ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2000 МАТЕМАТИКА № 1 (452)

УДК 519.46

В.В. ГОРБАЦЕВИЧ

О ТРИВИАЛЬНОСТИ НАТУРАЛЬНОГО РАССЛОЕНИЯ НЕКОТОРЫХ КОМПАКТНЫХ ОДНОРОДНЫХ ПРОСТРАНСТВ

Связные компактные однородные пространства имеют вид $M = G/H$, где G — связная группа Ли, а H — ее замкнутая подгруппа. В [1] для изучения таких M было введено натуральное расслоение. Для подходящего $M' = G/H'$, конечнолистно накрывающего M, строится расслоение $M_c \to M \to M_a$ (гладкое, локально тривиальное) со слоем M_c и базой M_a. Если группа Ли G, транзитивная на M, односвязна, а K — максимальная компактная подгруппа в ней, то база $M_a = K \setminus G/H'$ — асферичное многообразие (т. е. его гомотопические группы $\pi_i(M_a) = 0$ при всех $i > 1$), а слой $M_c = K/K \cap H'$ имеет конечную фундаментальную группу. Подробнее о натуральном расслоении и его свойствах см. [1], [2]. Если компактное однородное пространство M имеет вид G/Γ (где стационарная подгруппа Γ дискретна, а потому является решеткой в G, т. е. дискретной подгруппой с компактным фактор-пространством), то для подходящей подгруппы Γ' конечного индекса в Γ однородное пространство G/Γ', конечнолистно накрывающее исходное G/Γ, имеет натуральное расслоение.

Данная статья посвящена изучению гомотопических свойств натурального расслоения для компактных однородных пространств с дискретной стационарной подгруппой и их применению к изучению произвольных компактных однородных пространств.

Если фундаментальная группа $\pi_1(G)$ группы Ли G конечна, а K — максимальная компактная подгруппа в G (любая, ибо все такие подгруппы сопряжены в G), то натуральное расслоение имеет вид $M_c \to G/\Gamma' = M' \to K \setminus G/\Gamma' = M_a$. При этом можно считать, что $\Gamma' \cap K$ содержится в центре $Z(G)$ группы Ли G, а фактор-группа $\Gamma'/\Gamma' \cap K$ не имеет кручения (см. [1]). Положим $\widehat{G} = G/\Gamma' \cap K, \widehat{\Gamma} = \Gamma'/\Gamma' \cap K, \widehat{K} = K/K \cap \Gamma'$. Здесь $\widehat{K}$ будет максимальной компактной подгруппой в группе Ли $\widehat{G}$, $\widehat{\Gamma}$ — решетка в $\widehat{G}$, $\widehat{G}/\widehat{\Gamma}$ диффеоморфно многообразию $M' = G/\Gamma'$ и имеет главное $\widehat{K}$-расслоение $\widehat{K} \to \widehat{G}/\widehat{\Gamma} = M' \to M_a$ над M_a, являющееся натуральным для однородного многообразия M'. При этом группа $\pi_1(\widehat{G})$ конечна, а решетка $\widehat{\Gamma}$ свободна от кручения. Поэтому при изучении однородного многообразия $M = G/\Gamma$ с точностью до конечнолистного накрытия условия, накладываемые на G и Γ в следующей теореме, не являются слишком ограничительными. Для понимания формулировки этой теоремы полезно знакомство с классификацией полупростых вещественных алгебр Ли (необходимые сведения, в частности, список всех алгебр Ли I-й категории, можно найти, напр., в [3]).

Теорема 1. *Пусть G — связная группа Ли с конечной фундаментальной группой и без компактных полупростых факторов, Γ — решетка без кручения в G. Тогда*

(i) *если алгебра Ли $L(S)$ полупростой части S (т. е. фактора Леви) группы Ли G имеет хотя бы один идеал I-й категории или изоморфный одной из алгебр Ли вида $sl(2m, \mathbf{R})$, $so(2k+1, 2l+1)$, E_6I, а центр $Z(S)$ конечен, то $C(G, \Gamma, \mathbf{R}) \neq \{0\}$;*

(ii) *если любой простой идеал в алгебре Ли $L(S)$ изоморфен алгебрам Ли вида $sl(2n+1, \mathbf{R})$, E_6IV или имеет комплексную структуру, то $C(G, \Gamma, \mathbf{R}) = \{0\}$.*

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 98-01-00329).

Доказательство. Пусть $G = S \cdot R$ — разложение Леви группы Ли G (R — радикал, S — полупростая часть). Тогда из условия конечности $\pi_1(G)$ следует, что группа Ли R односвязна, фундаментальная группа $\pi_1(S)$ конечна и $S \cap R = \{e\}$. Положим $\Gamma_s = \Gamma/\Gamma \cap R$. Из условий на группу Ли G вытекает, что Γ_s будет решеткой в полупростой группе Ли S (см. [4]).

Характеристическая алгебра $C(G, \Gamma, \mathbf{R})$, введенная в [5], по определению является образом гомоморфизма алгебр вещественных когомологий $i^* : H^*(G, \mathbf{R}) \to H^*(\Gamma, \mathbf{R})$, индуцированного вложением $i : \Gamma \to G$ решетки Γ как подгруппы в G. В [5] доказано, что $C(G, \Gamma, \mathbf{R})$ изоморфна $C(S, \Gamma_s, \mathbf{R})$ — характеристической алгебре пары S, Γ_s. Пусть $S = S_1 \cdot S_2 \cdot \dots \cdot S_l$ — разложение полупростой группы Ли S в почти прямое произведение простых нормальных делителей S_i. По условию центр $Z(S)$ конечен, поэтому (см. [5]) $C(S, \Gamma, \mathbf{R}) \simeq \oplus_{i=1}^{l} C(S_i)$ (где алгебры $C(S_i)$ в явном виде указаны в [5]). В случае (i) из явного вида алгебр $C(S_i)$ следует, что здесь $C(S, \Gamma_s, \mathbf{R}) \neq 0$, а потому и $C(G, \Gamma, \mathbf{R}) \neq 0$.

Аналогичным образом из результатов работы [5] выводится равенство $C(G, \Gamma, \mathbf{R}) = 0$ п. (ii). $\square$

Нам понадобится следующее утверждение.

Предложение 1 ([5], предложение 2.1). *Пусть Γ — дискретная подгруппа без кручения в связной группе Ли G, K — максимальная компактная подгруппа в G. Тогда равенство $C(G, \Gamma, \mathbf{R}) = \{0\}$ эквивалентно изоморфности градуированных пространств $H^*(G/\Gamma, \mathbf{R})$ и $H^*(K, \mathbf{R}) \otimes H^*(\Gamma, \mathbf{R})$.*

В силу этого предложения из теоремы 1 получаем

Следствие. Пусть G и Γ те же, что в условии теоремы 1. Тогда натуральное расслоение для $M = G/\Gamma$ имеет вид $K \to G/\Gamma \to M_a = K \setminus G/\Gamma$ и справедливы следующие утверждения:

(i) если полупростая часть S группы Ли G удовлетворяет условиям п. (i) теоремы 1, то многообразие M не может быть диффеоморфно $K \times M_a$ и, в частности, натуральное расслоение для M нетривиально;

(ii) если алгебра Ли $L(S)$ группы Ли S удовлетворяет условиям п. (ii) из теоремы 1, то алгебра когомологий $H^*(M, \mathbf{R})$ аддитивно изоморфна $H^*(K \times M_a, \mathbf{R}) \simeq H^*(K, \mathbf{R}) \otimes H^*(M_a, \mathbf{R})$ (в этом случае говорят, что натуральное расслоение для M когомологически тривиально).

Утверждение (i) следствия доставляет широкий класс примеров компактных однородных пространств вида G/Γ (т. е. имеющих дискретную стационарную подгруппу), у которых натуральное расслоение нетривиально. В случае же (ii) этой теоремы получаем когомологически тривиальные (над $\mathbf{R}$) натуральные расслоения, которые при этом не обязательно будут гладко тривиальными или даже послойно гомотопически тривиальными. В одном частном случае все же удается доказать послойную гомотопическую тривиальность натурального расслоения, что усиливает в этом случае утверждение (i) теоремы 1.

Теорема 2. *Пусть Γ — решетка в группе Ли $G = \times_{i=1}^{l} SL(n_i, \mathbf{C})$. Тогда существует подгруппа Γ' конечного индекса в Γ, свободная от кручения, для которой имеют место следующие утверждения:*

(i) *натуральное расслоение для однородного пространства $M' = G/\Gamma'$, конечнолистно накрывающего M, послойно гомотопически тривиально;*

(ii) *многообразие G/Γ' гомотопически эквивалентно прямому произведению $K \times K \setminus G/\Gamma'$, где $K = \times_{i=1}^{l} SU(n_i)$.*

Доказательство. Ясно, что утверждение (ii) следует из (i). Докажем (i).

В силу леммы Сельберга (см., напр., [4]) в Γ существует подгруппа Γ'' конечного индекса, свободная от кручения. Для компактного однородного пространства G/Γ'', конечнолистно накрывающего M, существует натуральное расслоение, которое имеет вид $K \to G/\Gamma'' \to K \setminus G/\Gamma'' = B\Gamma''$, где $B\Gamma''$ — классифицирующее пространство группы Γ'', $K = \times_{i=1}^{l} SU(n_i)$. В [5] для такого расслоения построено послойно гомотопически эквивалентное ему плоское G-расслоение, которое имеет вид $G \to G \times_{\Gamma''} K \setminus G \to K \setminus G/\Gamma''$ (пространство этого расслоения является расслоенным произведением). Из доказанной ниже леммы вытекает, что для некоторой подгруппы Γ' конечного индекса в Γ'' плоское $\times_{i=1}^{l} SL(n_i, \mathbf{C})$-расслоение над многообразием $B\Gamma' = K \setminus G/\Gamma'$ (которое конечнолистно накрывает $B\Gamma''$), индуцированное исходным плоским расслоением над $B\Gamma''$, будет тривиально (в этом случае говорят, что исходное плоское расслоение виртуально тривиально). Но тогда утверждение (i) вытекает из послойной гомотопической эквивалентности натурального расслоения и соответствующего ему плоского расслоения ([5], теорема 1.2). □

Лемма. *Произвольное плоское $SL(n, \mathbf{C})$-расслоение над многообразием X виртуально тривиально.*

Доказательство. Пусть $\{g_{\alpha\beta}\}$ — коцикл плоского расслоения над X. Здесь $g_{\alpha\beta}$ — постоянные отображения $U_\alpha \cap U_\beta \to SL(n, \mathbf{C})$, $\{U_\alpha\}$ — открытое покрытие X, причем U_α можно предполагать односвязными. Мы можем рассматривать это расслоение и как $GL(n, \mathbf{C})$-расслоение. В [6] доказано, что плоское $GL(n, \mathbf{C})$-расслоение виртуально тривиально, т. е. существует такое конечнолистное накрытие $X' \to X$, что индуцированное им плоское $GL(n, \mathbf{C})$-расслоение над X' тривиально. Можем считать, что это верно уже для исходного расслоения (заменяя X на X'). Это означает, что $g_{\alpha\beta} = h_\alpha h_\beta^{-1}$ для некоторых гладких отображений $h_\alpha : U_\alpha \to GL(n, \mathbf{C})$. Остается от этой тривиализации GL-расслоения перейти к тривиализации SL-расслоения.

По условию $\det(g_{\alpha\beta}) = 1$, поэтому $\det(h_\alpha) = \det(h_\beta)$. Так как U_α односвязны, то существуют такие гладкие функции $r_\alpha : U_\alpha \to \mathbf{C}^\star$, что $r_\alpha^n = \det(h_\alpha)$ (r_α — это просто ветвь корня n-й степени из $\det(h_\alpha)$). Положим $s_\alpha = h_\alpha / r_\alpha$, получим гладкие отображения $s_\alpha : U_\alpha \to SL(n, \mathbf{C})$. При этом имеем $g_{\alpha\beta} = s_\alpha s_\beta^{-1} r_\alpha r_\beta^{-1}$. Положим теперь $\phi_{\alpha\beta} = r_\alpha r_\beta^{-1}$. Имеем $(\phi_{\alpha\beta})^n = 1$, поэтому $\phi_{\alpha\beta}$ — это отображения (очевидно, постоянные) $U_\alpha \cap U_\beta \to \mathbf{Z}_n \subset \mathbf{C}^\star$, представляющие некоторый класс когомологий ϕ из $H^1(X, \mathbf{Z}_n)$. Как известно (это вытекает, напр., из теоремы об универсальных коэффициентах для когомологий), группа $H^1(X, \mathbf{Z}_n)$ изоморфна $\mathrm{Hom}(\pi_1(X), \mathbf{Z}_n)$. Поэтому класс ϕ можно рассматривать как гомоморфизм $\phi : \pi_1(X) \to \mathbf{Z}_n$. Ядро $\ker \phi$ этого гомоморфизма является подгруппой конечного индекса в $\pi_1(X)$. Если перейти к конечнолистному накрытию над X, соответствующему этой подгруппе, то индуцированный из ϕ этим накрытием коцикл будет тривиален. Так как рассматривается X с точностью до конечнолистного накрытия, то можно считать, что уже для X коцикл ϕ тривиален. Это означает, что $r_\alpha / r_\beta = t_\alpha / t_\beta$, где $t_\alpha \in \mathbf{Z}_n$. Но тогда гладкие отображения $s_\alpha t_\alpha : U_\alpha \to SL(n, \mathbf{C})$ дают требуемую тривиализацию SL-расслоения над X. □

Следующее утверждение связано по смыслу с теоремой 2 и касается вопроса обращения в нуль всех рациональных характеристических классов (т. е. классов Понтрягина, Эйлера) для некоторых асферичных многообразий, а именно для баз натуральных расслоений компактных однородных пространств вида G/Γ.

Предложение 2. *Пусть G – связная группа Ли, радикал R которой односвязен, а фундаментальная группа $\pi_1(G)$ конечна. Пусть также Γ — решетка в G, а K — максимальная компактная подгруппа в G. Тогда все рациональные характеристические классы гладкого многообразия $M_a = K \setminus G/\Gamma'$ (где Γ' — некоторая подходящая подгруппа конечного индекса в Γ) тривиальны, если алгебра Ли $L(S)$ полупростой части S группы Ли G изоморфна алгебрам Ли вида $so(2,n)$, $su(1,n)$ или же все простые идеалы в $L(S)$ изоморфны простым алгебрам Ли вида $sl(2n+1, \mathbf{R}), E_6 IV$, или комплексны.*

Доказательство непосредственно вытекает из теоремы 1.2, теоремы 3.3 и предложения 4.3 работы [5], а также предложения 6.3 из [1] (где построена редукция к K структурной группы касательного расслоения для M_a).

Получим теперь некоторые результаты, касающиеся произвольных компактных однородных пространств $M = G/H$ (стационарная подгруппа H тут уже не обязательно дискретна). Как уже отмечалось выше, для подходящего $M' = G/H'$, конечнолистно накрывающего M, существует натуральное расслоение $M_c = K/K \cap H' \to M' \to M_a = K \setminus G/H'$. При этом можно считать, что структурной группой этого расслоения является связная компактная группа Ли Q_0 — связная компонента единицы группы Ли $Q = N_K(L)/L$ (структурной группы натурального расслоения), где $L = H' \cap K$, а K — максимальная компактная подгруппа в G [1]. В общем случае натуральное расслоение не является плоским (т. е. его функции перехода не обязательно постоянны), однако имеет место следующее утверждение.

Теорема 3. *Пусть $M = G/H$ — компактное однородное пространство. Тогда для некоторого M', конечнолистно накрывающего M, натуральное расслоение послойно гомотопически эквивалентно плоскому Γ'-расслоению со слоем $G' \times_{K'} M_c$ (имеющим вид расслоенного произведения, соответствующего естественным действиям группы K' на G' и M_c), где M_c — слой натурального расслоения для M', K' — некоторая подгруппа в $Q_0 = (N_K(L)/L)_0$, G' — некоторая группа Ли, $K' \subset G'$, а Γ' — решетка в G' (более подробно G', K', Γ' описаны в доказательстве).*

Доказательство. Для некоторого подходящего M', конечнолистно накрывающего M, структурную группу натурального расслоения можно редуцировать к Q_0. Рассмотрим главное Q_0-расслоение над M', соответствующее этому расслоению. В [7] показано, что структурную группу можно редуцировать к такой подгруппе K', что соответствующее главное K'-расслоение имеет вид $K' \to G'/\Gamma' \to K' \backslash G'/\Gamma' = M_a$, где G' — некоторая связная (но не обязательно односвязная) группа Ли, Γ' — решетка в G', а K' является максимальной компактной подгруппой в G'. Отметим, что при должном выборе группы Ли G, транзитивной на M, группа Ли G' конечнолистно накрывается связной группой Ли $(N_G(H'_o/H'_0))_0 \times \mathbf{R}^n$ при некотором $n \in \mathbf{N}$, а группа Γ' слабо соизмерима с $\pi_1(M')$ (см. [7]). Еще следует отметить, что расслоение $K' \to G'/\Gamma' \to K' \setminus G'/\Gamma'$ не обязательно является натуральным для G'/Γ' (ибо K' не обязательно полупроста).

Натуральное расслоение для M' ассоциировано с указанным выше K'-расслоением, и слоем оно имеет M_c, поэтому оно может быть записано в виде $M_c \to M_c \times_{K'} G'/\Gamma' \to K' \setminus G'/\Gamma' = M_a$ (напомним, что $K' \subset Q_0$, а потому K' естественным образом действует на M_c). В частности, M' диффеоморфно многообразию $M_c \times_{K'} G'/\Gamma'$.

Рассмотрим теперь естественное отображение $K' \setminus G' \times_{\Gamma'} G' \to G'/\Gamma'$, оно является гомотопической эквивалентностью (подробнее см. [1], [7]). Это отображение индуцирует гомотопическую эквивалентность расслоенных произведений $\phi : (K' \setminus G' \times_{\Gamma'} G') \times_{K'} M_c \to G'/\Gamma' \times_{K'} M_c$ (пространств расслоений со слоем M_c над гомотопически эквивалентными базами). Ясно, что $G'/\Gamma' \times_{K'} M_c$ естественным образом отождествляется с M', а естественное отображение $p : G'/\Gamma' \times_{K'} M_c \to K' \setminus G'/\Gamma'$ является проекцией натурального расслоения для M'. Далее, имеется естественное отождествление $(K' \setminus G' \times_{\Gamma'} G') \times_{K'} M_c = K' \setminus G' \times_{\Gamma'} (G' \times_{K'} M_c)$. Наконец, обозначим через $\widehat{p}$ проекцию плоского Γ'-расслоения над $M_a = K' \setminus G'/\Gamma'$ со слоем $G' \times_{K'} M_c$. Гомотопическая эквивалентность ϕ перестановочна, как легко понять, с проекциями p и $\widehat{p}$, а потому является искомой послойной гомотопической эквивалентностью. □

В силу теоремы 3 получаем возможность использовать при изучении топологии произвольных компактных однородных пространств результаты, касающиеся плоских расслоений, а также связанные с ними результаты о расслоениях вида $K \to G/\Gamma \to K \setminus G/\Gamma$, полученные выше. Отметим, что структурная группа плоского расслоения из теоремы 3 — это в точности группа $\Gamma' = \pi_1(M_a)$, которая естественным образом действует на слое $G' \times_{K'} M_c$ (ибо $\Gamma' \subset G'$).

Пусть $M = G/H$ — однородное пространство группы Ли $G = S \cdot R$ (S — полупростая часть, R — радикал). Естественное транзитивное действие G на M называется правильным, если $S \cdot N_G(H_0) = G$. От любого транзитивного действия группы Ли на компактном многообразии всегда можно перейти к правильному действию (см. [2], [7]).

Предложение 3. *Пусть $M = G/H$ — компактное однородное пространство, причем группа Ли G действует на M правильно (см.* [2], [7]). *Тогда если группа Ли $(N_G(H_0)/H_0)_0$ локально изоморфна группе Ли вида $\times_{i=1}^{l} SL(n_i, \mathbf{C})$, то для некоторого M', конечнолистно накрывающего M, натуральное расслоение послойно гомотопически тривиально.*

Доказательство немедленно следует из теорем 2 и 3.

Можно привести и другие примеры использования результатов, доказанных выше и в статье [5], для изучения топологического строения компактных однородных пространств, это будет сделано в других работах автора (см. также [8]).

Литература

1. Горбацевич В.В. *Об одном расслоении компактного однородного пространства* // Тр. Московск. матем. о-ва. – 1981. – Т. 43. – С. 116–141.
2. Горбацевич В.В., Онищик А.Л. *Группы Ли преобразований* // Итоги науки и техн. ВИНИТИ. Современ. пробл. матем. – 1988. – Т. 20. – С. 103–240.
3. Винберг Э.Б., Горбацевич В.В., Онищик А.Л. *Строение групп и алгебр Ли* // Итоги науки и техн. ВИНИТИ. Современ. пробл. матем. – 1990. – Т. 41. – С. 255–258.
4. Рагунатан М. *Дискретные подгруппы группы Ли.* – М.: Мир, 1977. – 320 с.
5. Горбацевич В.В. *О когомологиях компактных однородных пространств с дискретной стационарной подгруппой* // Вопр. теории групп и гомологич. алгебры. – Ярославль, 1990. – С. 107–123.
6. Deligne P., Sullivan D. *Fibres vectoriels complexes a groupe structural discret* // C. R. Acad. Sci. – 1975. – V. 281. – № 24. – P. 1081–1083.
7. Горбацевич В.В. *Модификации транзитивных действий групп Ли на компактных многообразиях и их применения* // Вопр. теории групп и гомологич. алгебры. – Ярославль, 1981. – С. 131–145.
8. Горбацевич В.В. *Некоторые гомотопические свойства натурального расслоения для компактных однородных многообразий* // ДАН СССР. – 1982. – Т. 264. – № 3. – С. 525–528.

Московский государственный авиационный технический университет

Поступила 13.05.1998