

В.А. КЫРОВ

ДВУМЕТРИЧЕСКИЕ ПРОСТРАНСТВА

В данной работе проводится построение двуметрических двумерных многообразий. Строятся двуметрические функции, определяются согласованные связности и группы изометрий. Приводится интерпретация этих пространств в термодинамике.

1. Двуметрические плоскости. В самом широком смысле двуметрическая геометрия — это геометрия с двумя расстояниями. В этой геометрии паре точек ставится в соответствие не одно число, как обычно, а два. В [1] проводится полная классификация двуметрических двумерных феноменологически симметричных геометрий, т. е. геометрий со следующим свойством. Существуют многообразие M , являющееся плотным подмногообразием прямого произведения $N \times N$ некоторого двумерного многообразия N на себя, и гладкая невырожденная функция $f : M \rightarrow R^2$. Функцию f будем называть *метрической функцией или двуметрикой, или двуметрической функцией*, ее компоненты будем обозначать (f^1, f^2) . Существует такая гладкая функция шести переменных $\Phi : R^3 \rightarrow R^2$ с компонентами (Φ_1, Φ_2) , причем $\text{rang } \Phi = 2$, что для любого кортежа из трех произвольных точек $\langle xyz \rangle$, каждая пара из которого принадлежит множеству M , имеет место функциональное уравнение

$$\Phi(f(xy), f(xz), f(yz)) = 0.$$

Существуют всего две двумерные феноменологически симметричные двуметрические структуры. Это геометрии с метрическими функциями, которые имеют следующие координатные представления:

$$f^1(xy) = x^1 - y^1, \quad f^2(xy) = x^2 - y^2; \quad (1)$$

$$f^1(xy) = (x^1 - y^1)x^2, \quad f^2(xy) = (x^1 - y^1)y^2, \quad (2)$$

где (x^1, x^2) — координаты точки x , а (y^1, y^2) — координаты точки y . Пространство, в котором определена данная двуметрическая структура, будет обозначаться F^2 . Заметим, что области определения двуметрических функций (1) и (2) совпадают со всем прямым произведением $F^2 \times F^2$. Обратим внимание на то, что множество F^2 совпадает с аффинной плоскостью.

Рассмотрим две бесконечно близкие точки $y = (x^1, x^2)$ и $x = (x^1 + dx^1, x^2 + dx^2)$, на которых метрические функции (1) и (2) принимают значения

$$f^1 = dx^1, \quad f^2 = dx^2; \quad (1')$$

$$f^1 = (dx^1)(dx^2 + x^2), \quad f^2 = (dx^1)x^2. \quad (2')$$

Переходя в метрических функциях (1'), (2') от специальных координат (x^1, x^2) к произвольным (y^1, y^2) по формулам $x^1 = \psi^1(y^1, y^2)$, $x^2 = \psi^2(y^1, y^2)$, получим

$$f^1 = a_i^1 dy^i, \quad f^2 = a_i^2 dy^i;$$

$$f^1 = (a_i^1 dy^i)(a_i^2 dy^i + \xi^2), \quad f^2 = a_i^1 dy^i \xi^2,$$

где $a_j^i = \partial \psi^i / \partial y^j$, $\xi^2 = \psi^2$, $i, j = 1, 2$.

Преобразование g двуметрического двумерного пространства F^2 назовем *движением*, если оно сохраняет метрическую функцию f , т.е. двуметрику (f^1, f^2) . В [1] показано, что по метрической функции f находится двухпараметрическая группа движений G_{F^2} , а по этой группе движений восстанавливается метрическая функция f с точностью до гладкой функции $\varphi : R^2 \rightarrow R^2$. Решая эту задачу для выше приведенных пространств, приходим к группам движений G_{F^2} , которые задаются следующими уравнениями:

для метрической функции (1)

$$x^{1'} = x^1 + b, \quad x^{2'} = x^2 + a;$$

для метрической функции (2)

$$x^{1'} = e^\alpha x^1 + b, \quad x^{2'} = e^{-\alpha} x^2, \quad (3)$$

где α, a, b — произвольные постоянные. Объединяя эти системы в одну, имеем

$$x^{1'} = e^{\varepsilon\alpha} x^1 + b, \quad x^{2'} = e^{-\varepsilon\alpha} x^2 + (1 - \varepsilon)a, \quad (4)$$

где $\varepsilon = 0, 1$. Обратим внимание на то, что система (4) зависит от двух независимых непрерывных параметров: a и b при $\varepsilon = 0$; α и β при $\varepsilon = 1$. Двухточечными инвариантами группы (3) являются также следующие функции:

$$\eta = \frac{f^1(xy) - f^2(xy)}{f^1(xy)} = \frac{x^2 - y^2}{x^2}, \quad (5)$$

$$A = f^1(xy) - f^2(xy) = (x^1 - y^1)(x^2 - y^2). \quad (6)$$

Двуметрическая геометрия с метрической функцией (2) допускает содержательную интерпретацию в термодинамике. Рассмотрим термодинамическую систему (ТДС), находящуюся в равновесном состоянии. Предположим, что она совершает цикл Карно по пути $T^1 S^1 T^2 S^2 T^1$, где $S^1 > S^2$, т.е. этот цикл однозначно характеризуется параметрами T^1, S^1, T^2, S^2 . Пусть T^1 и T^2 — температуры нагревателя и холодильника соответственно, причем $T^1 > T^2$. Предположим, что в результате этого процесса ТДС от нагревателя получает количество тепла $Q^1 = T^1(S^1 - S^2)$ и отдает холодильнику количество тепла $Q^2 = T^2(S^2 - S^1)$. Допустим, что x — состояние ТДС с энтропией $S^1 = x^1$ и температурой $T^1 = x^2$, а y — состояние системы с энтропией $S^2 = y^1$ и температурой $T^2 = y^2$. Тогда интерпретируем двуметрическое пространство M как пространство состояний равновесной ТДС, а двуметрические функции $f^1(xy)$ и $f^2(xy)$ как количества тепла Q^1 и $|Q^2|$ соответственно —

$$f^1(xy) = Q^1 = T^1(S^1 - S^2), \quad f^2(xy) = |Q^2| = T^2(S^1 - S^2).$$

Заметим, что пара состояний x и y однозначно определяет цикл Карно со следующими параметрами: (T^1, S^1, T^2, S^2) . Согласно этой интерпретации инвариант (5) представляет собой коэффициент полезного действия цикла Карно

$$\eta = \frac{Q^1 - |Q^2|}{Q^1} = \frac{x^2 - y^2}{x^2} = \frac{T^1 - T^2}{T^1} < 1,$$

а инвариант (6) — полезная работа цикла Карно

$$A = Q^1 - |Q^2| = (x^1 - y^1)(x^2 - y^2) = (S^1 - S^2)(T^1 - T^2).$$

По своему физическому смыслу координаты x^1 и y^1 строго положительны [2].

Рассмотрим движение g плоскости M , которое произвольные состояния x и y переводит в состояния x' и y' соответственно, т.е. $S'^1 = g^1(S^1, T^1)$, $T'^1 = g^2(S^1, T^1)$, $S'^2 = g^1(S^2, T^2)$, $T'^2 = g^2(S^2, T^2)$. Это приводит к тому, что цикл Карно с параметрами (S^1, T^1, S^2, T^2) переходит в цикл Карно с параметрами (S'^1, T'^1, S'^2, T'^2) . Физически это означает, что отображение g

устанавливает связь между двумя круговыми процессами (циклами). Следовательно, КПД η и полезная работа A этих циклов равны. Заметим, что в этом случае

$$S' = e^\alpha S + b, \quad T' = e^{-\alpha} T,$$

т. е. температуры нагревателя и холодильника при преобразовании g меняются пропорционально с одним и тем же коэффициентом. Выражая $e^{-\alpha}$ из преобразований температуры нагревателя и подставляя в преобразования температуры холодильника этих циклов, получим

$$\frac{T'^1}{T^1} = \frac{T'^2}{T^2}. \quad (7)$$

Для определения коэффициента $e^{-\alpha}$ рассмотрим состояние с эталонной температурой T_0 , которое при преобразовании g переходит в состояние с температурой T . Тогда $\alpha = \ln(T_0/T)$. Поэтому согласно (7) температуры холодильников циклов Карно относительно преобразований g связаны равенством

$$T'^2 = \frac{T}{T_0} T^2,$$

где T_0 — температура нагревателя первого из них.

Траекториями однопараметрической подгруппы группы (3)

$$S' = e^\alpha S, \quad T' = e^{-\alpha} T \quad (3')$$

являются гиперболы, а также вертикальные и горизонтальные прямые. Пусть группа преобразований (3) переводит состояние x в состояние x' . Тогда на возрастание температуры система реагирует убыванием энтропии и наоборот. Из (3) следует равенство $S'T' = ST$.

Из инвариантности двуметрической функции (f^1, f^2) пространства M относительно группы движений следует, что цикл Карно любой равновесной ТДС можно заменить на физически более выгодный цикл Карно с тем же КПД η и той же полезной работой A .

2. Метрические функции двуметрических двумерных многообразий. В данном параграфе определяются двуметрические многообразия и строятся их метрические функции.

Пусть M — гладкое двумерное многообразие, $T(M)$ — касательное расслоение, каждый слой $T_x(M)$ которого будем рассматривать как аффинное пространство. Стандартный слой R^2 является линейным пространством, который также будем рассматривать как аффинное пространство. Пусть $A(M)$ — расслоение аффинных реперов \tilde{u} со структурной группой $A(2, R)$, которая является группой аффинных преобразований. Аффинный репер многообразия M в точке x состоит из точки $p \in T_x(M)$ и линейного репера $u = (X_1, X_2)$ в x . Тогда $\tilde{u} = (p; X_1, X_2)$. Заметим, что элементы из $A(2, R)$ можно представлять в виде $\tilde{a} = \begin{pmatrix} a & \xi \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, причем $a \in GL(2, R)$, $\xi \in R^2$. Каждый аффинный репер \tilde{u} из $A(M)$ можно рассмотреть как аффинное преобразование R^2 на $T_x(M)$ [3]. Пусть o — начало в R^2 и (e_1, e_2) — фиксированный базис в R^2 . Тогда $\tilde{u}(o; e_1, e_2) = (p; X_1, X_2)$.

Рассмотрим гладкое отображение

$$\omega : A_x(M) \times A_x(M) \times T_x(M) \rightarrow R^2, \quad (8)$$

которое задается следующей формулой. Возьмем произвольные аффинные реперы $\tilde{u}, \tilde{v} \in A_x(M)$. Пусть произвольный вектор $X \in T_x(M)$ в базисе \tilde{v} имеет координаты X^1, X^2 . Тогда для функции (8) имеем

$$\omega(\tilde{u}, \tilde{v}, X) = a_i^j X^i e_j + \xi^i e_i, \quad i, j = 1, 2. \quad (9)$$

Предположим, что $\tilde{v} = (q; Y_1, Y_2)$ и $\tilde{u} = (p; X_1, X_2)$. В отношении отображения (8) выдвинем требование $\tilde{a} = \tilde{X}^{-1}$, где \tilde{X} — матрица отличия репера \tilde{u} от репера \tilde{v} . Для открытого покрытия U_α многообразия M (в силу локальной тривиальности расслоения $A(M)$) существует семейство изоморфизмов $\varkappa_\alpha : A(U_\alpha) \rightarrow U_\alpha \times A(2, R)$, определяющих сечения через \tilde{u} и \tilde{v} для $\sigma_\alpha : U_\alpha \rightarrow A(M)$

по формулам $\sigma_{1\alpha}(x) = \varkappa_{1\alpha}^{-1}(x, e)$ и $\sigma_{2\alpha}(x) = \varkappa_{2\alpha}^{-1}(x, e)$ соответственно. Тогда соответствие $x \mapsto \omega$ является гладким в произвольной координатной окрестности $U \subset M$. Поэтому элементы матрицы \tilde{a} являются гладкими функциями в U , которые будем называть *структурными функциями* двуметрического многообразия M .

Лемма. При переходе от системы координат U к системе координат U' в точках их пересечения структурные функции \tilde{a} преобразуются по закону

$$a'^j_i = a^j_k \frac{\partial x^k}{\partial x'^i}, \quad \xi'^i = \xi^i, \quad i, j, k = 1, 2,$$

где a — линейная компонента структурных функций \tilde{a} в координатной окрестности U , а a' — линейная компонента матрицы \tilde{a}' в координатной окрестности U' .

Из этой леммы следует, что функции (9) инвариантны относительно произвольной замены координат.

Рассмотрим замкнутую подгруппу Ли $G \subset A(2, R)$. Обозначим через $Q(M, G)$ или просто Q редуцированное подрасслоение расслоения $A(M) = P(M, A(2, R))$. Рассмотрим сужение отображения (8) на Q_x относительно первого аргумента

$$\omega : Q_x(M) \times A_x(M) \times T_x(M) \rightarrow R^2. \quad (10)$$

Это отображение представим в виде $\omega(\pi(\tilde{u}), \tilde{v}, X)$, где $\tilde{u}, \tilde{v} \in A_x(M)$, а $\pi : A_x(M) \rightarrow Q_x(M)$ — гладкая проекция, которая реперы $b\psi(\tilde{u}')$, $b \in A(2, R)/G$, отображает в \tilde{u}' . Из гладкости отображения π следует, что функция (10) является гладкой. Тогда для фиксированного репера $\tilde{v} \in A_x(M)$

$$\omega_{\tilde{v}}(\tilde{u}, X) = a^j_i X^i e_j + \xi^j e_j, \quad i, j = 1, 2, \quad (11)$$

где \tilde{u} — произвольный репер из Q_x . Поскольку в (11) \tilde{u} — произвольный репер из Q_x , а \tilde{v} — фиксированный репер из $A_x(M)$, то для структурных функций \tilde{a} G -пространства справедливо разложение

$$\tilde{a} = \tilde{b}\tilde{c}, \quad (12)$$

где в произвольной точке из U матрица \tilde{b} — произвольный элемент подгруппы G , а \tilde{c} — некоторая фиксированная матрица из $A(2, R)$. Ниже под \tilde{v} будет пониматься репер $(0; \partial_{x^1}, \partial_{x^2})$. Можно показать, что соответствие $x \mapsto \omega$ гладко.

Пусть подгруппа Ли G как группа преобразований задается уравнениями (4). Тогда для структурных функций \tilde{a} имеем разложение (12), причем в каждой точке из U

$$\tilde{b} = \begin{pmatrix} e^{\varepsilon\alpha} & 0 & b \\ 0 & e^{-\varepsilon\alpha} & (1 - \varepsilon)a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \varepsilon = 0, 1.$$

Поскольку \tilde{u} — произвольный аффинный репер из $Q(M, G)$, то отображение (11) можно представить в виде

$$\omega_{\tilde{v}}(\tilde{u}, X) = ((a^1_i X^i + \xi^1)e^{\varepsilon\alpha} + b)e_1 + ((a^2_i X^i + \xi^2)e^{-\varepsilon\alpha} + (1 - \varepsilon)a)e_2. \quad (11')$$

Возьмем два вектора X и Y из пространства $T_x(M)$ и определим с помощью отображения (11') их образы в пространстве R^2 : $\omega_{\tilde{v}}(\tilde{u}, X)$ и $\omega_{\tilde{v}}(\tilde{u}, Y)$. В силу произвольности выбора репера \tilde{u} получим два семейства векторов в R^2 , которые являются орбитами группы G . Так как группа G двухпараметрическая и действует просто транзитивно в R^2 , то существуют два независимых

двухточечных инварианта этой группы — (1) и (2). Поэтому приходим к двуметрическим функциям

$$f^1(X, Y) = a_i^1 X^i - a_i^1 Y^i, \quad f^2(X, Y) = a_i^2 X^i - a_i^2 Y^i; \quad (13)$$

$$\begin{aligned} f^1(X, Y) &= (a_i^1 X^i - a_i^1 Y^i)(a_i^2 X^i + \xi^2), \\ f^2(X, Y) &= (a_i^1 X^i - a_i^1 Y^i)(a_i^2 Y^i + \xi^2), \end{aligned} \quad (14)$$

где $i, j = 1, 2$. Заметим, что двуметрические функции (13) и (14) определяются двумя ковекторными полями и одним скалярным полем.

Двумерное многообразие M будем называть *двуметрическим*, если в нем определена двуметрическая функция (13) или (14). Двуметрическая функция инвариантна относительно преобразований структурных функций $\tilde{a} \rightarrow \tilde{b}\tilde{a}$.

Воспользуемся тем, что дифференциалы координат dx преобразуются по векторному закону, т. е. образуют вектор. Тогда, полагая в (13) и (14) $Y^i = 0$, $X^i = dx^i$, получим

$$f^1 = a_i^1 dx^i, \quad f^2 = a_i^2 dx^i; \quad (13')$$

$$f^1 = (a_i^1 dx^i)(a_i^2 dx^i + \xi^2), \quad f^2 = a_i^1 dx^i \xi^2. \quad (14')$$

Если для некоторых двуметрических пространств в U можно подобрать такую матрицу \tilde{b} , что $a_i^j = \delta_i^j$, $\xi^i = x^i$, то метрические функции приобретут вид (1') и (2'). Такие пространства называются локально плоскими.

3. Связности двуметрических двумерных пространств. Теперь приступим к исследованию связностей в двуметрических двумерных пространствах. Предположим, что в расслоении аффинных реперов $L(M)$ задана аффинная связность.

Аффинная связность в $L(M)$ двуметрического двумерного пространства M называется *согласованной*, если параллельный перенос слоев из $T(M)$ сохраняет двуметрическую функцию $f = (f^1, f^2)$. Из определения согласованной связности пространства M следуют равенства

$$\nabla_k f^1(X, Y) = 0, \quad \nabla_k f^2(X, Y) = 0. \quad (15)$$

Теорема 1. *Компоненты символов Кристоффеля Γ согласованной связности в координатной окрестности U двуметрических двумерных пространств с метрическими функциями (13) и (14) имеют следующие выражения:*

для двуметрики (13)

$$\Gamma_{ik}^l = \bar{a}_j^l \frac{\partial a_i^j}{\partial x^k}, \quad (16)$$

где \bar{a} — матрица, обратная к матрице a ;

для двуметрики (14)

$$\Gamma_{ik}^n = \bar{a}_m^n \frac{\partial a_i^m}{\partial x^k} + \bar{a}_m^n \tilde{a}_i^m \frac{\partial \ln \xi^2}{\partial x^k}, \quad i, j, k, l, n, m = 1, 2, \quad (17)$$

причем $\tilde{a}_i^m = \varepsilon(m)a_i^m$, $\varepsilon(1) = 1$, $\varepsilon(2) = -1$.

Доказательство. Предположим, что X — параллельно переносимое векторное поле. Вычисляя ковариантные производные метрических функций f^1 и f^2 и приравнивая согласно (15) их к нулю, для первой двуметрики получаем

$$\nabla_k a_i^1 = 0, \quad \nabla_k a_i^2 = 0.$$

Расписывая эти две ковариантные производные, а затем их объединяя и выражая символы Γ , приходим к выражениям (16). Во втором случае вычисляя ковариантные производные, имеем

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial a_i^1}{\partial x^k} - \Gamma_{ik}^l a_l^1\right)(a_s^2 X^s + \xi^2) + a_i^1 \left(\left(\frac{\partial a_s^2}{\partial x^k} - \Gamma_{sk}^l a_l^2\right) X^s + \frac{\partial \xi^2}{\partial x^k}\right) &= 0, \\ \left(\frac{\partial a_i^1}{\partial x^k} - \Gamma_{ik}^l a_l^1\right)(a_s^2 Y^s + \xi^2) + a_i^1 \left(\left(\frac{\partial a_s^2}{\partial x^k} - \Gamma_{sk}^l a_l^2\right) Y^s + \frac{\partial \xi^2}{\partial x^k}\right) &= 0. \end{aligned}$$

В касательном пространстве $T_x(M)$, где x — произвольная точка из M , эти выражения представляют собой линейные функции относительно координат векторов X и Y . Из этих равенств следует, что их коэффициенты равны нулю. Поэтому приходим к (17). \square

Следствие. Символы Кристоффеля (16) инвариантны относительно тождественных преобразований структурных функций a , а символы Кристоффеля (17) инвариантны относительно преобразований $a_i^1 \rightarrow e^\alpha a_i^1$, $a_i^2 \rightarrow e^{-\alpha} a_i^2$, $\xi^2 \rightarrow e^{-\alpha} \xi^2$, $\xi^1 \rightarrow e^\alpha \xi^1 + b$.

Найдем значения компонент символов Кристоффеля согласованной связности локально плоских пространств. Из выражений (16) будет следовать

$$\Gamma_{ij}^k = 0, \quad (16')$$

а из выражений (17) —

$$\Gamma_{1k}^1 = \frac{\partial(\ln \xi^2)}{\partial x^k}, \quad \Gamma_{2k}^2 = -\frac{\partial(\ln \xi^2)}{\partial x^k}, \quad \Gamma_{jk}^i = 0, \quad i \neq j. \quad (17')$$

Для нахождения компонент тензора кривизны R (в выше рассмотренной координатной окрестности U) связности с символами Кристоффеля (16') и (17') воспользуемся формулой

$$R_{jkl}^i = \frac{\partial \Gamma_{lj}^i}{\partial x^k} + \Gamma_{lj}^m \Gamma_{km}^i - \frac{\partial \Gamma_{kj}^i}{\partial x^l} - \Gamma_{kj}^m \Gamma_{lm}^i.$$

Прямой подстановкой несложно убедиться в том, что компоненты тензора кривизны R для этих связностей тождественно обращаются в нуль.

Вычислим компоненты тензора кручения T , $T_{ij}^k = \Gamma_{ij}^k - \Gamma_{ji}^k$. Воспользовавшись выражениями (16) и (17), находим

для многообразия с двуметрикой (13)

$$T_{ij}^k = \bar{a}_l^k \left(\frac{\partial a_i^l}{\partial x^j} - \frac{\partial a_j^l}{\partial x^i} \right);$$

для многообразия с двуметрикой (14)

$$T_{ij}^k = \bar{a}_l^k \left(\frac{\partial a_i^l}{\partial x^j} - \frac{\partial a_j^l}{\partial x^i} \right) + \bar{a}_l^k \left(\tilde{a}_i^l \frac{\partial \ln \xi^2}{\partial x^j} - \tilde{a}_j^l \frac{\partial \ln \xi^2}{\partial x^i} \right),$$

причем $i, j, k, l = 1, 2$.

Кривая x_t , $a < t < b$, двуметрического двумерного многообразия M с согласованной связностью называется *геодезической*, если касательное векторное поле $X = \dot{x}_t$, определенное вдоль x_t , параллельно вдоль x_t , т. е. $\nabla_X X$ существует и равно нулю для всех t [3].

Из определения геодезической следует, что она удовлетворяет системе уравнений

$$\ddot{x}^l + \Gamma_{ij}^l \dot{x}^i \dot{x}^j = 0, \quad i, j, l = 1, 2, \quad (18)$$

где точка над функцией означает производную по параметру t . Наша ближайшая цель состоит в том, чтобы уравнения геодезических (18) для двуметрических двумерных пространств проинтегрировать полностью один раз в нормальной координатной окрестности.

Теорема 2. *Геодезическая линия для пространства с двуметрикой (13) в координатной окрестности U относительно согласованной связности является решением системы дифференциальных уравнений первого порядка*

$$a_i^1 \dot{x}^i = a^1, \quad a_j^2 \dot{x}^j = a^2, \quad i, j = 1, 2, \quad (19)$$

где $a^1, a^2 = \text{const}$.

Доказательство. Подставляя выражения для символов Кристоффеля (16) в уравнения (18), а затем умножая слева на матрицу a_i^n и суммируя, приходим к уравнениям $a_i^n \ddot{x}^i + \dot{a}_i^n \dot{x}^i = 0$. Интегрируя эти уравнения, получаем (19). \square

Теорема 3. *Геодезическая линия для пространства с двуметрикой (14) в координатной окрестности U относительно согласованной связности является решением системы дифференциальных уравнений первого порядка*

$$a_i^1 \dot{x}^i = a^1 / \xi^2, \quad a_j^2 \dot{x}^j = a^2 \xi^2, \quad i, j = 1, 2, \quad (20)$$

где $a^1, a^2 = \text{const}$, причем функция ξ^2 в U отлична от нуля.

Доказательство. Подставляя выражения для символов Кристоффеля (17) в уравнения (18), а затем умножая слева на матрицу a_i^n и суммируя, приходим к уравнениям

$$a_i^1 \ddot{x}^i + \dot{a}_i^1 \dot{x}^i + a_i^1 \dot{x}^i \dot{\xi}^2 / \xi^2 = 0, \quad a_i^2 \ddot{x}^i + \dot{a}_i^2 \dot{x}^i - a_2^1 \dot{x}^i \dot{\xi}^2 / \xi^2 = 0.$$

Интегрируя эти уравнения, получаем (20). \square

Пусть K_U — множество решений систем уравнений вида (19) в координатной окрестности U , а N_U — множество решений систем уравнений вида (20). Заметим, что в K_U есть геодезическая линия пространства с двуметрикой (13), а в N_U — геодезическая линия пространства с двуметрической функцией (14). Обратим внимание на то, что произвольная кривая из семейства K_U является интегральной кривой векторного поля λ в U , для которого

$$\lambda^1 = \bar{a}_j^1 a^j, \quad \lambda^2 = \bar{a}_j^2 a^j, \quad (21)$$

где \bar{a} — матрица, обратная к матрице a . Эти интегральные кривые являются решениями системы уравнений

$$\dot{x}^1 = \bar{a}_j^1 a^j, \quad \dot{x}^2 = \bar{a}_j^2 a^j. \quad (19')$$

Аналогично, кривая из семейства N_U является интегральной кривой векторного поля в U

$$\lambda^1 = \bar{a}_1^1 a^1 / \xi^2 + \bar{a}_2^1 a^2 \xi^2, \quad \lambda^2 = \bar{a}_1^2 a^1 / \xi^2 + \bar{a}_2^2 a^2 \xi^2,$$

которая является решением системы уравнений

$$\dot{x}^1 = \bar{a}_1^1 a^1 / \xi^2 + \bar{a}_2^1 a^2 \xi^2, \quad \dot{x}^2 = \bar{a}_1^2 a^1 / \xi^2 + \bar{a}_2^2 a^2 \xi^2. \quad (20')$$

С данного момента и до конца параграфа под U будет пониматься нормальная координатная окрестность с началом в точке x_0 . Произвольную точку нормальной окрестности можно соединить с началом единственной геодезической. Обозначим через $K_U(x_0) \subset K_U$, $N_U(x_0) \subset N_U$ подмножество кривых, проходящих через точку x_0 . Для выяснения того, какая кривая в $K_U(x_0)$ или в $N_U(x_0)$ является геодезической, воспользуемся определением, т. е. тем, что при параллельном переносе касательный вектор вдоль геодезической переходит также в касательный вектор. Тогда

$$\frac{\partial \lambda^i}{\partial x^k} \lambda^k + \Gamma_{jk}^i \lambda^j \lambda^k = 0, \quad i, j, k = 1, 2. \quad (22)$$

Эта система уравнений в U всегда интегрируема, поскольку через точку x_0 в произвольном направлении выходит единственная геодезическая линия. Расписывая (22), получаем

$$\begin{aligned}\frac{\partial \lambda^1}{\partial x^1} \lambda^1 + \frac{\partial \lambda^1}{\partial x^2} \lambda^2 + \Gamma_{11}^1 \lambda^1 \lambda^1 + \Gamma_{12}^1 \lambda^1 \lambda^2 + \Gamma_{21}^1 \lambda^2 \lambda^1 + \Gamma_{22}^1 \lambda^2 \lambda^2 &= 0, \\ \frac{\partial \lambda^2}{\partial x^1} \lambda^1 + \frac{\partial \lambda^2}{\partial x^2} \lambda^2 + \Gamma_{11}^2 \lambda^1 \lambda^1 + \Gamma_{12}^2 \lambda^1 \lambda^2 + \Gamma_{21}^2 \lambda^2 \lambda^1 + \Gamma_{22}^2 \lambda^2 \lambda^2 &= 0.\end{aligned}$$

Для многообразия с двуметрикой (13) подставляя в (22) соответствующие выражения для векторного поля (21) и выражения для символов Кристоффеля (16), приходим к тождеству. Таким образом, в пространстве с двуметрической функцией (13) в нормальной координатной окрестности U с началом в точке x_0 геодезической, проходящей через x_0 , является произвольная кривая из семейства $K_U(x_0)$. Аналогичным образом в пространстве с двуметрикой (14) для геодезической из $N_U(x_0)$ выполняется тождество

$$\frac{\partial b^i}{\partial x^k} \bar{a}_s^k b^s + \tilde{a}_j^i \frac{\partial \ln \xi^2}{\partial x^k} \bar{a}_m^j b^m \bar{a}_s^k b^s = 0, \quad (23)$$

причем $b^i = a^i / (\xi^2)^{\varepsilon(i)}$, $i, j, k, s, m = 1, 2$. Структурные функции в окрестности U с началом в x_0 , произвольные для пространства с двуметрикой (13) и удовлетворяющие условию (23) для пространства с двуметрикой (14), будем называть *каноническими*. Если для пространства с двуметрикой (14) в нормальной окрестности U справедливы равенства $a_j^i = \delta_j^i$, то условия (23) выполняются тождественно, поэтому каноническими структурными функциями являются δ_j^i , ξ^1 , ξ^2 .

Найдем геодезические линии некоторых пространств. Возьмем пространство с двуметрикой (13), которое в нормальной окрестности U с началом в x_0 является плоским, т. е. в U $a_j^i = \delta_j^i$. Тогда в этой окрестности для уравнений геодезических линий (19') с начальными условиями $x^1(0) = x_0^1 = 0$, $x^2(0) = x_0^2 = 0$ имеем

$$x^1(t) = a^1 t, \quad x^2(t) = a^2 t,$$

т. е. геодезическими, проходящими через x_0 , являются прямые, выходящие из этой точки.

Аналогично, для пространства с двуметрикой (14), для которого в нормальной окрестности U с началом в точке x_0 $a_j^i = \delta_j^i$, уравнения геодезических линий (20'), проходящих через точку $x^1(0) = x_0^1 = 0$, $x^2(0) = x_0^2 = 1$, принимают вид

$$\dot{x}^1 = a^1 / \xi^2, \quad \dot{x}^2 = a^2 \xi^2,$$

причем условия (23) выполняются тождественно, т. е. любая кривая, удовлетворяющая последней системе и проходящая через начало, является геодезической. Заметим, что векторные поля

$$\lambda^1 = a^1 / \xi^2, \quad \lambda^2 = a^2 \xi^2$$

не имеют особенностей.

Рассмотрим случай локально плоского пространства, когда в U еще $\xi^i = x^i$. Тогда, интегрируя уравнения геодезических с начальными условиями $x^1(0) = x_0^1 = 0$, $x^2(0) = x_0^2 = 1$, получим

$$\begin{aligned}x^1(t) &= a^1 t, & x^2(t) &= 1, \\ x^1(t) &= -\frac{a^1}{a^2} e^{-a^2 t}, & x^2(t) &= e^{a^2 t},\end{aligned}$$

причем $c_2 \neq 0$, т. е. геодезическими являются прямые и гиперболы, проходящие через точку $(0, 1)$.

4. Двуметрические двумерные пространства, допускающие группы изометрий. Исследуем теперь двуметрические пространства M , допускающие группу изометрий. Преобразование двуметрического двумерного многообразия M называется изометрией, если оно сохраняет метрическую функцию f . Пусть X — векторное поле в двуметрическом многообразии M , которое в координатной окрестности U произвольной точки x определяет однопараметрическую группу изометрий φ_t . Это векторное поле называется инфинитезимальной изометрией двуметрического пространства M . При этом выполняются равенства

$$L_X f^1 = 0, \quad L_X f^2 = 0,$$

где L_X — производная Ли в направлении векторного поля X . Поэтому векторное поле X является инфинитезимальной изометрией.

Теорема 4. *Для того чтобы в координатной окрестности U произвольной точки двуметрического двумерного многообразия M векторное поле X было инфинитезимальной изометрией, необходимо и достаточно, чтобы имела место следующая система дифференциальных уравнений:*

для пространств с двуметрикой (13')

$$\frac{\partial a_j^i}{\partial x^k} X^k + a_k^i \frac{\partial X^k}{\partial x^j} = 0; \quad (24)$$

для пространств с двуметрикой (14')

$$\frac{\partial a_j^i}{\partial x^k} X^k + a_k^i \frac{\partial X^k}{\partial x^j} = \varepsilon^{(i)} a_j^i \frac{\partial \ln \xi^2}{\partial x^k} X^k, \quad (25)$$

где $i, j, k = 1, 2$, причем X^1 и X^2 — координаты векторного поля X , $\varepsilon(1) = -1$, $\varepsilon(2) = 1$.

Доказательство. Воспользуемся выражениями для производной Ли L_X в направлении векторного поля X 1-форм и функций. Вычисляя производные Ли двуметрических функций (13') и (14'), приходим к следующим равенствам:

для двуметрики (13')

$$L_X f^1 = \left(\frac{\partial a_j^1}{\partial x^k} X^k + a_k^1 \frac{\partial X^k}{\partial x^j} \right) dx^j, \quad L_X f^2 = \left(\frac{\partial a_j^2}{\partial x^k} X^k + a_k^2 \frac{\partial X^k}{\partial x^j} \right) dx^j;$$

для двуметрики (14')

$$L_X f^1 = \left(\frac{\partial a_i^1}{\partial x^k} X^k + a_k^1 \frac{\partial X^k}{\partial x^i} \right) dx^i (a_j^2 dx^j + \xi^2) + a_i^1 dx^i \left[\left(\frac{\partial a_j^2}{\partial x^k} X^k + a_k^2 \frac{\partial X^k}{\partial x^j} \right) dx^j + \frac{\partial \xi^2}{\partial x^k} X^k \right],$$

$$L_X f^2 = \left(\frac{\partial a_i^1}{\partial x^k} X^k + a_k^1 \frac{\partial X^k}{\partial x^i} \right) dx^i \xi^2 + a_i^1 dx^i \frac{\partial \xi^2}{\partial x^k} X^k.$$

Из этих равенств следует, что если векторное поле X является инфинитезимальной изометрией, то имеют место уравнения (24) и (25) соответственно, и наоборот. \square

Следствие. Уравнения (24) инвариантны относительно тождественных преобразований структурных функций a , а уравнения (25) инвариантны относительно преобразований $a_i^1 \rightarrow e^\alpha a_i^1$, $a_i^2 \rightarrow e^{-\alpha} a_i^2$, $\xi^2 \rightarrow e^{-\alpha} \xi^2$, $\xi^1 \rightarrow e^\alpha \xi^1 + b$.

Воспользовавшись, далее, выражениями для символов Кристоффеля (16) и (17), после несложных преобразований из (24) и (25) приходим

для пространств с двуметрикой (13')

$$\frac{\partial X^i}{\partial x^j} + \Gamma_{jk}^i X^k = 0;$$

для пространств с двуметрикой (14')

$$\frac{\partial X^i}{\partial x^j} + \Gamma_{jk}^i X^k - 2G_{jk}^i X^k = 0,$$

где введено сокращающее обозначение $G_{jk}^i = \bar{a}_l^i \bar{a}_j^l \frac{\partial \ln \xi^2}{\partial x^k}$.

Проинтегрируем уравнения (24) и (25) для частного случая, когда в координатной окрестности U произвольной точки $a_j^i = \delta_j^i$.

Теорема 5. *Операторы группы инфинитезимальных изометрий в координатной окрестности U с двуметрикой (1') имеют вид*

$$X^1 = \partial_{x^1}, \quad X^2 = \partial_{x^2}. \quad (26)$$

Доказательство. Задача сводится к интегрированию системы дифференциальных уравнений

$$\frac{\partial X^1}{\partial x^1} = 0, \quad \frac{\partial X^1}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial X^2}{\partial x^1} = 0, \quad \frac{\partial X^2}{\partial x^2} = 0,$$

от которой приходим к оператору алгебры Ли $X = a^1 \partial_{x^1} + a^2 \partial_{x^2}$, где a^1 и a^2 — произвольные постоянные. Полагая в первом случае $a^1 = 1$, $a^2 = 0$, а во втором $a^1 = 0$, $a^2 = 1$, приходим к операторам (26). \square

Несложно убедиться в том, что геодезическая линия пространства с двуметрикой (1') является орбитой группы изометрий с операторами (26).

Записывая уравнения (25) для случая $a_j^i = \delta_j^i$, получаем

$$X^1 = ax^1 + c, \quad X^2 = -ax^2 - d, \quad \frac{\partial X^1}{\partial x^1} \xi^2 + \frac{\partial \xi^2}{\partial x^k} X^k = 0.$$

Далее, наша цель состоит в нахождении функций ξ^2 , для которых последняя система разрешима. Заметим, что функция $\xi^2 \neq \text{const}$, поскольку иначе от (14') сможем перейти к (13'), для этого достаточно положить $g^1 = f^2/\xi^2$, $g^2 = \xi^2 f^1/f^2 - \xi^2$. Поэтому возможны два случая: 1) $a \neq 0$, 2) $a = 0$, $c^2 + d^2 \neq 0$.

В первом случае имеем уравнение для функции ξ^2

$$\xi^2 + \frac{\partial \xi^2}{\partial x^1} (x^1 + \alpha) - \frac{\partial \xi^2}{\partial x^2} (x^2 + \beta) = 0, \quad (27)$$

где a , c , d — произвольные постоянные, причем $\alpha = c/a$, $\beta = d/a$.

Во втором случае приходим к уравнению

$$c \frac{\partial \xi^2}{\partial x^1} - d \frac{\partial \xi^2}{\partial x^2} = 0. \quad (28)$$

Интегрируя уравнение (27), находим

$$\xi^2 = \frac{\psi((x^1 + \alpha)(x^2 + \beta))}{x^1 + \alpha}. \quad (29)$$

Заметим, что функция (29) не зависит от переменной x^1 тогда и только тогда, когда ψ — однородная функция, т. е.

$$\psi = \theta(x^1 + \alpha)(x^2 + \beta), \quad (29')$$

где $\theta = \text{const}$. Интегрируя уравнение (28) при $c \neq 0$, получим

$$\xi^2 = \varphi(\gamma_1 x^1 + x^2), \quad (30)$$

где введено обозначение $\gamma_1 = d/c$. Аналогично, если $d \neq 0$, то интегралом уравнения (28) будет

$$\xi^2 = \varphi(x^1 + \gamma_2 x^2), \quad (31)$$

где $\gamma_2 = c/d$.

Теорема 6. *Двуметрическое пространство с двуметрикой*

$$f^1 = dx^1(dx^2 + \xi^2), \quad f^2 = dx^1\xi^2$$

в координатной окрестности U допускает двупараметрическую группу изометрий, если $\xi^2 = \theta(x^2 + \beta)$, причем ее операторы $X_1 = \partial_{x^1}$, $X_2 = x^1\partial_{x^1} - (x^2 + \beta)\partial_{x^2}$; допускает однопараметрическую группу изометрий, если функция ξ^2 имеет вид либо (29), либо (30), либо (31), причем ψ — неоднородная функция, с операторами

$$X_1 = (x^1 + \alpha)\partial_{x^1} - (x^2 + \beta)\partial_{x^2}; \quad X_1 = \partial_{x^1} - \gamma_1\partial_{x^2}; \quad X_1 = \gamma_2\partial_{x^1} - \partial_{x^2},$$

а в остальных случаях групп изометрий нет.

Следствие. Если в утверждении теоремы 6 предполагать, что $\xi^i = x^i$ (локально плоский случай), то приходим к группе изометрий с базисными векторными полями

$$X_1 = \partial_{x^1}, \quad X_2 = x^1\partial_{x^1} - x^2\partial_{x^2}. \quad (32)$$

Несложно установить, что геодезическая линия пространства с двуметрикой (2') в U является орбитой группы изометрий с операторами (32).

5. Двуметрические пространства в неравновесной термодинамике. Двумерная геометрия с двуметрикой (14') допускает содержательную интерпретацию в неравновесной термодинамике. Рассмотрим неравновесную ТДС и выделим в ней такую область, в которой можно говорить о температуре и об энтропии. Пусть M — пространство состояний этой ТДС. Предположим, что система совершает цикл Карно по пути $T^1S^1T^2S^2T^1$, причем предполагается, что T^1 , T^2 и S^1 , S^2 мало отличаются друг от друга соответственно. Итак, цикл Карно однозначно характеризуется параметрами (T^1, S^1, T^2, S^2) . Пусть T^1 и T^2 — температуры нагревателя и холодильника соответственно, причем $T^1 > T^2$, $S^1 > S^2$. Предположим, что в результате этого процесса система от нагревателя получает количество тепла Q^1 и отдает холодильнику количество тепла Q^2 . Интерпретируем двуметрическое пространство M как пространство состояний неравновесной ТДС, а двуметрические функции f^1 и f^2 как количества тепла Q^1 и $|Q^2|$ соответственно. Пусть U — координатная окрестность в M , т. е. множество близких состояний. Рассмотрим два состояния из U : 1 = $(x^1 + dx^1, x^2 + dx^2)$ и 2 = (x^1, x^2) . Тогда интерпретируем температуру и энтропию этих состояний так: $T^1 = x^2 + dx^2$, $S^1 = x^1 + dx^1$ и $T^2 = x^2$, $S^2 = x^1$. Заметим, что пара состояний 1 и 2 однозначно определяет цикл Карно с параметрами (T^1, S^1, T^2, S^2) . Введем функции

$$A_T^1 = \xi^2 + a_i^2 dx^i, \quad A_S^1 = \xi^1 + a_i^1 dx^i, \quad A_T^2 = \xi^2, \quad A_S^2 = \xi^1. \quad (33)$$

Структурные функции $a_j^i = \delta_j^i$ и $\xi^i = x^i$ в U соответствуют локально равновесному состоянию ТДС. Из (33) следует, что в локально равновесном состоянии $A_T^1 = T^1$, $A_S^1 = S^1$, $A_T^2 = T^2$, $A_S^2 = S^2$. Обозначим

$$\delta A_S = A_S^1 - A_S^2 = a_i^1 dx^i, \quad \delta A_T = A_T^1 - A_T^2 = a_i^2 dx^i.$$

Эти выражения в локально плоском случае являются полными дифференциалами и совпадают соответственно с dS и dT . Поскольку M является двумерным многообразием, то эти формы обладают интегрирующими множителями b_S и b_T соответственно. Наличие этих интегрирующих множителей свидетельствует о том, что в неравновесном состоянии в ТДС функционируют “источники энтропии”, которые при переходе в равновесное состояние иссякают. Тогда

$$\delta A_S = \frac{1}{b_S} dB_S, \quad \delta A_T = \frac{1}{b_T} dB_T,$$

где B_S и B_T — соответствующие интегралы, причем в равновесном состоянии $b_S = 1$, $b_T = 1$. Таким образом,

$$f^1 = (\delta A_T + A_T)\delta A_S, \quad f^2 = A_T\delta A_S,$$

где $A_T = A_T^2$. Итак, количество тепла для неравновесной ТДС $\delta Q = A_T\delta A_S$. Заметим, что в равновесных состояниях эта формула совпадает с $\delta Q = TdS$. Поэтому согласно второму началу термодинамики и нашей интерпретации

$$\delta Q = A_T\delta A_S = \frac{A_T}{b_S}dB_S = \xi^2 a_i^1 dx^i \leq x^2 dx^1. \quad (34)$$

Заметим, что в случае равновесных состояний (34) представляет собой равенство. Таким образом, для неравновесных процессов первое начало термодинамики записывается в виде

$$dU = \frac{A_T}{b_S}dB_S - PdV.$$

Согласно нашей интерпретации функция (5) представляет собой коэффициент полезного действия цикла Карно

$$\eta = \frac{a_i^2 dx^i}{\xi^2 + a_j^2 dx^j} = \frac{\delta A_T}{A_T + \delta A_T} < 1, \quad (5')$$

а функция (6) — полезная работа цикла Карно

$$A = a_i^1 dx^i a_j^2 dx^j = \delta A_S \delta A_T = \frac{dB_S}{b_S} \frac{dB_T}{b_T}.$$

Из неравенства (5') следует, что $\xi^2 > 0$, $A_T > 0$. По теореме Карно [2] КПД любого теплового цикла с температурой нагревателя T^1 и температурой холодильника T^2 меньше либо равна КПД равновесного цикла Карно с теми же T^1 и T^2 . Поэтому

$$\frac{a_i^2 dx^i}{\xi^2 + a_j^2 dx^j} \leq \frac{T^1 - T^2}{T^1} = \frac{dx^2}{x^2 + dx^2}.$$

Заметим, что в равновесном состоянии последнее неравенство превращается в равенство.

Литература

1. Михайличенко Г.Г. *Полиметрические геометрии*. — Новосибирск, 2001. — 144 с.
2. Румер Ю.Б., Рывкин М.Ш. *Термодинамика, статистическая физика и кинетика*. — М.: Наука, 1977. — 552 с.
3. Кобаяси Ш., Номидзу К. *Основы дифференциальной геометрии*. — М.: Наука, 1981. — 344 с.

Горно-Алтайский государственный
университет

Поступила
06.05.2003