\quad t\in[0,1].$$

Имеет место (напр., [8])

Лемма 1. *Пусть функция $z(t)\in W_2^1$. Тогда для погрешности интерполяции сплайном $S_n^1(z,t)$ верно неравенство*

$$\|z-S_n^1z\|_2\le\|\Delta_n\|\omega(z',\|\Delta_n\|)_2;$$

если же сетка (4) равномерная ($t_k=k/n$), то

$$\|z-S_n^1z\|_2\le\omega(z',1/n)_2/n.$$

Пусть $U_n(z,t)$ — "усредненный" интерполяционный сплайн нулевой степени для функции $z\in L_2$ на сетке (4):

$$U_n(z,t)=\sum_{k=1}^{n}\Phi_k(z)\psi_k(t),\quad t\in[0,1],$$

где

$$\Phi_k(z)=\frac{1}{t_k-t_{k-1}}\int_{t_{k-1}}^{t_k}z(\tau)d\tau.$$

Справедлива (напр., [8])

Лемма 2. *Пусть функция $z\in L_2$ и сетка (4) удовлетворяет условию*

$$\frac{\|\Delta_n\|}{\min\limits_{1\le k\le n}(t_k-t_{k-1})}\le\beta, \tag{5}$$

где β — положительная постоянная, не зависящая от n. Тогда погрешность интерполяции сплайном $U_n(z,t)$ может быть оценена неравенством

$$\|z-U_nz\|_2\le\sqrt{2\beta}\omega(z,\|\Delta_n\|)_2;$$

в частности, если сетка (4) равномерная, то

$$\|z-U_nz\|_2\le\sqrt{2}\omega(z,1/n)_2.$$

Заметим, что сходимость сплайнов $U_n(z,t)$ к самой функции $z\in L_2$ имеет место и без предположения (5) относительно сетки (4). Это следует из известного факта о проекционности оператора U_n и равенства $\|U_n\|=1$, $U_n:L_2\to L_2$.

В случае, когда приближаемая функция непрерывна, имеет место (напр., [9])

Лемма 3. *Пусть функция $z\in H_\omega$. Тогда погрешность интерполяции сплайном $U_n(z,t)$ может быть оценена неравенством*

$$\|z-U_nz\|_2\le\frac{1}{2}\left\{n\int_0^{1/n}[\omega(t)]^2dt\right\}^{1/2}. \tag{6}$$

Неравенство (6) неулучшаемо, если $\omega(\delta)$ — выпуклый вверх модуль непрерывности.

3. Метод сплайн-коллокации

Приближенное решение уравнения (1) будем искать в виде сплайна первой степени

$$x_n(t) = \sum_{k=0}^{n} c_k \varphi_k(t), \tag{7}$$

а его коэффициенты $\{c_k\}_0^n$ определим по методу коллокации из условий

$$(Kx_n)(t_j) = y(t_j), \quad j = \overline{0,n}.$$

Эти условия относительно коэффициентов сплайна (7) представляют собой систему линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) вида

$$c_j + \sum_{k=0}^{n} \beta_{kj} c_k = y(t_j), \quad j = \overline{0,n}, \tag{8}$$

где

$$\beta_{kj} = \int_{t_{k-1}}^{t_k} \frac{(s - t_{k-1}) h_0(t_j, s) + h_1(t_j, s)}{t_k - t_{k-1}} ds + \\ + \int_{t_k}^{t_{k+1}} \frac{(t_{k+1} - s) h_0(t_j, s) - h_1(t_j, s)}{t_{k+1} - t_k} ds, \quad k = \overline{1, n-1}, \tag{9}$$

$$\beta_{0j} = \int_{t_0}^{t_1} \frac{(t_1 - s) h_0(t_j, s) - h_1(t_j, s)}{t_1 - t_0} ds, \tag{10}$$

$$\beta_{nj} = \int_{t_{n-1}}^{t_n} \frac{(s - t_{n-1}) h_0(t_j, s) + h_1(t_j, s)}{t_n - t_{n-1}} ds. \tag{11}$$

4. Основные результаты

Пусть F — класс функций $g(t,s)$, квадратично-суммируемых по s на $[0,1]$ равномерно относительно $t \in [0,1]$ и имеющих первую производную по переменной t, принадлежащую $H_{2,\omega}$ по t равномерно относительно s. В том случае, когда указанная производная принадлежит H_ω по переменной t равномерно относительно s, соответствующий класс обозначим через $\widetilde{F}$. Через F_1, F_2 обозначим класс F, определяемый модулями непрерывности ω_1, ω_2 соответственно. Аналогично, класс $\widetilde{F}$, определяемый модулями непрерывности ω_1, ω_2, будем обозначать через $\widetilde{F}_1$, $\widetilde{F}_2$ соответственно. Пусть F_3, $\widetilde{F}_3$ — классы функций $z(t)$, для которых $z' \in H_{2,\omega_3}$, $z' \in H_{\omega_3}$ соответственно. Обозначим через $\mathcal{E}_1$ класс однозначно разрешимых уравнений (1), когда известные функции $h_0(t,s)$, $h_1(t,s)$ и $y(t)$, ограниченные по норме пространства L_2 в своих областях определения, пробегают соответствующие классы F_1, F_2 и F_3.

Теорема 1. *Пусть* $\mathcal{E} = \mathcal{E}_1$. *Тогда*

$$V_n(\mathcal{E}) \asymp \omega_1\left(\frac{1}{n}\right) + \omega_2\left(\frac{1}{n}\right) + \omega_3\left(\frac{1}{n}\right),$$

и метод сплайн-коллокации (7)–(11) *по узлам сетки* (4), (5) *является оптимальным по порядку на классе* $\mathcal{E}$ *среди всевозможных прямых методов из* $\mathcal{E}_n$.

Теперь несколько сузим класс $\mathcal{E}$. А именно, обозначим через $\mathcal{E}_2$ подкласс класса $\mathcal{E}_1$, когда функции $h_0(t,s)$, $h_1(t,s)$ и $y(t)$ пробегают $\widetilde{F}_1$, $\widetilde{F}_2$ и $\widetilde{F}_3$. Пусть $Z^* = \{z(t) = x'(t) \mid x \in X^*\}$.

Теорема 2. *Пусть* ω_1, ω_2, ω_3 *— выпуклые вверх модули непрерывности,* $\mathcal{E} = \mathcal{E}_2$. *Тогда*

$$V_n(\mathcal{E}) \sim d_n(Z^*, L_2)$$

и метод сплайн-коллокации (7)–(11) *в случае равномерной сетки* (4) *является асимптотически оптимальным на классе* $\mathcal{E}$ *среди всевозможных прямых методов решения уравнения* (1).

5. Доказательство теорем

Уравнение (1) в пространстве $X = W_2^1$ можно записать в виде операторного уравнения

$$Kx \equiv x + H_0 x + H_1 x = y \quad (x, y \in X), \tag{1'}$$

где

$$(H_0 x)(t) = \int_0^1 h_0(t,s)x(s)ds, \quad (H_1 x)(t) = \int_0^1 h_1(t,s)x'(s)ds.$$

Так как операторы H_0 и H_1 вполне непрерывны в пространстве X, то в условиях теоремы 1 оператор $K : X \to X$ имеет двусторонний обратный, ограниченный на всем классе $\mathcal{E}$ уравнений (1) некоторой постоянной, зависящей лишь от класса $\mathcal{E}$.

Обозначим через X_n° подпространство сплайнов первой степени с узлами из сетки Δ_n, а через $P_n : X \to X_n^\circ$ — оператор S_n^1 сплайн-интерполирования. СЛАУ (8) запишем в подпространстве X_n° в виде эквивалентного ей операторного уравнения

$$K_n^\circ x_n \equiv x_n + P_n H_0 x_n + P_n H_1 x_n = P_n y \quad (x_n \in X_n^\circ). \tag{12}$$

Для правых частей уравнений (1′) и (12) имеем

$$\|y - P_n y\|_2^2 = \sum_{k=1}^n \int_{t_{k-1}}^{t_k} |y(t) - P_n(y,t)|^2 dt = \sum_{k=1}^n \int_{t_{k-1}}^{t_k} \left| \int_{t_{k-1}}^t [y'(\tau) - (P_n y)'(\tau)]d\tau \right|^2 dt \le$$

$$\le \|\Delta_n\|^2 \sum_{k=1}^n \int_{t_{k-1}}^{t_k} |y'(\tau) - (P_n y)'(\tau)|^2 d\tau = \|\Delta_n\|^2 \|y' - (P_n y)'\|_2^2.$$

Отсюда следует, что для любой функции $y \in W_2^1$

$$\|y - P_n y\|_2 \le \|\Delta_n\| \, \|y' - (P_n y)'\|_2 \le \|y' - (P_n y)'\|_2.$$

С другой стороны, функция $(P_n y)'(t)$, за исключением узлов сетки Δ_n, совпадает с "усредненным" сплайном $U_n(y', t)$. Поэтому с учетом последнего неравенства и леммы 2

$$\|y - P_n y\|_X = \|y' - (P_n y)'\|_2 = \|y'(t) - U_n(y', t)\|_2 \le$$

$$\le \sqrt{2\beta}\omega(y', \|\Delta_n\|_2) \le \sqrt{2\beta}\omega_3(\|\Delta_n\|) \le \sqrt{2\beta}(\beta + 1)\omega_3(1/n) \equiv \delta_n \to 0, \quad n \to \infty. \tag{13}$$

Неравенство (13) позволяет установить близость операторов K и K_n° на подпространстве X_n°. Для любого $x_n \in X_n^\circ$ с учетом неравенства Коши–Буняковского последовательно находим

$$\|Kx_n - K_n^\circ x_n\|_X \le \|H_0 x_n - P_n H_0 x_n\|_X + \|H_1 x_n - P_n H_1 x_n\|_X \le$$

$$\le \sqrt{2\beta}\{\omega\left((H_0 x_n)', \|\Delta_n\|\right)_2 + \omega\left((H_1 x_n)', \|\Delta_n\|\right)_2\} \le$$

$$\le \sqrt{2\beta}\left\{\omega_t\left(\frac{\partial h_0}{\partial t}, \|\Delta_n\|\right)_2 \|x_n\|_2 + \omega_t\left(\frac{\partial h_1}{\partial t}, \|\Delta_n\|\right)_2 \|x_n'\|_2\right\} \le$$

$$\le \sqrt{2\beta}\{\omega_1(\|\Delta_n\|) + \omega_2(\|\Delta_n\|)\}\|x_n\|_X \le \sqrt{2\beta}(\beta + 1)\{\omega_1(1/n) + \omega_2(1/n)\}\|x_n\|_X.$$

Поэтому

$$\|K - K_n^\circ\|_{X_n^\circ \to X} \le \sqrt{2\beta}(\beta + 1)\{\omega_1(1/n) + \omega_2(1/n)\} \equiv \varepsilon_n \to 0, \quad n \to \infty.$$

Из (13), последнего неравенства и общей теории приближенных методов функционального анализа (напр., [1], гл. I) следует

$$\sup_{x \in X^*} \|x - x_n^\circ\|_X = O(\varepsilon_n + \delta_n) = O\{\omega_1(1/n) + \omega_2(1/n) + \omega_3(1/n)\}, \tag{14}$$

где x_n° — решение уравнения (12), построенного методом (7)–(11).

Далее, для решения x уравнения (1) из класса $\mathcal{E}$ справедливо тождество

$$x'(t) + \int_0^1 \frac{\partial}{\partial t} h_0(t,s)x(s)ds + \int_0^1 \frac{\partial}{\partial t} h_1(t,s)x'(s)ds \equiv y'(t), \quad 0 \le t \le 1.$$

Так как равномерно относительно s функции $\frac{\partial}{\partial t}h_0(t,s)$ и $\frac{\partial}{\partial t}h_1(t,s)$ пробегают классы соответственно H_{2,ω_1} и H_{2,ω_2} по переменной t, а функция $y'(t)$ — класс H_{2,ω_3}, то так же, как это показано в [10] для интегральных уравнений второго рода, выводится соотношение

$$Z^* = H_\omega, \quad \omega(\delta) \asymp \omega_1(\delta) + \omega_2(\delta) + \omega_3(\delta), \quad 0 < \delta \le 1,$$

причем все функции из класса Z^* ограничены по норме пространства L_2 некоторой постоянной, зависящей лишь от самого класса $\mathcal{E}$ уравнений (1). Отсюда и из теории оптимизации вычислительных методов [1], [2] и теории поперечников компактов в нормированных пространствах (напр., [9]) вытекает справедливость неравенств

$$V_n(\mathcal{E}) \ge d_n(X^*, X) \asymp \omega(1/n),$$

что вместе с (14) доказывает теорему 1. $\square$

Для доказательства теоремы 2 прежде всего заметим, что из результатов [1] следует

$$V_n(\mathcal{E}) \ge d_n(X^*, W_2^1) \ge d_n(Z^*, L_2). \tag{15}$$

Покажем, что для метода (7)–(11) при $\|\Delta_n\| = 1/n$ имеет место соотношение

$$\sup\{\|x^* - x_n^\circ\|_X : x^* \in X^*\} \sim d_n(Z^*, L_2),$$

где x_n° — решение уравнения (12).

Действительно, погрешность $x^* - x_n^\circ \equiv z^*$ удовлетворяет уравнению $Kz^* = v$, $v = y - Kx_n^\circ$. Переписав его в виде $K(z^* - v) = -H_0 v - H_1 v$, получим

$$z^* - v = K^{-1}(-H_0 v - H_1 v). \tag{16}$$

Введем оператор $H_{n,1}^\circ : X \to X$,

$$(H_{n,1}^\circ v)(t) = \int_0^1 [U_n^s h_1(t,s)] v'(s)ds,$$

где оператор U_n^s означает действие оператора $U_n : X \to X_n^\circ$ по переменной s. Так как для $v = y - Kx_n^\circ$ имеют место равенства $v(t_k) = 0$, $k = \overline{0,n}$, и, следовательно, $\int\limits_{t_{j-1}}^{t_j} v'(t)dt = 0$, $j = \overline{1,n}$, то легко показать, что $H_{n,1}^\circ v = 0$.

Преобразуем оператор H_0. Полагая $\widetilde{h}_0(t,s) = \int\limits_0^s h_0(t,\tau)d\tau$, имеем

$$(H_0 v)(t) = \int_0^1 v(s)\frac{\partial}{\partial s}\widetilde{h}_0(t,s)ds = -\int_0^1 \widetilde{h}_0(t,s)v'(s)ds.$$

Введем оператор $H_{n,0}^\circ : X \to X$ по формуле

$$(H_{n,0}^\circ v)(t) = -\int_0^1 [U_n^s \widetilde{h}_0(t,s)] v'(s)ds.$$

Тогда для $v = y - Kx_n^\circ$, как и выше, получим $H_{n,0}^\circ v = 0$. Поэтому соотношение (16) можно записать в виде

$$z^* = v + K^{-1}[(H_{n,0}^\circ - H_0)v + (H_{n,1}^\circ - H_1)v].$$

Поскольку операторы $H_{n,0}^\circ : X \to X$ и $H_{n,1}^\circ : X \to X$ равномерно сходятся при $n \to \infty$ к операторам $H_0 : X \to X$ и $H_1 : X \to X$ соответственно, то

$$z^* \sim v, \quad n \to \infty. \tag{17}$$

Используя оператор $P_n = S_n^1$ сплайн-интерполирования первой степени на сетке (4) равноотстоящих узлов, преобразуем элемент v следующим образом:

$$v = (y - y_n) + (P_n H_0 - H_0)x_n^\circ + (P_n H_1 - H_1)x_n^\circ = (y - y_n) + (P_n H_0 - H_0)x^* + (P_n H_1 - H_1)x^* +$$
$$+(P_n H_0 - H_0)(x_n^\circ - x^*) + (P_n H_1 - H_1)(x_n^\circ - x^*) =$$
$$= (x^* - P_n x^*) - (P_n H_0 - H_0)z^* - (P_n H_1 - H_1)z^*, \quad y_n = P_n y.$$

Последнее равенство вместе с соотношением (17) позволяет получить асимптотическое равенство $z^* \sim x^* - P_n x^*$. Отсюда, воспользовавшись леммами 1 и 3, получим

$$\|x^* - x_n^\circ\|_X \equiv \|z^*\| \sim \|x^* - P_n x^*\|_X = \|x^{*\prime} - U_n x^{*\prime}\|_2 \le \frac{1}{2}\left\{n \int_0^{1/n} [\omega(t)]^2 dt\right\}^{1/2}, \quad x^* \in X^*. \quad (18)$$

С другой стороны, из неравенства (15) и результатов по поперечникам (напр., [9])

$$V_n(\mathcal{E}) \ge d_n(Z^*, L_2) \sim \frac{1}{2}\left\{n \int_0^{1/n} [\omega(t)]^2 dt\right\}^{1/2}. \quad (19)$$

Из соотношений (18) и (19) вытекает асимптотическое равенство

$$\sup_{x^* \in X^*} \|x^* - x_n^\circ\|_X \sim d_n(X^*, X),$$

а вместе с ним и справедливость теоремы 2.

6. Некоторые замечания и дополнения

1°. Пусть L_p $(1 \le p \le \infty)$ — пространство функций, суммируемых со степенью p $(p < \infty)$ или непрерывных $(p = \infty)$ в промежутке $[0,1]$. Обозначим через W_p^1 пространство Соболева функций, имеющих первую обобщенную производную, принадлежащую пространству L_p. Пусть $H_{p,\omega}$ — класс функций из L_p, интегральный в L_p модуль непрерывности которых не превосходит заданного модуля непрерывности ω.

Рассмотрим класс $\mathcal{E}_3$ однозначно разрешимых в пространстве W_p^1, $1 \le p \le \infty$, интегродифференциальных уравнений (1), определяемый классами исходных данных,

$h_0 \in L_q$ (по s), $q = p/(p-1)$, $\exists \frac{\partial}{\partial t} h_0(t,s) \in H_{p,\omega_1}$ по t равномерно относительно s;

$h_1 \in L_q$ (по s), $q = p/(p-1)$, $\exists \frac{\partial}{\partial t} h_1(t,s) \in H_{p,\omega_2}$ по t равномерно относительно s; $y' \in H_{p,\omega_3}$.

Введем также подкласс $\mathcal{E}_4$ класса $\mathcal{E}_3$, когда равномерно относительно переменной s функции $\frac{\partial}{\partial t} h_0(t,s) \in H_{\omega_1}$, $\frac{\partial}{\partial t} h_1(t,s) \in H_{\omega_2}$ по t, а $y' \in H_{\omega_3}$.

Тогда справедливы следующие результаты.

Теорема 3. *Пусть $X = W_p^1$ $(1 \le p \le \infty)$, $\mathcal{E} = \mathcal{E}_3$. Тогда*

$$V_n(\mathcal{E}) \asymp \omega_1\left(\frac{1}{n}\right) + \omega_2\left(\frac{1}{n}\right) + \omega_3\left(\frac{1}{n}\right), \quad 1 \le p \le \infty,$$

и метод сплайн-коллокации (7)–(11) по узлам сетки (4), (5) является оптимальным по порядку на классе $\mathcal{E}$ среди всевозможных прямых методов из $\mathcal{E}_n$.

Теорема 4. *Пусть $X = W_p^1$ $(1 \le p \le 3)$, ω_1, ω_2, ω_3 — выпуклые вверх модули непрерывности, $\mathcal{E} = \mathcal{E}_4$. Тогда*

$$V_n(\mathcal{E}) \sim d_n(Z^*, L_p), \quad 1 \le p \le 3,$$

и метод сплайн-коллокации (7)–(11) в случае равномерной сетки (4) является асимптотически оптимальным на классе $\mathcal{E}$ среди всевозможных прямых методов решения уравнения (1).

Отметим, что теоремы 3 и 4 доказываются по аналогии с доказательствами теорем 1 и 2, при этом используются результаты (напр., [8], [9]) по аппроксимации в пространствах L_p $(1 \leq p \leq \infty)$ сплайнами нулевой и первой степеней.

2°. В случае периодических интегродифференциальных уравнений (1) полученные результаты остаются в силе. Этот вывод вытекает из соответствующих результатов (напр., [8], [9]) для периодических сплайнов минимальных степеней.

3°. Из доказательства теоремы 1 следует, что оптимальным по порядку методом на классе $\mathcal{E}_1$ уравнений (1) среди всевозможных прямых методов из $\mathcal{E}_n$ будет любой проекционный метод (12), характеризуемый следующими свойствами:

а) подпространство X_n°, $\dim X_n^\circ \leq n$, пространства W_2^1 экстремально хотя бы по порядку для класса X^*,

б) операторы $P_n : X \to X_n^\circ$ являются проекционными и ограниченными по норме в совокупности.

4°. Аналогичные теоремам 1–4 результаты для сплайновых методов коллокационного типа имеют место и для интегродифференциальных уравнений произвольного конечного порядка, если исходные данные обладают определенными гладкостными свойствами, при этом необходимо использовать сплайн-функции более высоких степеней, удовлетворяющие определенным краевым условиям.

Литература

1. Габдулхаев Б.Г. *Оптимальные аппроксимации решений линейных задач.* – Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 1980. – 232 с.
2. Габдулхаев Б.Г. *Оптимальные аппроксимации решений линейных задач и прямые методы решения сингулярных интегральных уравнений*: Дисс. … докт. физ.-матем. наук в форме научн. докл. – Киев, 1985. – 48 с.
3. Габдулхаев Б.Г. *Некоторые вопросы теории приближенных методов.* II // Изв. вузов. Математика. – 1968. – № 10. – С. 21–29.
4. Габдулхаев Б.Г., Рахимов И.К. *Об одном оптимальном сплайн-методе решения операторных уравнений* // Изв. вузов. Математика. – 2002. – № 2. – С. 23–36.
5. Габдулхаев Б.Г. *Оптимизация прямых методов решения периодических краевых задач* // Изв. вузов. Математика. – 2002. – № 12. – С. 55–65.
6. Габдулхаев Б.Г., Закиев М.И., Семенов И.П. *Оптимальные проекционные методы решения одного класса интегродифференциальных уравнений* // Изв. вузов. Математика. – 2001. – № 1. – С. 24–35.
7. Габдулхаев Б.Г. *Оптимизация прямых и проекционных методов решения операторных уравнений* // Изв. вузов. Математика. – 1999. – № 12. – С. 3–18.
8. Агачев Ю.Р. *Сплайновые приближения решений интегральных и дифференциальных уравнений*: Дисс. … канд. физ.-матем. наук. – Казань, 1987. – 144 с.
9. Корнейчук Н.П. *Точные константы в теории приближения.* – М.: Наука, 1987. – 423 с.
10. Агачев Ю.Р. *Оптимизация прямых и проекционных методов решения слабосингулярных интегральных уравнений* // Изв. вузов. Математика. – 2001. – № 8. – С. 3–13.

Казанский государственный университет

Поступила 27.02.2003