ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2002 МАТЕМАТИКА № 7 (482)

УДК 517.983

А.П. ЧЕГОЛИН

КЛАССЫ $L^\alpha_{p,r}$ ТИПА ЛИЗОРКИНА–САМКО, СВЯЗАННЫЕ С КОМПЛЕКСНЫМИ СТЕПЕНЯМИ ТЕЛЕГРАФНОГО ОПЕРАТОРА

В данной статье дано описание классов $L_r \cap H^\alpha(L_p) = L^\alpha_{p,r}$, $\operatorname{Re}\alpha > 0$, где H^α — дробный "телеграфный" потенциал, реализующий отрицательные ($\operatorname{Re}\alpha < 0$) степени телеграфного оператора

$$\square + \frac{\partial}{\partial x_1}, \quad \square = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} - \cdots - \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}. \tag{1}$$

Поясним интерес к описанию классов такого типа.

Пусть дан оператор типа потенциала $I^\alpha\phi = k_\alpha * \phi$, т.е. оператор свертки с ядром, имеющим степенную или логарифмическую особенность на некотором множестве в R^n. Одной из основных задач в теории таких операторов является описание функций, представимых потенциалом $I^\alpha\phi$ с плотностью из L_p, т.е. описание образа $I^\alpha(L_p)$. Ядро $k_\alpha(x)$ при некоторых α может расти на бесконечности, а также может быть локально несуммируемым на некотором множестве в R^n (в рассмотренном здесь случае ядра потенциалов H^α, реализующих отрицательные степени оператора (1), локально несуммируемы на световом конусе будущего $K^+_+ = \{y : y_1^2 \geq |y'|^2,\ y_1 \geq 0\}$, $y' = (y_2, \dots, y_n)$, при $0 < \operatorname{Re}\alpha \leq n-2$). В этом случае интеграл $I^\alpha\phi$, вообще говоря, расходится на функциях из L_p; потенциал I^α трактуется как оператор, действующий из L_p в специальное пространство Φ' обобщенных функций над основным пространством Φ, в котором $k_\alpha(x)$ является свертывателем. Конструктивно описать образ $I^\alpha(L_p)$ в такой ситуации не представляется возможным. Однако в некоторых случаях удается описать класс $I^\alpha(L_p) \cap L_r$.

Пространства $L^\alpha_{p,r} = L_r \cap I^\alpha(L_p)$, $1 < p, r < \infty$, $\alpha > 0$, где $I^\alpha(L_p)$ — пространство риссовых потенциалов, изучались в [1], [2] (см. также [3], § 26; [4], § 13), где было дано описание этих пространств в терминах гиперсингулярных интегралов. Случай $r = p$ был рассмотрен в [5]. Пространства $L^\alpha_{p,r}$, связанные с комплексными степенями неэллиптических операторов, наиболее трудные для исследования, в особенности, когда оператор является неоднородным, рассматривались мало. Здесь можно отметить только работы [6]–[9], где в рамках метода аппроксимативных обратных операторов (АОО) было получено описание пространств указанного типа, в которых $I^\alpha(L_p)$ — образ гиперболического потенциала $(\pm\square)^{-\alpha/2}$, дробного потенциала Клейна–Гордона–Фока $(m^2 \pm \square)^{-\alpha/2}$, $m > 0$, и дробного потенциала Шредингера $H_k = (kE + \Delta_x + i\frac{\partial}{\partial t})^{-\alpha/2}$, $k = 0, 1$.

1. Вспомогательные сведения

В работе используются обозначения: $(D^j f)(x) = \partial^{|j|} f(x)/\partial x_1^{j_1} \cdots \partial x_n^{j_n}$, где $j = (j_1, \dots, j_n)$ — мультииндекс; $\langle f, g\rangle = \int\limits_{R^n} \overline{f(x)} g(x)dx$; $(\mathcal{F}f)(\xi) = \int\limits_{R^n} f(x)\exp(i\xi\cdot x)dx$ — преобразование Фурье функции $f(x)$; $(\mathcal{F}^{-1}f)(x) = (2\pi)^{-n}\int\limits_{R^n} f(\xi)\exp(-ix\cdot\xi)d\xi$ — обратное преобразование Фурье, $(W_\varepsilon\phi)(x)$ — интеграл Гаусса–Вейерштрасса; S^{n-1} — единичная сфера в R^n; $L_p = L_p(R^n)$;

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 00-01-00046а.

$L_{p,\gamma} = \{f(x) : (1+|x|^2)^{\gamma/p} f(x) \in L_p\}$; $L_p + L_q = \{f = f_0 + f_1 : f_0 \in L_p,\ f_1 \in L_q\}$, $\|f\|_{L_p+L_q} = \inf\{\|f_0\|_p + \|f_1\|_q\}$, где нижняя грань берется по всевозможным представлениям f в виде суммы f_0+f_1; $\Re_0 = \{\phi : \phi = \mathcal{F}f,\ f \in L_1\}$ — винеровское кольцо функций; $S = S(R^n)$ — класс Л. Шварца быстро убывающих гладких функций; $\Psi_V = \{\psi(x) \in S : D^k\psi(x) = 0,\ x \in V,\ |k| = 0,1,2,\dots\}$, $\Phi_V = \mathcal{F}^{-1}(\Psi_V)$ (V — произвольное замкнутое множество в R^n), $\Psi = \Psi_{\{0\}}$, $\Phi = \Phi_{\{0\}}$.

Лемма 1 (об аналитичности интеграла по параметру [10]). *Пусть функция $f(x,z)$ аналитична по z в некоторой области $D \subset \mathbf{C}$ для почти всех $x \in R^n$ и имеет суммируемую мажоранту $|f(x,z)| \le F(x) \in L_1$. Тогда интеграл $\int\limits_{R^n} f(x,z)dx$ аналитичен по z в области D.*

Лемма 2 (признак принадлежности винеровскому кольцу [3]). *Пусть $f \in L_1$. Если для почти всех $x \in R^n$ существует $(D^m f)(x)$ и $(D^m f)(x) \in L_p$ при некотором $p \in (1,2]$ для всех $m = 1,2,\dots,n$ и любых попарно различных $k_1,\dots,k_m$, то $f \in \Re_0$.*

Лемма 3 (равномерные оценки по индексу для модифицированной функции Бесселя $I_\nu(z)$). *Пусть $|\operatorname{Re}\nu| < M$, $|\operatorname{Im}\nu| < N$, где M и N — произвольные положительные числа. Тогда справедлива оценка*

$$|I_\nu(y)| \le C(M,N)\begin{cases} y^{\operatorname{Re}\nu}, & 0 < y \le 1; \\ \exp(y)y^{-1/2}, & y > 1, \end{cases}$$

где постоянная $C(M,N)$ не зависит от ν.

Утверждение леммы следует из интегральных представлений для модифицированной функции Бесселя (см., напр., [11]).

Лемма 4 (L_p–L_q-оценки для гиперболических риссовых потенциалов). *Пусть $n-2 < \operatorname{Re}\alpha < n$, $2n(n-1)/(n^2+\operatorname{Re}\alpha(n-2)) < p < 2(n-1)/(\operatorname{Re}\alpha+n^2)$, $n \ge 2$, $q = np/(n-p\operatorname{Re}\alpha)$, функция ϕ из L_p такова, что $(I_\square^{\operatorname{Re}\alpha}|\phi|)(x) < \infty$ для почти всех $x \in R^n$. Тогда для гиперболических риссовых потенциалов*

$$(I_\square^\alpha\phi)(x) = \frac{1}{H_n(\alpha)}\int\limits_{K_+^+}\frac{\phi(x-y)}{r^{n-\alpha}(y)}dy, \quad \operatorname{Re}\alpha > 0,$$

$$H_n(\alpha) = 2^{\alpha-1}\pi^{\frac{n}{2}-1}\Gamma\Big(\frac{\alpha+2-n}{2}\Big),$$

справедлива оценка $\|I_\square^\alpha\phi\|_q \le A\|\phi\|_p$, где постоянная A не зависит от функции ϕ.

При $n = 2$ утверждение леммы доказано в ([4], § 28), а в случае произвольного n — в [12].

2. Отрицательные степени телеграфного оператора в L_p-пространствах

Покажем, что отрицательные степени оператора (1) представимы в виде операторов типа потенциала

$$(H^\alpha\phi)(x) = c_n(\alpha)\int\limits_{K_+^+}\frac{\exp(-y_1/2)I_{\frac{\alpha-n}{2}}(r(y)/2)}{r^{\frac{n-\alpha}{2}}(y)}\phi(x-y)dy, \quad \operatorname{Re}\alpha > 0, \tag{2}$$

где $r(y) = \sqrt{y_1^2 - |y'|^2}$ — лоренцево расстояние, $I_{\frac{\alpha-n}{2}}(x)$ — модифицированная функция Бесселя, $c_n(\alpha) = 2^{1-n}\pi^{1-\frac{n}{2}}i^{\frac{n-\alpha}{2}}/\Gamma(\frac{\alpha}{2})$.

Действие оператора H^α описывается следующей теоремой.

Теорема 1. а) *Пусть* $n-1 \le \operatorname{Re}\alpha < n+1$, $4n(n-1)/(2n^2+(n+\operatorname{Re}\alpha-1)(n-2)) < p < 4(n-1)/(3n+\operatorname{Re}\alpha-5)$, $1/q = 1/p - (\operatorname{Re}\alpha+n-1)/2n$. *Тогда для тех* $\phi \in L_p$, *для которых* $(H^\alpha|\phi|)(x) < \infty$, *справедливо неравенство*

$$\|H^\alpha\phi\|_q \le c\|\phi\|_p.$$

б) *Пусть* $n-2 < \operatorname{Re}\alpha < n-1$ *при* $n \le 8$ *и* $n(n-5)/(n-4) < \operatorname{Re}\alpha < n-1$ *при* $n>8$, $2n(n-1)/(n^2+\operatorname{Re}\alpha(n-2)) < p < 4(n-1)/(3n+\operatorname{Re}\alpha-5)$, $\phi \in L_p$ *и* $(I_\Box^{\operatorname{Re}\alpha}|\phi|)(x) < \infty$, $(I_\Box^{\frac{n+\operatorname{Re}\alpha-1}{2}}|\phi|)(x) < \infty$ (*для почти всех* $x \in R^n$). *Тогда*

$$\|H^\alpha\phi\|_{L_{q_1}+L_{q_2}} \le c\|\phi\|_p, \quad \frac{1}{q_1} = \frac{1}{p} - \frac{\operatorname{Re}\alpha}{2n}, \quad \frac{1}{q_2} = \frac{1}{p} - \frac{\operatorname{Re}\alpha+n-1}{2n},$$
$$\|H^\alpha\phi\|_{L_{p,\gamma}} \le c\|\phi\|_p, \quad \gamma < \min\Big\{-p\operatorname{Re}\alpha, -\frac{p}{2}\Big(\operatorname{Re}\alpha+n-1\Big)\Big\}.$$

Утверждение теоремы с учетом леммы 4 следует из оценок

$$|(H^\alpha\phi)(x)| \le A(I_\Box^{\frac{n+\operatorname{Re}\alpha-1}{2}}|\phi|)(x), \quad \operatorname{Re}\alpha \ge n-1,$$
$$|(H^\alpha\phi)(x)| \le A\big((I_\Box^{\operatorname{Re}\alpha}|\phi|)(x) + (I_\Box^{\frac{n+\operatorname{Re}\alpha-1}{2}}|\phi|)(x)\big), \quad n-2 < \operatorname{Re}\alpha < n-1.$$

Перейдем к доказательству того, что потенциалы (2) реализуют отрицательные степени оператора (1). Для этого необходимо показать, что символом потенциала (2) является функция

$$m_\alpha(\xi) = (-r^2(\xi) - i\xi_1)^{-\frac{\alpha}{2}}.$$

Справедлива

Теорема 2. *Пусть* $\phi \in \Phi$, $\operatorname{Re}\alpha > n-2$. *Тогда справедлива формула*

$$(\mathcal{F}H^\alpha\phi)(\xi) = m_\alpha(\xi)(\mathcal{F}\phi)(\xi). \tag{3}$$

Доказательство. Докажем вначале формулу для преобразования Фурье в слабом смысле

$$(H^\alpha\phi)(x) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int\limits_{R^n} m_\alpha(\xi)(\mathcal{F}\phi)(\xi)\exp(-ix\cdot\xi)d\xi. \tag{4}$$

Пусть $\phi \in \Phi_V$, $V = \{\xi \in R^n : \xi' = 0\}$. Имеем

$$(H^\alpha\phi)(x) = c_{n,1}(\alpha)\int\limits_{K_+^+}\frac{\exp(-\frac{y_1}{2})I_{\frac{\alpha-n}{2}}(\frac{r(y)}{2})}{r^{\frac{n-\alpha}{2}}(y)}\phi(x-y)dy =$$
$$= \frac{c_{n,1}(\alpha)}{(2\pi)^{\frac{n+1}{2}}}\lim_{N\to\infty}\int\limits_{R^n}|\xi'|^{\frac{n-3}{2}}(\mathcal{F}\phi)(\xi)d\xi\int\limits_0^N y_1^{\frac{\alpha+1}{2}}\exp(-\frac{y_1}{2}+iy_1\xi_1)dy_1 \times$$
$$\times\int\limits_0^1\rho^{\frac{n-1}{2}}(1-\rho^2)^{\frac{\alpha-n}{4}}J_{\frac{\alpha-n}{2}}(iy_1\sqrt{1-\rho^2})J_{\frac{n-3}{2}}(y_1\rho|\xi'|)d\rho \equiv \frac{c_{n,1}(\alpha)}{(2\pi)^{\frac{n+1}{2}}}\lim_{N\to\infty}\int\limits_{R^n}g_N(\xi)d\xi, \tag{5}$$

где $J_\nu(z)$ — функция Бесселя порядка ν, связанная с функцией $I_\nu(z)$ по формуле $I_\nu(z) = \exp(-\frac{\pi\nu}{2}i)J_\nu(iz)$ (см. [11]). Обоснуем с помощью мажорантной теоремы Лебега возможность предельного перехода под знаком интеграла в правой части (5). При $|\xi'|^2 > 1/4$, вычисляя интеграл по отрезку $[0,1]$ по формуле 6.598 из [13], будем иметь

$$|g_N(\xi)| = 2^{2n-\operatorname{Re}\alpha-1}\pi^{\frac{n-1}{2}}\frac{|(\mathcal{F}\phi)(\xi)|}{(|\xi'|^2-\frac{1}{4})^{(\operatorname{Re}\alpha-1)/4}}\Big|\int\limits_0^N y_1^{\frac{\operatorname{Re}\alpha-1}{2}}\exp\big(-(\tfrac{1}{2}-i\xi_1)y_1\big)J_{\frac{\alpha-1}{2}}(y_1\sqrt{|\xi'|^2-\tfrac{1}{4}})dy_1\Big|.$$

Воспользуемся оценкой

$$|J_\nu(x)| \le A|x|^{\operatorname{Re}\nu}, \quad \operatorname{Re}\nu \ge -1/2$$

(см., напр., [11], с. 23). Тогда $|g_N(\xi)| \le A|(\mathcal{F}\phi)(\xi)|$, где A не зависит от N.

Если $|\xi'|^2 < 1/4$, то с учетом леммы 3 и асимптотического поведения неполной Г-функции имеем

$$|g_N(\xi)| \le A|(\mathcal{F}\phi)(\xi)|\left(1 + \frac{1}{|\xi'|^2}\right); \tag{6}$$

здесь A не зависит от N. Применяя к функции $(\mathcal{F}\phi)(\xi) \in \Psi_V$ формулу Тейлора по переменной ξ', будем иметь

$$(\mathcal{F}\phi)(\xi) = \sum_{|j|<l} \frac{\xi'^j}{j!}(D^j(\mathcal{F}\phi))(\xi_1, 0) + l \sum_{|j|=l} \frac{\xi'^j}{j!}(D^j(\mathcal{F}\phi))(\xi_1, \theta\xi'), \quad 0 < \theta < 1.$$

Следовательно,

$$|(\mathcal{F}\phi)(\xi)| \le A|\xi|^l, \quad l \in N. \tag{7}$$

Из (6) и (7) следует наличие суммируемой мажоранты для функции $g_N(\xi)$, $|\xi'|^2 < 1/4$.

Перейдем к пределу под знаком интеграла в последней строке (5). Для доказательства равенства (4) при $\phi \in \Phi_V$ остается доказать следующую формулу для преобразования Фурье ядра $h_\alpha(y)$ оператора (2)

$$(\mathcal{F}h_\alpha)(\xi) = m_\alpha(\xi). \tag{8}$$

Вычислим преобразование Фурье ядра $h_\alpha(y)$, понимая его как условно сходящийся интеграл,

$$\begin{aligned}
(\mathcal{F}h_\alpha)(\xi) &= c_n(\alpha) \lim_{N\to\infty} \int\limits_{\{y \in K_+^+:\ 0<y_1<N\}} \frac{I_{\frac{\alpha-n}{2}}\left(\frac{r(y)}{2}\right)}{r^{\frac{n-\alpha}{2}}(y)} \exp\left(-\frac{y_1}{2} + iy\cdot\xi\right) dy = \\
&= c_n(\alpha) \lim_{N\to\infty} \int\limits_0^N y_1^{\frac{\alpha+n}{2}-1} \exp\left(-\frac{y_1}{2} + iy_1\xi_1\right) dy_1 \int\limits_0^1 \rho^{n-2}(1-\rho^2)^{\frac{\alpha-n}{4}} \times \\
&\quad \times J_{\frac{\alpha-n}{2}}\left(\frac{i}{2} y_1\sqrt{1-\rho^2}\right) d\rho \int\limits_{S_{n-2}} \exp(iy_1\rho\xi'\cdot\sigma)d\sigma = \\
&= 2^{\frac{n-1}{2}} \pi^{\frac{n-2}{2}} c_n(\alpha) |\xi'|^{\frac{3-n}{2}} \lim_{N\to\infty} \int\limits_0^N y_1^{\frac{\alpha+1}{2}} \exp\left(-\frac{y_1}{2} + iy_1\xi_1\right) dy_1 \times \\
&\quad \times \int\limits_0^1 \rho^{\frac{n-1}{2}}(1-\rho^2)^{\frac{\alpha-n}{4}} J_{\frac{\alpha-n}{2}}\left(\frac{mi}{2} y_1\sqrt{1-\rho^2}\right) J_{\frac{n-3}{2}}(y_1\rho\xi')d\rho;
\end{aligned}$$

здесь применена формула (25.13) из [4] для вычисления интеграла по сфере S_{n-2}. Вычисляя далее внутренний интеграл по отрезку $[0,1]$ по формуле 6.598 из [13], а затем переходя к пределу при $N \to \infty$ и вычисляя интеграл по полуоси по формуле 6.623 из [13] при $\xi' \ne 0$, получаем равенство (8).

Пусть теперь $\phi \in \Phi$. Из результатов [14] следует, что для $\phi \in \Phi$ существует последовательность функций $\phi_k(x) \in \Phi_V$, $V = \{\xi : \xi' = 0\}$, такая, что $\overset{(L_p)}{\lim\limits_{k\to\infty}} \phi_k(x) = \phi(x)$, $1 < p < \infty$,

$|(\mathcal{F}\phi_k)(\xi)| \leq |(\mathcal{F}\phi)(\xi)|$ и $(\mathcal{F}\phi_k)(\xi) \to (\mathcal{F}\phi)(\xi)$, $k \to \infty$. Для функций $\phi_k(x)$ выполняется доказанное выше равенство (4). Тогда в силу перечисленных свойств аппроксимирующей последовательности функций $\phi_k(x)$ имеем

$$\lim_{k\to\infty} (H^\alpha \phi_k)(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int\limits_{R^n} m_\alpha(\xi)(\mathcal{F}\phi)(\xi) \exp(-ix\cdot\xi) d\xi, \quad x \in R^n.$$

С другой стороны, в силу теоремы 1 получаем $\|H^\alpha\phi - H^\alpha\phi_k\|_q \leq A\|\phi-\phi_k\|_p \to 0$, $k \to \infty$, $n-1 < \operatorname{Re}\alpha < n+1$, $4n(n-1)/(2n^2+(n+\operatorname{Re}\alpha-1)(n-2)) < p < 4(n-1)/(3n+\operatorname{Re}\alpha-5)$, $1/q = 1/p - (\operatorname{Re}\alpha+n-1)/(2n)$. Следовательно,

$$(H^\alpha\phi)(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int\limits_{R^n} m_\alpha(\xi)(\mathcal{F}\phi)(\xi)\exp(-ix\cdot\xi)d\xi, \; n-1 < \operatorname{Re}\alpha < n+1, \quad \phi \in \Phi.$$

Чтобы доказать формулу (4) для $\operatorname{Re}\alpha > n-2$ достаточно показать аналитичность левой и правой частей этого равенства в указанной полуплоскости. Последнее вытекает из леммы 1 (наличие суммируемой мажоранты по α для ядра $h_\alpha(y)$ следует из леммы 3).

Применяя к (4) преобразование Фурье, с учетом того, что $m_\alpha(\xi)(\mathcal{F}\phi)(\xi) \in \Psi$, получаем (3). $\square$

Так как функция $m_\alpha(\xi)$ является мультипликатором в Ψ (см. теорему 3.3 из [3]), то пространство Φ инвариантно относительно операторов H^α.

3. Пространства $H^\alpha(L_p)$ дробных телеграфных потенциалов

Пусть $\operatorname{Re}\alpha > n-2$. Тогда оператор H^α ограниченно действует из L_p в L_q или алгебраическую сумму L_q-пространств в соответствии с теоремой 1.

Пусть теперь $\operatorname{Re}\alpha > 0$. Будем рассматривать оператор H^α, на функциях $\phi \in L_p$. Пусть α и p удовлетворяют условиям п. а) теоремы 1. Тогда потенциал $H^\alpha\phi$, $\phi \in L_p$, понимается обычным образом, как интеграл (2), если $(H^\alpha|\phi|)(x) < \infty$ для почти всех $x \in R^n$. Если это условие нарушено, то потенциал $H^\alpha\phi$ понимается, как продолжение по ограниченности оператора (2) с плотного в L_p множества Φ. Если α и p удовлетворяют условиям п. б) теоремы 1, то потенциал $H^\alpha\phi$, $\phi \in L_p$, трактуется аналогично. Для остальных p и α ($\operatorname{Re}\alpha > 0$) потенциал $f = H^\alpha\phi$, $\phi \in L_p$, понимается в смысле свертки с ядром h^α в классе Φ'-распределений

$$\langle f, \omega\rangle \stackrel{\text{def}}{=} \langle \phi, h^\alpha * \omega\rangle, \quad \omega \in \Phi,$$

где

$$(h^\alpha * \omega)(x) = \int\limits_{K_+^+} \overline{h^\alpha(t)}\omega(x+t)dt, \quad \operatorname{Re}\alpha > n-2.$$

Заметим, что такое определение корректно, т. к. $h_1^\alpha(t)$ — свертыватель в Φ, поскольку $(\mathcal{F}h_1^\alpha)(\xi) = (-r^2(\xi) - i\xi_1)^{-\alpha/2}$ — мультипликатор в Ψ.

При $0 < \operatorname{Re}\alpha \leq n-2$ в соответствии с теоремой Гельфанда–Шилова полагаем

$$(h^\alpha * \omega)(x) = \frac{1}{(2\pi)^n}\langle (-r^2(\xi) - i\xi_1)^{-\frac{\alpha}{2}}, (\mathcal{F}\omega)(\xi)\exp(-ix\cdot\xi)\rangle,$$

а также положим $H^\alpha(L_p) = \{f \in \Phi' : f = H^\alpha\phi, \; \phi \in L_p\}$, где потенциал $H^\alpha\phi$ понимается описанным выше образом. Дадим описание классов $L_{p,r}^\alpha = L_r \cap H^\alpha(L_p)$, $\operatorname{Re}\alpha > 0$.

4. Пространства $L_{p,r}^{\alpha}$ и их описание

Положим

$$(G^{\alpha}f)(x) = \lim_{\varepsilon\to 0}(G_{\varepsilon}^{\alpha}f)(x), \tag{9}$$

где

$$(G_{\varepsilon}^{\alpha}f)(x) = \int\limits_{R^n} g_{\varepsilon}^{\alpha}(t)f(x-t)dt,$$

$g_{\varepsilon}^{\alpha}(t) = \mathcal{F}^{-1}(\exp(-\varepsilon|\xi|^2)g_{\varepsilon}(\xi)/m_{\alpha}(\xi))(t)$, $g_{\varepsilon}(\xi) = \exp(-\varepsilon/\xi_1^2)$ или $g_{\varepsilon}(\xi) = (\xi_1/(\xi-1+i\varepsilon))^k$, $k > n - \operatorname{Re}\alpha/2$. Предел в (9) понимается по L_p-норме. Заметим, что $g_{\varepsilon}^{\alpha}(t) \in L_1$, т. к. $\exp(-\varepsilon|\xi|^2)g_{\varepsilon}(\xi)/m_{\alpha}(\xi) \in \Re_0$ в силу леммы 2. Основным результатом статьи является

Теорема 3. *Пусть* $1 < p < \infty$, $1 < r < \infty$, $\operatorname{Re}\alpha > 0$. *Тогда* $L_{p,r}^{\alpha} = \{f \in L_r : G^{\alpha}f \in L_p\}$, *где* G^{α} *— оператор* (9).

Доказательство. Пусть $f \in L_{p,r}^{\alpha}$. Тогда $f \in L_r$ и $f = H^{\alpha}\phi$, $\phi \in L_p$. С учетом того, что $\overline{G_{\varepsilon}^{\alpha}}\omega \in \Phi$, для $\omega \in \Phi$ имеем

$$\langle G_{\varepsilon}^{\alpha}f,\omega\rangle = \langle f,\overline{G_{\varepsilon}^{\alpha}}\omega\rangle = \langle \phi, h^{\alpha} * \overline{G_{\varepsilon}^{\alpha}}\omega\rangle =$$
$$= (2\pi)^n\Big\langle(\mathcal{F}\phi)(\xi), \exp\Big(-\varepsilon|\xi|^2 - \frac{\varepsilon}{\xi_1^2}\Big)(\mathcal{F}\omega)(\xi)\Big\rangle = \langle\phi, H_{\varepsilon}\omega\rangle = \langle H_{\varepsilon}\phi,\omega\rangle, \tag{10}$$

где свертка $h^{\alpha} * \overline{G_{\varepsilon}^{\alpha}}\omega$ понимается описанным выше образом;

$$(H_{\varepsilon}\phi)(x) = (K_{\varepsilon}W_{\varepsilon}\phi)(x) + (W_{\varepsilon}\phi)(x),$$

где

$$(K_{\varepsilon}\phi)(x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} k_{\varepsilon}(y)\phi(x_1-y,x')dy,$$

$$(\mathcal{F}k_{\varepsilon})(\xi) = \begin{cases}\exp(-\varepsilon/\xi_1^2)-1, & \xi\neq 0;\\ 1, & \xi = 0,\end{cases} \in \Re_0(R^1).$$

В [15] было показано, что $K_{\varepsilon}W_{\varepsilon}\phi \to 0$, $\varepsilon\to 0$, по L_p-норме, $p > 1$. Следовательно,

$$\overset{(L_p)}{\lim_{\varepsilon\to 0}} H_{\varepsilon}\phi = \phi. \tag{11}$$

Так как две функции, совпадающие в обобщенном смысле, могут отличаться разве лишь многочленом, то из (10) следует $(G_{\varepsilon}^{\alpha}f)(x) = (H_{\varepsilon}\phi)(x) \xrightarrow{(L_p)} \phi(x)$, $\varepsilon\to 0$. Таким образом, $G^{\alpha}f \in L_p$.

Пусть теперь $f \in L_r$ и $G^{\alpha}f \in L_p$. Тогда

$$\langle G^{\alpha}f, h^{\alpha}*\omega\rangle = \lim_{\varepsilon\to 0}\langle G_{\varepsilon}^{\alpha}f, h^{\alpha}*\omega\rangle = \lim_{\varepsilon\to 0}\langle f, \overline{G_{\varepsilon}^{\alpha}}(h^{\alpha}*\omega)\rangle = \lim_{\varepsilon\to 0}\langle f, H_{\varepsilon}\omega\rangle = \langle f,\omega\rangle. \tag{12}$$

Последнее в цепочке равенство обосновывается применением неравенства Гёльдера с учетом (11).

Если α и p удовлетворяют условиям теоремы 1, то из (12) следует $\langle f,\omega\rangle = \langle G^{\alpha}f, h^{\alpha}*\omega\rangle = \langle H^{\alpha}G^{\alpha}f,\omega\rangle$ и $f(x) = (H^{\alpha}G^{\alpha}f)(x)$.

В остальных случаях равенство (12) само означает, что $f = H^{\alpha}G^{\alpha}f$. $\square$

Литература

1. Самко С.Г. *О пространствах риссовых потенциалов* // Изв. АН СССР. Сер. матем. – 1976. – Т. 40. – № 5. – С. 1143–1172.
2. Самко С.Г. *Пространства* $L^{\alpha}_{p,r}(R^n)$ *и гиперсингулярные интегралы* // Изв АН БССР. Сер. физ.-матем наук. – 1976. – № 2. – С. 34–41.
3. Самко С.Г. *Гиперсингулярные интегралы и их приложения.* – Ростов-на-Дону: Изд-во Ростовск. ун-та, 1984. – 208 с.
4. Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И. *Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения.* – Минск: Наука и техника, 1987. – 688 с.
5. Лизоркин П.И. *Описание пространств* $L^r_p(R^n)$ *в терминах разностных сингулярных интегралов* // Матем. сб. – 1970. – Т. 81. – № 1. – С. 79–91.
6. Ногин В.А., Сухинин Е.В. *Обращение и описание гиперболических потенциалов с* L_p*-плотностями* // Докл. РАН. – 1993. – Т. 329. – № 5. – С. 550–552.
7. Ногин В.А., Сухинин Е.В. *Дробные степени оператора Шредингера.* – 23 с. – Деп. в ВИНИТИ 12.05.94, № 1190-В94.
8. Ногин В.А., Сухинин Е.В. *Дробные степени оператора Клейна-Гордона* // Докл. РАН. – 1995. – Т. 341. – № 2. – С. 166–168.
9. Сухинин Е.В. *Дробные степени оператора Шредингера.* – 15 с. – Деп. в ВИНИТИ 04.04.95, № 925-В95.
10. Ногин В.А., Самко С.Г. *О сходимости в* $L_p(R^n)$ *гиперсингулярных интегралов с однородной характеристикой.* – Ростовск. ун-т. – Ростов-на-Дону, 1980. – 47 с. – Деп. в ВИНИТИ 14.01.81, № 179-81.
11. Бейтмен Г., Эрдейи А. *Высшие трансцендентные функции. Функции Бесселя, функции параболического цилиндра, ортогональные многочлены.* – М.: Наука, 1974. – 296 с.
12. Oberlin D.M. *Convolution estimates for some distributions with singularities on the light cone* // Duke Math. J. – 1989. – V. 59. – № 3. – P. 747–757.
13. Градштейн И.С., Рыжик И.М. *Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений.* – М.: Наука, 1971. – 1108 с.
14. Самко С.Г. *О плотности в* $L_p(R^n)$ *пространств* Φ_V *типа Лизоркина* // Матем. заметки. – 1982. – Т. 31. – № 6. – С. 855–865.
15. Абрамян А.В., Ногин В.А. *Дробные степени неоднородных дифференциальных операторов второго порядка с постоянными коэффициентами.* – 102 с. – Деп. в ВИНИТИ 23.11.93, № 2880-В93.

Ростовский государственный университет

Поступила 23.05.2000