ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2004 МАТЕМАТИКА № 11 (510)

УДК 514.764

С.Е. СТЕПАНОВ, М.В. СМОЛЬНИКОВА

АФФИННАЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ ТЕНЗОРОВ КИЛЛИНГА

1. Введение

1.1. Новая "структурная точка зрения" на аффинную дифференциальную геометрию была сформулирована в 1982 г. одним из классиков дифференциальной геометрии К. Номидзу в его лекции [1] в университете города Мюнстер с "грандиозным", как об этом пишет В. Клингеберг в [2], названием "Что такое аффинная дифференциальная геометрия?". Согласно К. Номидзу под аффинной дифференциальной геометрией следует понимать (см. также [3], с. 43) геометрию дифференцируемого многообразия M эквиаффинной структурой (η, ∇), где η — элемент объема на M, т. е. всюду отличная от нуля n-форма, и ∇ — эквиаффинная связность, т. е. линейная связность без кручения такая, что $\nabla\eta = 0$.

За данной лекцией последовали статьи по аффинной дифференциальной геометрии Э. Калаби, К. Номидзу, У. Симона, С.Л. Тернга, С.Т. Яу и др. А в 1994 г. вышла в свет монография К. Номидзу [4].

К настоящему времени число работ "новой волны" по аффинной дифференциальной геометрии (включая монографии) исчисляется десятками [4], [5].

В уже упомянутой рецензии В. Клигенберг довольно скептически отнесся к новому направлению исследований и, в частности, монографии К. Номидзу, утверждая, выражаясь фигурально, что "все новое — это хорошо забытое старое". При этом он приводил конкретные примеры и отсылал читателя к ранее изданным монографиям [6] и [7]. Пополним этот список монографиями отечественных геометров по аффинной дифференциальной геометрии [8]–[11].

1.2. Данная статья продолжает работы [12]–[14], посвященные изучению аффинной дифференциальной геометрии симметрических и кососимметрических тензоров Киллинга. В ней найдены общие решения уравнений, определяющих такие тензоры на многообразиях с эквипроективной связностью, т. е. на проективно плоских многообразиях с эквиаффинной связностью ([8], с. 168; [9], с. 125). Такие многообразия можно рассматривать как аффинное обобщение псевдоримановых многообразий постоянной кривизны. Многообразия с эквипроективной связностью оказались наиболее удобными для поиска на них решений дифференциальных уравнений. Этот факт использовал еще А.П. Норден, когда искал общие решения уравнений Кодацци ([8], с. 169), решения, которые впоследствии уже на римановом многообразии постоянной кривизны повторно нашел Д. Ферус и которые теперь приводятся в зарубежных монографиях (напр., [15], с. 591).

Первая из двух доказанных в данной работе теорем является аффинным аналогом утверждения, опубликованного в [16] и вызванного к жизни необходимостью решения конкретных задач релятивистской физики. Вторая теорема является новой не только для аффинной, но и для псевдоримановой геометрии, что особенно важно, если учесть возможные ее приложения (см. [17], с. 339–342).

2. Определения и результаты

Пусть M — дифференцируемое многообразие класса C^∞ размерности $n > 2$ и $\mathbf{L}(M)$ — расслоение линейных реперов над M со структурной группой $\mathbf{GL}(n, R)$.

В соответствии с общей теорией ([18], с. 7; [19], с. 194 и [20]) назовем $\mathbf{SL}(n,R)$-структурой на M сведение структурной группы $\mathbf{GL}(n,R)$ расслоения $\mathbf{L}(M)$ к подгруппе $\mathbf{SL}(n,R)$ или, точнее, главное $\mathbf{SL}(n,R)$-подрасслоение расслоения $\mathbf{L}(M)$.

Известна проблема ([20], с. 213) сопоставления с каждой $\mathbf{G}$-структурой на многообразии M сводимой к $\mathbf{G}$ линейной связности ∇ или, по другой терминологии, $\mathbf{G}$-связности ∇. Линейная связность ∇ без кручения, сводимая к $\mathbf{SL}(n,R)$, называется *эквиаффинной* ([9], с. 124–125; [8], с. 150) и характеризуется симметричностью тензора Риччи Ric. При наличии такой связности $\mathbf{SL}(n,R)$-структуру называют *эквиаффинной*, а геометрию многообразия M — *аффинной дифференциальной геометрией* [1], [3], [4]. Если при этом тензор проективной кривизны Вейля W связности ∇ равен нулю, связность ∇ будет *эквипроективной* ([9], с. 125; [8], с. 169; [21], с. 80–81). При наличии такой связности $\mathbf{SL}(n,R)$-структуру назовем *эквипроективной*. Многообразие с эквипроективной $\mathbf{SL}(n,R)$-структурой является аффинным аналогом псевдориманова многообразия постоянной кривизны ([9], с. 126; [8], с. 170–171; [21], с. 81–82).

Ковариантное кососимметрическое тензорное поле валентности p $(1 \le p \le n-1)$ или, по другой терминологии, внешняя дифференциальная p-форма $\omega \in C^\infty\Lambda^p M$ на многообразии M с аффинной связностью ∇ называется *киллинговым*, если вдоль произвольной геодезической $\gamma : J \subset \mathbf{R} \to M$, отнесенной к аффинному параметру $t \in J$, ковариантно постоянным будет тензорное поле $i_{\frac{d\gamma}{dt}}\omega := \mathrm{trace}\left(\frac{d\gamma}{dt} \otimes \omega\right)$ (ср. с [22], с. 55–56). Последнее возможно только в случае, когда $\nabla\omega \in C^\infty\Lambda^{p+1}M$ ([13], [14]).

На псевдоримановом многообразии (M,g) кососимметрические тензоры Киллинга валентности p или, что то же самое, внешние дифференциальные киллинговы p-формы принято называть *тензорами Киллинга–Яно* ([17], с. 339–342).

Для многообразия M с эквипроективной $\mathbf{SL}(n,R)$-структурой справедлива

Теорема 1. *На n-мерном $(n>2)$ многообразии M с эквипроективной $\mathbf{SL}(n,R)$-структурой существует локальная система координат $x^1,\dots,x^n$, в которой произвольный тензор Киллинга–Яно ω валентности p $(1 \le p \le n-1)$ имеет компоненты*

$$\omega_{i_1\dots i_p} = e^{(p+1)\psi}(A_{i_0 i_1\dots i_p}x^{i_0} + B_{i_1\dots i_p}), \tag{2.1}$$

где $A_{i_0 i_1\dots i_p}$ и $B_{i_1\dots i_p}$ — кососимметричные по всем индексам постоянные и $\psi = \ln\pi/(n+1)$ для существенной компоненты π элемента объема $\mathbf{SL}(n,R)$-структуры и вследствие этого векторное пространство $\mathbf{K}^p(M,\mathbf{R})$ тензоров Киллинга–Яно имеет размерность $\dim \mathbf{K}^p(M,\mathbf{R}) = \frac{(n+1)!}{(p+1)!(n-p)!}$.

В свою очередь, ковариантное симметричное тензорное поле φ валентности p или, по другой терминологии, симметрическая дифференциальная p-форма $\varphi \in C^\infty S^p M$ называется *киллинговым*, если $\varphi(\frac{d\gamma}{dt},\dots,\frac{d\gamma}{dt}) = \mathrm{const}$ вдоль произвольной геодезической $\gamma : J \subset \mathbf{R} \to M$, отнесенной к аффинному параметру $t \in J$. Последнее возможно только в случае, когда $\delta^*\varphi = 0$ для оператора симметрического дифференцирования $\delta^* : C^\infty S^p M \to C^\infty S^{p+1}M$ (см. [14]).

На псевдоримановом многообразии (M,g) симметричные тензоры Киллинга или, что то же самое, симметрические киллинговы формы принято называть ([17], с. 339) *тензорами Киллинга*.

Для многообразия M с эквипроективной $\mathbf{SL}(n,R)$-структурой справедлива

Теорема 2. *На n-мерном $(n>2)$ многообразии M с эквипроективной $\mathbf{SL}(n,R)$-структурой существует локальная система координат $x^1,\dots,x^n$, в которой произвольный тензор Киллинга φ порядка p имеет компоненты*

$$\varphi_{i_1\dots i_p} = e^{2p\psi}\sum_{q=0}^{p} A_{i_1\dots i_p j_1\dots j_q}x^{j_1}\dots x^{j_q}, \tag{2.2}$$

где $A_{i_1\dots i_p j_1\dots j_q}$ — симметричные по группам индексов $i_1,\dots,i_p$ и $j_1,\dots,j_q$ постоянные такие, что симметризация их по индексам $i_1,\dots,i_p$, $j_1,\dots,j_{q-1}$ для $q=1,\dots,p$ дает нуль и вследствие этого векторное пространство $\mathbf{G}^p(M,\mathbf{R})$ тензоров Киллинга имеет размерность $\dim \mathbf{G}^p(M,\mathbf{R}) = \frac{p(p+1)^2(p+2)^2\dots(n+p-1)^2(n+p)}{p!(p+1)!}$.

На основании (2.1) и (2.2) заключаем (см. также [16]), что на псевдоримановом многообразии (M, g) постоянной кривизны локальные ковариантные компоненты вектора Киллинга имеют вид $\xi_k = e^{2\psi}(A_{kj}x^k + B_k)$ для $\psi = \frac{1}{2(n+1)} \ln|\det g|$ и произвольных постоянных $A_{kj} = -A_{jk}$ и B_k. Это согласуется с общей теорией, согласно которой ([18], с. 65–66; [23], с. 287) группа изометрий n-мерного многообразия (M, g) постоянной кривизны имеет от $n(n+1)/2$ параметров.

3. Доказательства теорем

Пусть $f : \overline{M} \to M$ — дифференцируемое отображение многообразия $\overline{M}$ на другое многообразие M и f_* — его дифференциал. Тогда для любого ковариантного тензорного поля ω на M можно определить на $\overline{M}$ ковариантное тензорное поле $f^*\omega$, где f^* — транспонированное к f_* отображение. Если на M, $\overline{M}$ заданы эквиаффинные $SL(n,R)$-структуры и $f : \overline{M} \to M$ — проективный диффеоморфизм, т. е. отображение, переводящее геодезические многообразия $\overline{M}$ в геодезические многообразия M, то будет справедливой

Лемма 1. *Пусть $f : \overline{M} \to M$ — проективный диффеоморфизм n-мерных многообразий с эквиаффинными $\mathbf{SL}(n,R)$-структурами и ω — тензор Киллинга–Яно порядка p $(1 \le p \le n-1)$ на многообразии M. Тогда тензором Киллинга–Яно порядка p на $\overline{M}$ будет $\overline{\omega} = e^{-(p+1)\psi}(f^*\omega)$ для $\psi = (n+1)^{-1}\ln \pi/\overline{\pi}$, где π и $\overline{\pi}$ — существенные компоненты элементов объемов $\mathbf{SL}(n,R)$-структур многообразий M и $\overline{M}$ соответственно.*

Доказательство. Известно, что диффеоморфизм $f : \overline{M} \to M$ в соответствующих локальных системах координат $x^1 = \overline{x}^1, \dots, \overline{x}^n = \overline{x}^n$ можно задать уравнениями $x = f(\overline{x})$. В случае проективного диффеоморфизма многообразий с эквиаффинными $\mathbf{SL}(n,R)$-структурами в общей по отображению f локальной системе координат справедливы равенства ([8], с. 166; [21], с. 72)

$$\Gamma^k_{ij} = \overline{\Gamma}^k_{ij} + \psi_i\delta^k_j + \psi_j\delta^k_i \tag{3.1}$$

для коэффициентов Γ^k_{ij} и $\overline{\Gamma}^k_{ij}$ связностей ∇ и $\overline{\nabla}$ и $\psi_j = (n+1)^{-1}\partial_j \ln \pi/\overline{\pi}$. Здесь π и $\overline{\pi}$ — существенные компоненты элементов объемов $\mathbf{SL}(n,R)$-структур многообразий M и $\overline{M}$ соответственно. Из (3.1) непосредственно следует, что отображение f^{-1}, обратное проективному диффеоморфизму $f : \overline{M} \to M$, является проективным диффеоморфизмом ([21], с. 73).

Полагаем $\omega_{i_1\dots i_p}$ компонентами произвольного тензора Киллинга–Яно порядка p $(1 \le p \le n-1)$, которые согласно определению удовлетворяют уравнениям вида

$$\nabla_{i_0}\omega_{i_1\dots i_p} + \nabla_{i_1}\omega_{i_0\dots i_p} = 0. \tag{3.2}$$

На основании (3.1) и (3.2) непосредственно убеждаемся, что компоненты

$$\overline{\omega}_{i_1\dots i_p} = e^{-(p+1)\psi}\omega_{i_1\dots i_p} \tag{3.3}$$

тензора $\overline{\omega} = e^{-(p+1)\psi}f^*\omega$, найденные в общей по отображению f локальной системе координат, удовлетворяют уравнениям

$$\overline{\nabla}_{i_0}\overline{\omega}_{i_1\dots i_p} + \overline{\nabla}_{i_1}\overline{\omega}_{i_0\dots i_p} = 0.$$

Следовательно, $\overline{\omega}$ является тензором Киллинга–Яно на многообразии $\overline{M}$.

В [14] было доказано, что в декартовой системе координат $\overline{x}^1, \dots, \overline{x}^n$ окрестности U произвольной точки x локально плоского многообразия $\overline{M}$, т. е. многообразия с линейной связностью $\overline{\nabla}$, чьи тензоры кривизны и кручения равны нулю, тензор Киллинга–Яно имеет компоненты

$$\overline{\omega}_{i_1\dots i_p} = A_{i_0 i_1\dots i_p}\overline{x}^{i_0} + B_{i_1\dots i_p} \tag{3.4}$$

для произвольных, кососимметричных по всем индексам постоянных $A_{i_0 i_1\dots i_p}$ и $B_{i_1\dots i_p}$. На основании этого в [14] утверждалось, что векторное пространство $\mathbf{K}^p(M,\mathbf{R})$ тензоров Киллинга–Яно валентности p на n-мерном плоском многообразии M имеет размерность $\dim \mathbf{K}^p(M,\mathbf{R}) = (n+1)![(p+1)!(n-p)!]^{-1}$.

Рассмотрим случай проективного диффеоморфизма $f : \mathbf{A}^n \to M$ аффинного пространства $\mathbf{A}^n$ на многообразие M. При $n > 2$ необходимым и достаточным условием этого служит равенство нулю тензора проективной кривизны Вейля W (см. [21], с. 81). Последнее будет означать также, что произвольное n-мерное ($n > 2$) многообразие M с эквипроективной $\mathbf{SL}(n, R)$-структурой является проективно диффеоморфным $\mathbf{A}^n$. В этом случае на основании равенств (3.3) и (3.4) заключаем, что компоненты произвольного тензора Киллинга–Яно ω порядка p ($1 \le p \le n-1$) на n-мерном ($n > 2$) многообразии M с эквипроективной $\mathbf{SL}(n, R)$-структурой имеют вид (2.1). При этом размерность векторного пространства $\mathbf{K}^p(M, \mathbf{R})$ тензоров Киллинга–Яно валентности p останется прежней, как и в случае локально плоского многообразия.

В отличие от леммы здесь $\psi = (n+1)^{-1} \ln \pi$, поскольку в декартовой системе координат $\overline{x}^1, \dots, \overline{x}^n$ существенную компоненту $\overline{\pi}$ элемента объема пространства $\mathbf{A}^n$ можно положить равной единице. При этом многообразие M с эквипроективной $\mathbf{SL}(n, R)$-структурой будет считаться отнесенным к такой локальной системе координат $x^1, \dots, x^n$, в которой, как это последует из (3.1), коэффициенты Γ_{ij}^k связности ∇ принимают вид $\Gamma_{ij}^k = \psi_i \delta_j^k + \psi_j \delta_i^k$. Данный признак необходим и достаточен, чтобы многообразие было проективно диффеоморфным аффинному пространству, однако он не инвариантен относительно выбора системы координат (см. [21], с. 74).

Доказательство второй теоремы проводится аналогичным образом. Здесь, как и в случае с тензором Киллинга–Яно, имеет место

Лемма 2. *Пусть $f : \overline{M} \to M$ — проективный диффеоморфизм n-мерных многообразий с эквиаффинными $\mathbf{SL}(n, R)$-структурами и φ — тензор Киллинга порядка p на многообразии M. Тогда киллинговым тензором порядка p на $\overline{M}$ будет $\overline{\varphi} = e^{-2p\psi}(f^*\varphi)$ для $\psi = (n+1)^{-1} \ln \pi / \overline{\pi}$, где π и $\overline{\pi}$ — существенные компоненты элементов объемов $\mathbf{SL}(n, R)$-структур многообразий M и $\overline{M}$ соответственно.*

Доказательство. Принимая во внимание (3.1), непосредственно убеждаемся, что компоненты

$$\overline{\varphi}_{i_1 \dots i_p} = e^{-2p\psi} \varphi_{i_1 \dots i_p} \tag{3.5}$$

тензорного поля $\overline{\varphi} = e^{-2p\psi} f^*\varphi$, найденные в общей по отображению f локальной системе координат, удовлетворяют уравнениям

$$\overline{\nabla}_{i_0} \overline{\varphi}_{i_1 \dots i_p} = e^{-2p\psi} \nabla_{i_0} \varphi_{i_1 \dots i_p} - p\psi_{i_0} \overline{\varphi}_{i_1 \dots i_p} + \psi_{i_1} \overline{\varphi}_{i_0 \dots i_p} + \dots + \psi_{i_p} \overline{\varphi}_{i_1 \dots i_0}. \tag{3.6}$$

После симметризации в обеих частях (3.6) по индексам $i_0, i_1, \dots, i_p$ приходим к следующим равенствам:

$$(\overline{\delta}^* \overline{\varphi})_{i_0 i_1 \dots i_p} = (p+1) \overline{\nabla}_{(i_0} \overline{\varphi}_{i_1 \dots i_p)} = e^{-2p\psi} (\delta^* \varphi)_{i_0 i_1 \dots i_p} = 0,$$

которые свидетельствуют о киллинговости тензорного поля $\overline{\varphi} = e^{-2p\psi}(f^*\varphi)$ на многообразии $\overline{M}$.

В статье [24] было доказано, что тензор Киллинга порядка p в декартовой системе координат $\overline{x}^1, \dots, \overline{x}^n$ аффинного пространства $\mathbf{A}^n$ имеет компоненты

$$\varphi_{i_1 \dots i_p} = \sum_{q=0}^{p} A_{i_1 \dots i_p j_1 \dots j_q} \overline{x}^{j_1} \dots \overline{x}^{j_q}, \tag{3.7}$$

где $A_{i_1 \dots i_p j_1 \dots j_q}$ — симметричные по группам индексов $i_1, \dots, i_p$ и $j_1, \dots, j_q$ постоянные такие, что симметризация их по индексам $i_1, \dots, i_p$, $j_1, \dots, j_{q-1}$ для $q = 1, \dots, p$ дает нуль. На основании (3.7) в [14] утверждалось, что на n-мерном плоском многообразии M

$$\dim \mathbf{G}^p(M, \mathbf{R}) = \frac{p(p+1)^2(p+2)^2 \dots (n+p-1)^2(n+p)}{p!(p+1)!}$$

для векторного пространства $\mathbf{G}^p(M, \mathbf{R})$ тензоров Киллинга валентности p.

Теперь на основании равенств (3.5) и (3.7) заключаем, что компоненты произвольного тензора Киллинга φ на n-мерном многообразии M с эквипроективной $\mathbf{SL}(n, R)$-структурой имеют вид

(2.2). При этом размерность векторного пространства $\mathbf{G}^p(M, \mathbf{R})$ тензоров Киллинга валентности p останется прежней, как и в случае плоского многообразия.

Литература

1. Nomizu K. *What is affine differential geometry?* // Different. Geom. Meeting Univ. Münster. – Tagungsbericht, 1982. – P. 42–43.
2. Klingeberg W.P.A. *Affine differential geometry, by Katsumi Nomizu and Takeshi Sasaki* // Bull. Amer. Math. Soc. – 1996. – V. 33. – № 1. – P. 75–76.
3. Nomizu K. *On completeness in affine differential geometry* // Geom. dedic. – 1986. – V. 20. – № 1. – P. 43–49.
4. Nomizu K., Sasaki T. *Affine differential geometry.* – Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1994. – 263 p.
5. Simon U., Schwenk-Schellschmidt A., Viesel H. *Introduction to the affine differential geometry of hypersurfaces.* – Japan: Science University of Tokyo, 1991. – 161 p.
6. Blaschke W. *Vorlesungen über Differentialgeometrie* II. *Affine Differentialgeometrie.* – Berlin: Springer, 1923. – 273 s.
7. Schouten J.A. *Ricci-calculus. An introduction to tensor analysis and its geometrical applications.* – Berlin–Göttingen–Heidelberg: Springer, 1954. – 516 p.
8. Норден А.П. *Пространства аффинной связности.* – М.: Наука, 1976. – 432 с.
9. Широков П.А., Широков А.П. *Аффинная дифференциальная геометрия.* – М.: Физматгиз, 1959. – 319 с.
10. Щербаков Р.Н. *Курс аффинной и проективной дифференциальной геометрии.* – Томск: Изд-во Томск. ун-та, 1960. – 194 с.
11. Акивис М.А. *Многомерная дифференциальная геометрия.* – Калинин: Изд-во Калининск. ун-та, 1977. – 83 с.
12. Степанов С.Е., Цыганок И.И. *Оператор Ходжа на многообразии с эквиаффинной структурой* // Дифференц. геометрия многообразий фигур. – Изд-во Калининск. ун-та, 1996. – Вып. 27. – С. 114–117.
13. Степанов С.Е. *Техника Бохнера для m-мерных компактных многообразий с $\mathbf{SL}(m, \mathbf{R})$-структурой* // Алгебра и анализ. – 1998. – Т. 10. – № 4. – С. 703–714.
14. Смольникова М.В., Степанов С.Е. *Фундаментальные дифференциальные операторы первого порядка на внешних и симметрических формах* // Изв. вузов. Математика. – 2002. – № 11. – С. 55–60.
15. Бессе А. *Многообразия Эйнштейна.* – М.: Мир, 1990. – 703 с.
16. Степанов С.Е. *О тензоре Киллинга–Яно* // Теор. и матем. физика. – 2003. – Т. 134. – № 3. – С. 382–387.
17. Крамер Д., Штефани Х., Херльт Э., Мак-Каллум М. *Точные решения уравнений Эйнштейна.* – М.: Энергоиздат, 1982. – 416 с.
18. Кобаяси Ш. *Группы преобразований в дифференциальной геометрии.* – М.: Наука, 1986. – 224 с.
19. Зуланке Р., Винтген П. *Дифференциальная геометрия и расслоения.* – М.: Мир, 1975. – 352 с.
20. Chern S.S. *The geometry of* $\mathbf{G}$*-structures* // Bull. Amer. Math. Soc. – 1966. – V. 72. – P. 167–219.
21. Синюков Н.С. *Геодезические отображения римановых пространств.* – М.: Наука, 1979. – 255 с.
22. Яно К., Бохнер С. *Кривизна и числа Бетти.* – М.: Ин. лит., 1957. – 152 с.
23. Эйзенхарт Л.П. *Риманова геометрия.* – М.: Ин. лит., 1948. – 316 с.
24. Nijenhuis A. *A note on first integrals of geodesics* // Proc. Kon. Ned. Acad. Van. Wetens. Amsterdam. – Ser. A. – 1967. – V. 52. – P. 141–145.

Владимирский государственный педагогический университет

Поступила 08.10.2003