Известия вузов. Математика *http://www.ksu.ru/journals/izv_vuz/*
2011, №4, с. 81–88 *Гос. номер статьи по НТЦ "Информрегистр" 0421100123\0036*

Т.В. НИКОНЕНКОВА

РЕШЕНИЕ n-ФАЗНОЙ ЗАДАЧИ $\mathbb{R}$-ЛИНЕЙНОГО СОПРЯЖЕНИЯ

Аннотация. В работе получено аналитическое решение задачи линейного сопряжения, к которой приводится проблема распределения силовых полей различной физической природы в кусочно-однородной плоской среде, состоящей из нескольких однородных компонентов, разделенных ветвями софокусных гипербол.

Ключевые слова: гетерогенные среды, задача $\mathbb{R}$-линейного сопряжения, аналитические функции.

УДК: 517.544

Abstract. We consider the problem of the distribution of power fields of various physical nature in a piecewise homogeneous planar medium consisting of several homogeneous components separated by branches of confocal hyperbolas. We reduce this problem to the linear conjugation problem and solve the latter analytically.

Keywords: heterogeneous media, $\mathbb{R}$-linear conjugation problem, analytic functions.

1. Введение

Гетерогенные среды широко представлены во многих областях техники и науки в целом. Их созданию и изучению уделяется большое внимание, а сфера приложений гетерогенных сред постоянно расширяется.

Одна из основных задач общей теории гетерогенных сред состоит в том, чтобы по заданным свойствам и составу отдельных компонентов кусочно-однородной среды построить полную картину распределения соответствующего силового поля. Как известно ([1], с. 38), такая задача для плоских и цилиндрических структур может быть описана следующим образом. Требуется построить плоскопараллельное стационарное силовое поле $\mathbf{v}(x,y) = (v_x, v_y) = \mathbf{v}_p(x,y)$, $(x,y) \in S_p$, $p = \overline{1,N}$, удовлетворяющее уравнениям неразрывности и потенциальности

$$\operatorname{div} \mathbf{v}_p(x,y) = 0, \quad \operatorname{rot} \mathbf{v}_p(x,y) = 0, \tag{1}$$

в каждой изотропной фазе S_p рассматриваемой гетерогенной среды.

Дополнительными соотношениями, устанавливающими связь между векторами $\mathbf{v}_p$ и $\mathbf{v}_q$ на границе раздела $(\mathcal{L})$ разнородных фаз S_p и S_q, служат равенства предельных значений

Поступила 09.10.2009

Работа выполнена в рамках Федеральной целевой программы “Научные и научно-педагогические кадры инновационной России” на 2009–2013 годы (контракт П944 от 20.08.09) и финансовой поддержке гранта Российского фонда фундаментальных исследований № 09-01-12188-офи_м.

их нормальных и пропорциональности касательных составляющих

$$[\mathbf{v}_p(x,y)]_n = [\mathbf{v}_q(x,y)]_n, \quad \rho_p[\mathbf{v}_p(x,y)]_\tau = \rho_q[\mathbf{v}_q(x,y)]_\tau, \quad (x,y) \in \mathcal{L}, \tag{2}$$

где коэффициент пропорциональности $\rho_p \geq 0$ определяет локальные свойства среды.

В данной статье рассмотрено обобщение работ [2]–[4] на случай m-фазной среды, в предположении, что граница контакта раздела разнородных фаз состоит из $(m-1)$ ветвей софокусных гипербол. Для поставленной задачи найдено аналитическое решение и продемонстрировано распределение силовых полей, соответствующих полученному решению.

В дальнейшем физическую плоскость (x,y) будем интерпретировать как плоскость комплексного переменного $z = x + \mathrm{i}\,y$, а вектор $\mathbf{v}$ — как комплекснозначную функцию $\mathbf{v}(z) = v_x + \mathrm{i}\,v_y$ комплексного аргумента $z = x + \mathrm{i}\,y$.

2. Постановка задачи

Пусть кусочно-однородная плоская среда состоит из m различных компонентов S_k (рис. 1), отделенных друг от друга $(m-1)$ ветвями софокусных гипербол $\mathcal{L}_k$:

$$\frac{x^2}{a_k^2} - \frac{y^2}{b_k^2} = 1, \quad a_k^2 + b_k^2 = c^2, \quad k = \overline{1, m-1}, \tag{3}$$

где a_k — вершины гипербол, пронумерованные в порядке убывания, т. е. $-c < a_{m-1} < \cdots < a_1 < c$. Через S_k обозначим область, границей которой является объединение $\mathcal{L}_{k-1} \cup \mathcal{L}_k$, $k = \overline{1, m+1}$ $(\mathcal{L}_0 = \mathcal{L}_{m+1} = \emptyset)$.

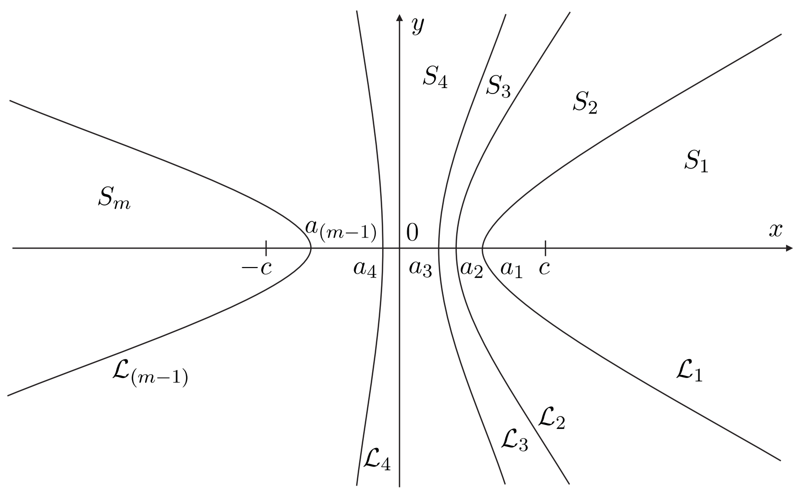

Рис. 1. m-фазная среда

Необходимо найти комплексно-сопряженную с $\mathbf{v}(z)$ функцию $v(z) = v_k(z) = v_{kx}(x,y) - \mathrm{i}v_{ky}(x,y)$ по краевым условиям:

$$v_k(t) = A_k v_{k+1}(t) - B_k[t'(s)]^{-2}\overline{v_{k+1}(t)}, \quad t \in \mathcal{L}_k, \quad k = \overline{1, m-1}, \tag{4}$$

с вещественными коэффициентами

$$A_k = \frac{\rho_k + \rho_{k+1}}{2\rho_k}, \quad B_k = \frac{\rho_k - \rho_{k+1}}{2\rho_k}, \quad k = \overline{1, m-1}. \tag{5}$$

В силу (1) функция $v(z)$ должна быть голоморфной в каждом из компонентов S_k, $k=\overline{1,m}$, и непрерывной всюду в замыкании $\overline{S}_k$, за исключением лишь бесконечно удаленной точки, где у $v(z)$ допускается особенность порядка не выше единицы:

$$|v(z)| = o(|z|) \quad \text{при} \quad |z| \gg 1. \tag{6}$$

Через $t(s)$ в условиях (4) обозначена функция точки контура $\mathcal{L} = \bigcup\limits_{k=1}^{m-1} \mathcal{L}_k$ от натурального параметра s, производная $t'(s) = \exp(\mathrm{i}\beta(s))$ которой совпадает с единичным вектором касательной к $\mathcal{L}_k$ в точке $t = t(s)$ ($\beta(s)$ — угол, который касательная к дуге $\mathcal{L}_k$ в точке t образует с вещественной осью).

В монографии ([1], с. 53) доказано, что задача (1), (2) эквивалентна задаче (4), (5), именуемой в теории аналитических функций задачей $\mathbb{R}$-линейного сопряжения (или обобщенной задачей Римана).

3. Решение задачи (4)–(6) в случае разнородных софокусных гиперболических включений

Так как рассматриваемая структура симметрична относительно вещественной оси, то легко показать, что вместе с функцией $v(z)$ решением задачи (4) с вещественными коэффициентами A_k, B_k будет и функция $\overline{v(\overline{z})}$. В связи с этим представим

$$v(z) = v_R(z) + v_I(z), \tag{7}$$

где $v_R(z) = (v(z) + \overline{v(\overline{z})})/2$ и $v_I(z) = (v(z) - \overline{v(\overline{z})})/2$ — частные решения той же задачи. Очевидно, эти частные решения удовлетворяют условиям симметрии

$$\overline{v_R(\overline{z})} \equiv v_R(z) \quad \text{и} \quad \overline{v_I(\overline{z})} \equiv -v_I(z). \tag{8}$$

Следовательно, функции $v_R(z)$, $v_I(z)$ достаточно определить лишь в верхней полуплоскости $\mathbb{C}^+ = \{z : \operatorname{Im} z > 0\}$.

Функция

$$\zeta(z) = \frac{1}{c}(z + \sqrt{z^2 - c^2}), \tag{9}$$

обратная к

$$z(\zeta) = \frac{c}{2}\left(\zeta + \frac{1}{\zeta}\right), \tag{10}$$

конформно отображает полуплоскость $\mathbb{C}^+$ на область S^* — верхнюю полуплоскость с выброшенным единичным полукругом (рис. 2). При этом верхние половины гипербол $\mathcal{L}^+ = \mathcal{L} \cap \mathbb{C}^+$ переходят в лучи $l_j^+ = \{\zeta : \arg\zeta = \pi\alpha_j,\ |\zeta| > 1\}$ ($j = \overline{1, m-1}$), разделяющие S^* на области S_k^*, прообразами которых являются S_k^+ – верхние половины областей S_k, $k = \overline{1,m}$.

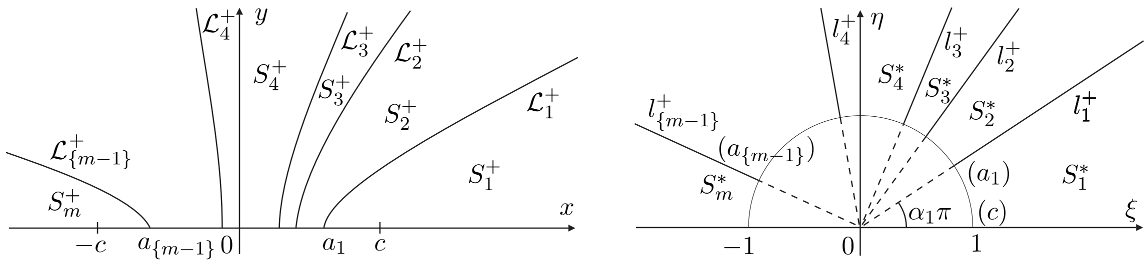

Рис. 2. Верхняя полуплоскость плоскости z и ее образ в плоскости ζ при отображении с помощью функции (9)

Заметим, что при этом отображении для функции $[t'(s)]^{-2}$, как было показано в ([5], с. 65), в плоскости ζ справедливо следующее представление:

$$\left(\frac{\mathrm{d}\, t}{\mathrm{d}\, s}\right)^{-2} = \frac{(\tau - 1/\tau)\cos 2\pi\alpha_j - \mathrm{i}(\tau + 1/\tau)\sin 2\pi\alpha_j}{\tau - 1/\tau} = \frac{\tau e^{-2\pi\alpha_j \mathrm{i}} - (\tau e^{-2\pi\alpha_j \mathrm{i}})^{-1}}{\tau - 1/\tau} = \frac{\overline{\tau - 1/\tau}}{\tau - 1/\tau},$$

где $t \in \mathcal{L}_j^+$, $\tau = |\tau| e^{\pi\alpha_j \mathrm{i}} \in l_j^+$, $a_j + \mathrm{i} b_j = c\exp(\mathrm{i}\pi\alpha_j)$, $j = \overline{1, m-1}$.

Таким образом, граничные условия (4) принимают вид

$$v_k(\frac{c}{2}(\tau + 1/\tau)) = A_k v_{k+1}(\frac{c}{2}(\tau + 1/\tau)) - B_k \frac{\overline{\tau - 1/\tau}}{\tau - 1/\tau}\, \overline{v_{k+1}\left(\frac{c}{2}(\tau + 1/\tau)\right)}, \quad \tau \in l_k^+.$$

Тогда функция

$$V(\zeta) = (\zeta - 1/\zeta)\, v_R\left(\frac{c}{2}(\zeta + 1/\zeta)\right) \tag{11}$$

должна удовлетворять граничным условиям

$$\begin{gathered} V_k(\tau) = A_k V_{k+1}(\tau) - B_k \overline{V_{k+1}(\tau)}, \quad \tau \in l_k^+; \\ \operatorname{Im} V_1(\xi) = \operatorname{Im} V_m(-\xi) = 0, \quad \xi > 1; \\ \operatorname{Re} V(\tau) = 0, \quad |\tau| = 1, \quad \operatorname{Im}\tau > 0. \end{gathered} \tag{12}$$

Последние два условия вытекают из первого условия (8) и того, что функция $(\zeta - 1/\zeta)$ вещественна на действительной оси и чисто мнима на единичной окружности. Согласно условию (6) и определению (11) решение задачи (12) следует отыскивать в классе функций, удовлетворяющих условиям

$$|V(\zeta)| = o(|\zeta|^2), \quad |\zeta| \gg 1; \quad V(\pm 1) = 0. \tag{13}$$

Отметим, что решение полученной краевой задачи даст лишь одно из частных решений задачи (4), а именно $v_R(z)$. Построение же второго частного решения $v_I(z)$ будет проведено аналогичным образом ниже.

Переходя к решению задачи (12)–(13), продолжим функцию $V(\zeta)$ из S^* в полукруг $\{\zeta : |\zeta| < 1, \operatorname{Im}\zeta > 0\}$. Это можно сделать на основании последнего условия (12) при помощи принципа симметрии Римана–Шварца. Сохраняя для продолженной функции старое обозначение $V(\zeta)$ и учитывая вещественность коэффициентов A_k, B_k, перепишем задачу (12) в виде

$$V_k(\tau) = A_k V_{k+1}(\tau) - B_k \overline{V_{k+1}(\tau)}, \quad \tau \in l_k = \{\tau : \arg\tau = \pi\alpha_k\}, \quad k = \overline{1, m-1}, \tag{14}$$

с дополнительными условиями (13) и

$$\begin{gathered} \operatorname{Im} V_1(\xi) = \operatorname{Im} V_m(-\xi) = 0, \quad \xi > 0, \\ |V(\zeta)| = o(|\zeta|^{-2}), \quad |\zeta| \ll 1; \quad \overline{V(1/\overline{\zeta})} \equiv -V(\zeta). \end{gathered} \tag{15}$$

Рассмотрим функцию $\omega(\zeta) = \zeta^\gamma$ с действительным показателем γ, т. е. ветвь этой функции, фиксированную в полуплоскости $\mathbb{C}^+$ и принимающую вещественные значения на положительной полуоси. Очевидно, для выбранной ветви справедливо тождество $\overline{\omega(1/\overline{\zeta})} \equiv 1/\omega(\zeta)$, на основании которого функция

$$V(\zeta) = V_k(\zeta) = c_{1k}(e^{\mathrm{i}\pi\varphi_k}\zeta^\gamma - e^{-\mathrm{i}\pi\varphi_k}\zeta^{-\gamma}), \quad \pi\alpha_{k-1} \le \arg\zeta \le \pi\alpha_k, \quad k = \overline{1, m}, \tag{16}$$

с $\alpha_0 = 0$, $\alpha_m = 1$, $\varphi_1 = 0$, $\varphi_m = -\gamma$, при произвольных вещественных c_{1k}, $-1/2 < \varphi_k < 1/2$, $0 < \gamma < 2$, удовлетворяет всем условиям (13), (15). Подставим теперь функцию (16) в граничные условия (14), учитывая справедливые на l_j равенства $\tau = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi\alpha_j}$. Приравнивая коэффициенты при $r^{\pm\gamma}$, получим относительно неопределенных параметров γ, φ_k, c_{1k}, $k = \overline{1,m}$, систему

$$\begin{aligned} &c_{1k}\cos[\pi(\varphi_k+\gamma\alpha_k)] - (A_k - B_k)c_{1k+1}\cos[\pi(\varphi_{k+1}+\gamma\alpha_k)] = 0,\\ &c_{1k}\sin[\pi(\varphi_k+\gamma\alpha_k)] - c_{1k+1}\sin[\pi(\varphi_{k+1}+\gamma\alpha_k)] = 0, \end{aligned} \qquad k=\overline{1,m-1}, \tag{17}$$

где $\varphi_1 = 0$, $\varphi_m = -\gamma$.

Система (17) состоит из $(m-1)$ подсистем, являющихся линейными, однородными относительно коэффициентов c_{1k} и c_{1k+1} соответственно. Эти подсистемы (как и вся система в целом) имеют нетривиальные решения лишь в том случае, когда определитель каждой подсистемы обращается в нуль, т. е.

$$\sin[\pi(\varphi_{k+1}-\varphi_k)] + \Delta_k \sin[\pi(2\gamma\alpha_k + \varphi_k + \varphi_{k+1})] = 0, \quad k = \overline{1,m-1}, \tag{18}$$

где $\Delta_k = B_k/A_k$, $k = \overline{1,m-1}$.

Условия (18) в свою очередь представляют собой систему уравнений относительно неизвестных γ и φ_k, $k = \overline{2,m-1}$, так как $\varphi_1 = 0$, $\varphi_m = -\gamma$. Перепишем систему (18) в виде

$$\begin{aligned} &\sin[\pi\varphi_2]f_1^1 + \cos[\pi\varphi_2]f_1^2 = 0,\\ &\sin[\pi\varphi_k]\{\sin[\pi\varphi_{k+1}]f_k^2 + \cos[\pi\varphi_{k+1}](2-f_k^1)\} -\\ &\quad - \cos[\pi\varphi_k]\{\sin[\pi\varphi_{k+1}]f_k^1 + \cos[\pi\varphi_{k+1}]f_k^2\} = 0, \quad k = \overline{2,m-1}, \end{aligned} \tag{19}$$

где f_k^j выражаются по формулам

$$f_k^1(\gamma) = 1 + \Delta_k\cos[2\pi\gamma\alpha_k], \quad f_k^2(\gamma) = \Delta_k \sin[2\pi\gamma\alpha_k], \quad k = \overline{1,m-1}. \tag{20}$$

Покажем теперь, что (19) приводится к системе

$$\sin[\pi\varphi_k]W_k^1(\gamma) + \cos[\pi\varphi_k]W_k^2(\gamma) = 0, \quad k = \overline{2,m}, \tag{21}$$

где W_k^1, W_k^2 определяются рекуррентными соотношениями

$$W_{k+1}^1 = W_k^1 f_k^1 + W_k^2 f_k^2, \quad W_{k+1}^2 = W_k^1 f_k^2 + W_k^2(2-f_k^1), \quad k = \overline{2,m-1}, \tag{22}$$

а $W_2^1 = f_1^1$, $W_2^2 = f_1^2$.

Действительно, первые два уравнения системы (19) составляют систему линейных однородных уравнений второго порядка относительно $\sin[\pi\varphi_2]$ и $\cos[\pi\varphi_2]$, которая разрешима лишь в случае, когда равен нулю ее определитель

$$\sin[\pi\varphi_3](f_1^1 f_2^1 + f_1^2 f_2^2) + \cos[\pi\varphi_3](f_1^1 f_2^2 + f_1^2(2-f_2^1)) = 0.$$

Таким образом, учитывая обозначение (22), пришли ко второму уравнению системы (21). Аналогичным образом, комбинируя это уравнение с третьим уравнением системы (19), придем к третьему уравнению системы (21). Продолжая этот процесс, систему (19) сведем к системе (21).

Последнее уравнение системы (21) в силу равенства $\varphi_m = -\gamma$ и соотношений (20), (22) представляет собой уравнение относительно $\gamma \in (0,2)$

$$\sin[\pi\gamma]W_m^1(\gamma) - \cos[\pi\gamma]W_m^2(\gamma) = 0. \tag{23}$$

Для каждого решения уравнения (23) на основании (21) найдем

$$\varphi_k^1(\gamma) = -\frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\left[\frac{W_k^2(\gamma)}{W_k^1(\gamma)}\right], \quad k = \overline{2,m-1}. \tag{24}$$

Разрешая теперь систему (17) относительно неизвестных c_{1k}, с учетом системы (18) получим

$$c_{1k+1} = c_{1k}\Lambda_{1k}(\gamma) = \frac{c_{1k}}{A_k - B_k}\begin{cases} \frac{B_k \sin[2\pi(\varphi_k^1(\gamma)+\gamma\alpha_k)]}{\sin[\pi(\varphi_{k+1}^1(\gamma)-\varphi_k^1(\gamma))]}, & \varphi_k^1(\gamma) \neq \varphi_{k+1}^1(\gamma); \\ 1, & \varphi_k^1(\gamma) = \varphi_{k+1}^1(\gamma), \end{cases} \tag{25}$$

где $k = \overline{1, m-1}$, $\rho_k \neq \rho_{k+1}$, $\varphi_1^1(\gamma) \equiv 0$, $\varphi_m^1(\gamma) = -\gamma$, c_{11} — произвольная вещественная константа, отличная от нуля, $0 < \gamma < 2$ — решение уравнения (23).

Частное решение $v_I(z)$ задачи (4), удовлетворяющее второму условию (8), аналогичным образом отыскивается в виде

$$V(\zeta) = V_k(\zeta) = \mathrm{i}c_{2k}(e^{\mathrm{i}\pi\varphi_k}\zeta^\gamma - e^{-\mathrm{i}\pi\varphi_k}\zeta^{-\gamma}), \quad \pi\alpha_{k-1} \le \arg\zeta \le \pi\alpha_k, \quad k = \overline{2, m}, \tag{26}$$

где $\alpha_0 = 0$, $\alpha_m = 1$, $\varphi_1 = 0$, $\varphi_m = -\gamma$, c_{2k} — вещественные коэффициенты, $0 < \gamma < 2$ и $-1/2 < \varphi_k < 1/2$ — неизвестные параметры. Аналогично системе (21) получаем систему

$$\sin[\pi\varphi_k]W_k^1(\gamma) + \cos[\pi\varphi_k]W_k^2(\gamma) = 0, \quad k = \overline{2, m}, \tag{27}$$

где

$$W_{k+1}^1 = W_k^1 f_k^1 + W_k^2 f_k^2, \quad W_{k+1}^2 = W_k^1 f_k^2 + W_k^2(2 - f_k^1), \quad k = \overline{2, m-1},$$
$$f_k^1(\gamma) = 1 - \Delta_k \cos[2\pi\gamma\alpha_k], \quad f_k^2(\gamma) = -\Delta_k \sin[2\pi\gamma\alpha_k], \quad k = \overline{1, m-1},$$

$W_2^1 = f_1^1$, $W_2^2 = f_1^2$.

Здесь, как и выше, неизвестные параметры $-1/2 < \varphi_k < 1/2$ выражаются по формулам

$$\varphi_k^2(\gamma) = -\frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\left[\frac{W_k^2(\gamma)}{W_k^1(\gamma)}\right], \quad k = \overline{2, m-1}, \tag{28}$$

где $\gamma \in (0, 2)$ — решение последнего уравнения системы (27)

$$\sin[\pi\gamma]W_m^1(\gamma) - \cos[\pi\gamma]W_m^2(\gamma) = 0. \tag{29}$$

Вещественные коэффициенты c_{2k} имеют вид

$$c_{2k+1} = c_{2k}\Lambda_{2k}(\gamma) = \frac{c_{2k}}{B_k - A_k}\begin{cases} \frac{B_k \sin[2\pi(\varphi_k^2(\gamma)+\gamma\alpha_k)]}{\sin[\pi(\varphi_{k+1}^2(\gamma)-\varphi_k^2(\gamma))]}, & \varphi_k^2(\gamma) \neq \varphi_{k+1}^2(\gamma); \\ -1, & \varphi_k^2(\gamma) = \varphi_{k+1}^2(\gamma), \end{cases} \tag{30}$$

где $k = \overline{1, m-1}$, $\rho_k \neq \rho_{k+1}$, $\varphi_1^2(\gamma) \equiv 0$, $\varphi_m^2(\gamma) = -\gamma$, c_{21} — произвольная вещественная константа, $0 < \gamma < 2$ — решение уравнения (29).

В частности, если $\rho_k = \rho_{k+1}$, то имеем очевидные равенства $\varphi_k^j = \varphi_{k+1}^j$, $c_{jk} = c_{jk+1}$, $j = 1, 2$.

Полученные результаты сформулируем в виде теоремы.

Теорема. *В невырожденных и во всех непредельных случаях* $\Delta_j = B_j/A_j \neq 0, \pm 1$ ($j = \overline{1, m-1}$) *задача* (4) *для гиперболических включений* (3) *разрешима. При* $\alpha_k = \pi^{-1}\arg(a_k + \mathrm{i}b_k) \in (0, 1)$ *она имеет решение вида*

$$v_k(z) = \sum_{j=1}^{l} c_j\chi(z; \gamma_j; \varphi_k^1(\gamma_j)) \prod_{q=1}^{k-1}\Lambda_{1q}(\gamma_j) + \mathrm{i}\sum_{j=l+1}^{d} c_j\chi(z; \gamma_j; \varphi_k^2(\gamma_j)) \prod_{q=1}^{k-1}\Lambda_{2q}(\gamma_j), \quad k = \overline{1, m},$$

где γ_k, $k=\overline{1,l}$, — *корни уравнения* (23), *а* γ_k, $k=\overline{l+1,d}$, — *корни уравнения* (29); $\varphi_1^j(\gamma)\equiv 0$, $\varphi_m^j(\gamma)=-\gamma$, *а* $\varphi_k^j(\gamma)$, $k=\overline{2,m-1}$, $j=1,2$, *определяются по формулам* (24), (28) *соответственно. Функция*

$$\chi(z;\gamma;\varphi)=\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi\varphi}(z+\sqrt{z^2-c^2})^\gamma-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi\varphi}(z-\sqrt{z^2-c^2})^\gamma}{2\sqrt{z^2-c^2}},\quad \chi(\pm c;\gamma;0)=\pm\gamma c^{\gamma-1},$$

принимает вещественные значения на действительной оси, константы Λ_{1k}, Λ_{2k} *определяются соотношениями* (25), (30), c_k $(k=\overline{1,d})$ — *произвольные вещественные параметры.*

Замечание 1. В случае двухфазной среды ($m=2$), когда линия раздела фаз состоит из одной ветви гиперболы (3), из (5), (18) легко показать, что при $\rho_1\neq\rho_2$

$$\varphi(\gamma)=\varphi_2(\gamma)=\begin{cases}-\gamma, & 0<\gamma<0.5;\\ 1-\gamma, & 0.5<\gamma<1.5;\\ 2-\gamma, & 1.5<\gamma<2,\end{cases}\tag{31}$$

где γ — решение уравнений

$$\sin\pi\gamma\pm\Delta_1\sin\pi\gamma(1-2\alpha_1)=0,\tag{32}$$

вытекающих из (23) и (29) соответственно. При этом неизвестные коэффициенты c_{mk} определяются соотношениями

$$c_{j2}=(-1)^j c_{j1}\frac{B_1\sin 2\pi\gamma\alpha_1}{(B_1-A_1)\sin\pi\varphi(\gamma)},\quad j=1,2,$$

в силу которых, а также в силу представлений (31) и (32) приходим к результату, полученному в [2].

В другом частном случае, когда $n=3$, $\rho_1=\rho_3$, $\alpha_1=1-\alpha_2$, но $\rho_1\neq\rho_2$, наряду с симметрией относительно вещественной оси имеем симметрию и относительно мнимой оси

$$\overline{V_1(-\overline{\zeta})}=-V_3(\zeta),\ \ \overline{V_2(-\overline{\zeta})}=-V_2(\zeta)\ \text{ при }\ V(\zeta)=(\zeta-1/\zeta)\,v_R\Big(\frac{c}{2}(\zeta+1/\zeta)\Big);$$
$$\overline{V_1(-\overline{\zeta})}=V_3(\zeta),\quad \overline{V_2(-\overline{\zeta})}=V_2(\zeta)\quad \text{при }\ V(\zeta)=(\zeta-1/\zeta)\,v_I\Big(\frac{c}{2}(\zeta+1/\zeta)\Big),$$

на основании которой получаем решение, представленное ранее в [3].

Замечание 2. Комплексный потенциал, соответствующий полученному решению, с точностью до произвольных констант может быть выражен соотношениями

$$w_k(z)=\sum_{j=1}^{l}c_j\chi_0(z;\gamma_j;\varphi_k^1(\gamma_j))\prod_{q=1}^{k-1}\Lambda_{1q}(\gamma_j)+\mathrm{i}\sum_{j=l+1}^{d}c_j\chi_0(z;\gamma_j;\varphi_k^2(\gamma_j))\prod_{q=1}^{k-1}\Lambda_{2q}(\gamma_j)+\widetilde{C_k},$$

где

$$\chi_0(z;\gamma;\varphi_k)=(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi\varphi_k}(z+\sqrt{z^2-c^2})^\gamma+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi\varphi_k}(z-\sqrt{z^2-c^2})^\gamma).$$

Здесь γ_k, c_k, φ_k^j и $\Lambda_{jk}(\gamma)$, $j=1,2$, определяются точно так же, как и в теореме выше, а действительные части $\widetilde{C_k}$ могут быть найдены из граничных условий (2).

Замечание 3. Вопрос о том, какие условия обеспечивают существование и единственность решения задачи (4), (5), упирается в вопрос о разрешимости и числе возможных решений уравнений (23), (29). Последние допускают в общем случае лишь численные решения. В работе [2] было показано, что в случае $m=1$ соответствующие уравнения имеют не более трех решений в совокупности. В симметричном случае при $m=2$, рассмотренном в

[3], каждое из уравнений (23), (29) имеет в точности по одному решению. В общем случае аналитическое исследование трансцендентных уравнений (23), (29), зависящих от большого числа параметров, не представляется возможным. В рамках численного эксперимента, проведенного с помощью команды FindRoot (пакет Mathematica) для широкого спектра параметров было установлено, что каждое из этих уравнений имеет на интервале $(0, 2)$ не менее одного, но не более двух решений.

Если оставить по одному решению уравнений (23), (29) и задать значение скорости в какой-либо фиксированной точке, например, в точке $z = c$,

$$v_1(c) = V_0 = V_{0x} - iV_{0y},$$

то соответствующее решение задачи (4), (5) получим в виде

$$v_k(z) = \frac{V_{0x}}{\gamma_1 c^{\gamma_1 - 1}}\chi(z;\gamma_1;\varphi_k^1(\gamma_j))\prod_{s=1}^{k-1}\Lambda_{1s}(\gamma_1) - \mathrm{i}\frac{V_{0y}}{\gamma_2 c^{\gamma_2 - 1}}\chi(z;\gamma_2;\varphi_k^2(\gamma_j))\prod_{s=1}^{k-1}\Lambda_{2s}(\gamma_2),$$

где γ_1, γ_2 — выбранные решения уравнений (23) и (29) соответственно.

В заключение автор хотел бы выразить признательность своему научному руководителю Ю.В. Обносову за постоянное внимание к работе.

Литература

[1] Емец Ю.П. *Краевые задачи электродинамики анизотропно проводящих сред* (Наук. думка, Киев, 1987).

[2] Обносов Ю.В. *Решение задачи R-линейного сопряжения в случае гиперболической линии разделения разнородных фаз*, Изв. вузов. Математика, № 7, 53–62 (2004).

[3] Obnosov Yu.V., Nikonenkova T.V. *Solution of an $\mathbb{R}$-linear conjugation problem on the case of hyperbolic interface*, Lithuanian Math. J. **48** (3), 322–331 (2008).

[4] Никоненкова Т.В. *Об одной трехфазной задаче R-линейного сопряжения*, Учен. зап. Казанск. ун-та. Сер. физ.-мат. наук **150** (4), 127–136 (2008).

[5] Обносов Ю.В. *Краевые задачи теории гетерогенных сред: многофазные среды, разделенные кривыми второго порядка* (Изд-во Казанск. ун-та, Казань, 2009).

Т.В. Никоненкова

аспирант, кафедра дифференциальных уравнений,
Казанский государственный университет,
ул. Кремлевская, д. 18, г. Казань, 420008,

`e-mail:` nikaatv@rambler.ru

T. V. Nikonenkova

Postgraduate, Chair of Differential Equations,
Kazan State University,
18 Kremlyovskaya str., Kazan, 420008 Russia,

`e-mail:` nikaatv@rambler.ru