

Углов А.Н., кандидат физико-математических наук, доцент, Набережночелнинский институт ФГАОУ ВО «Казанский (Приволжский) федеральный университет», an.uglov@mail.ru

ОБ ОДНОМ ЧИСЛЕННО-АНАЛИТИЧЕСКОМ МЕТОДЕ НАХОЖДЕНИЯ КОНФОРМНОГО ОТОБРАЖЕНИЯ НА БЕСКОНЕЧНУЮ МНОГОУГОЛЬНУЮ ОБЛАСТЬ ВЕРХНЕЙ ПОЛУПЛОСКОСТИ

Аннотация: Рассматривается задача о нахождении конформного отображения на бесконечную многоугольную область верхней полуплоскости, возникающую при решении многих прикладных задач. В работе предлагается численно-аналитический метод нахождения такого отображения, основанный на методе последовательных конформных отображений.

Ключевые слова: Многоугольная область, верхняя полуплоскость, конформное отображение, метод последовательных конформных отображений.

Требуется найти функцию $z = z(t)$, осуществляющую конформное отображение на область G_z (рис.1) верхней полуплоскости G_t (рис.2)

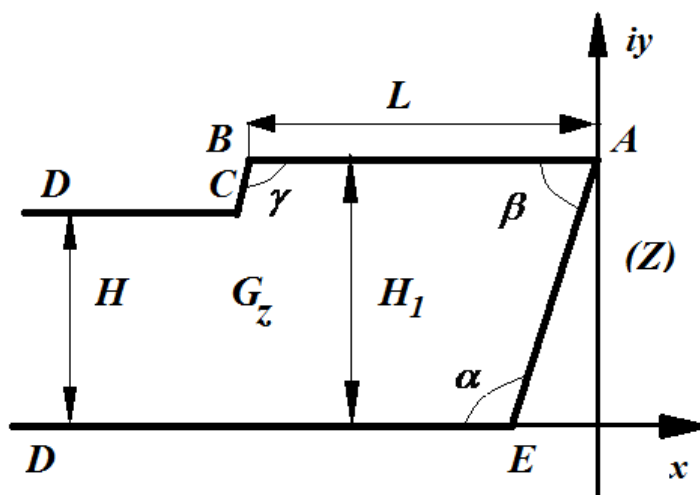


Рис.1 Вид многоугольника в физической плоскости $z = x + iy$

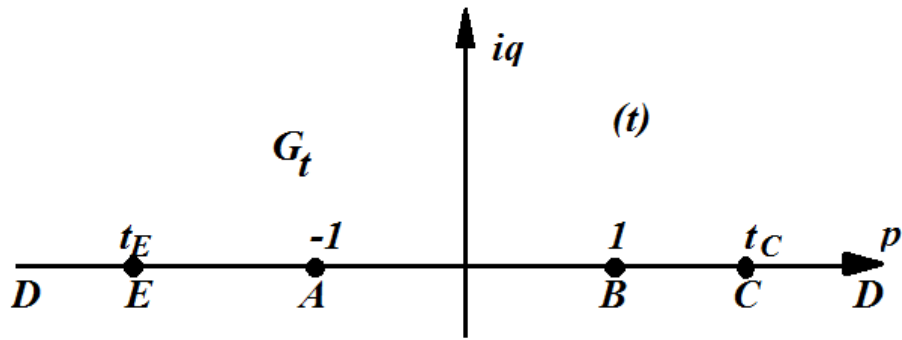


Рис.2 Параметрическая плоскость $t = p + iq$

К необходимости находить конформное отображение верхней полуплоскости на многоугольную область приводит решение многих прикладных задач, в частности, задач аэрогидродинамики течений в каналах реверсивных устройств решетчатого типа [3, с.199]. Как известно [2, с.164] такое отображение задаётся интегралом Шварца-Кристоффеля. Для рассматриваемой многоугольной области G_z отображающая функция $z = z(t)$ запишется в виде

$$z(t) = K_1 \int_0^t (\tau - t_E)^{\frac{\alpha}{\pi} - 1} (\tau + 1)^{\frac{\beta}{\pi} - 1} (\tau - 1)^{\frac{\gamma}{\pi} - 1} (\tau - t_C)^{\frac{1-\gamma}{\pi}} d\tau + K_2. \quad (1)$$

Интеграл Шварца-Кристоффеля записывается в предположении, что известными считаются не вершины z_k многоугольника G_z в физической плоскости, а их образы t_k в параметрической плоскости $t = p + iq$. Однако в прикладных задачах на конформные отображения, как правило, задаются вершины z_k многоугольника, а их образы t_k остаются неизвестными параметрами. Три из них можно задать произвольно, а остальные параметры и также постоянные K_1 и K_2 должны определяться из условий задачи. Это обстоятельство представляет собой главную трудность при практическом использовании интеграла Шварца-Кристоффеля.

В интеграл (1), отображающий $G_t \rightarrow G_z$, входит четыре неизвестных параметра t_E, t_C, K_1, K_2 . Неизвестные параметры t_E, t_C находятся как решение системы нелинейных уравнений, получаемых составлением заданных соотношений длин сторон многоугольника EA, BC к длине стороны AB . Если ввести

обозначение $J(a,b) = \left| \int_a^b (\tau - t_E)^{\alpha-1} (\tau + 1)^{\beta-1} (\tau - 1)^{\gamma-1} (\tau - t_C)^{1-\gamma} d\tau \right|$, то система

уравнений для нахождения t_E, t_C запишется в виде

$$\begin{cases} L |\sin \alpha| J(t_E, -1) = H_1 J(-1, 1) \\ L |\sin \gamma| J(1, t_C) = (H_1 - H) J(-1, 1) \end{cases} \quad (2)$$

После нахождения t_E, t_C , неизвестные постоянные K_1, K_2 находятся из условий

$$z(-1) = z_A = iH_1, \quad z(1) = z_B = -L + iH_1. \quad (3)$$

Решение системы (2) находится численно, известным методом Ньютона [1, с.323]. Согласно методу Ньютона каждое уравнение системы (2) последовательно раскладывается в ряд Тейлора по степеням разностей $\alpha_E^{(n+1)} = t_E - t_E^{(n)}$, $\alpha_C^{(n+1)} = t_C - t_C^{(n)}$, где t_E, t_C - точное решение системы (2), $t_E^{(n)}, t_C^{(n)}$ - n -ое приближение к точному решению, $n = 0, 1, 2, \dots$. В разложениях учитываются только первые степени этих разностей. В результате получится система линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных $\alpha_E^{(n+1)}, \alpha_C^{(n+1)}$

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial J_1^{(n)}}{\partial t_E} - \frac{H_1}{L |\sin \alpha|} \cdot \frac{\partial J_0^{(n)}}{\partial t_E} \right) \alpha_E^{(n+1)} + \left(\frac{\partial J_1^{(n)}}{\partial t_C} - \frac{H_1}{L |\sin \alpha|} \cdot \frac{\partial J_0^{(n)}}{\partial t_C} \right) \alpha_C^{(n+1)} = \frac{H_1 \cdot J_0^{(n)}}{L |\sin \alpha|} - J_1^{(n)} \\ \left(\frac{\partial J_2^{(n)}}{\partial t_E} - \frac{H_1 - H}{L |\sin \gamma|} \cdot \frac{\partial J_0^{(n)}}{\partial t_E} \right) \alpha_E^{(n+1)} + \left(\frac{\partial J_2^{(n)}}{\partial t_C} - \frac{H_1 - H}{L |\sin \gamma|} \cdot \frac{\partial J_0^{(n)}}{\partial t_C} \right) \alpha_C^{(n+1)} = \frac{(H_1 - H) J_0^{(n)}}{L |\sin \gamma|} - J_2^{(n)} \end{cases}, \quad (4)$$

где $J_0 = J(-1, 1)$, $J_1 = J(t_E, -1)$, $J_2 = J(1, t_C)$. Решив систему (4) при $n = 0, 1, 2, \dots$ найдём последовательно первое приближение $t_E^{(1)} = t_E^{(0)} + \alpha_E^{(1)}$, $t_C^{(1)} = t_C^{(0)} + \alpha_C^{(1)}$, второе приближение $t_E^{(2)} = t_E^{(1)} + \alpha_E^{(2)}$, $t_C^{(2)} = t_C^{(1)} + \alpha_C^{(2)}$, ..., n -ое приближение $t_E^{(n)} = t_E^{(n-1)} + \alpha_E^{(n)}$, $t_C^{(n)} = t_C^{(n-1)} + \alpha_C^{(n)}$ к точному решению t_E, t_C . Итерационный процесс заканчивается, как только $\min \left\{ \left| \alpha_E^{(n)} \right|, \left| \alpha_C^{(n)} \right| \right\} \leq \varepsilon$, где ε - наперёд заданное малое число и принимается $t_E \approx t_E^{(n)}$, $t_C \approx t_C^{(n)}$.

Эффективность метода Ньютона для нахождения решения системы (2) существенным образом зависит от выбора хорошего начального приближения $t_E^{(0)}, t_C^{(0)}$, которое должно мало отличаться от её точного решения t_E, t_C .

В данной работе начальное приближение $t_E^{(0)}, t_C^{(0)}$ предлагается отыскивать, используя численный метод последовательных конформных отображений [2, с.386].

Сначала с помощью вспомогательного конформного отображения

$$w = h \cdot \frac{ch\left(\frac{\pi z}{H_1}\right) + h_1}{ch\left(\frac{\pi z}{H_1}\right) + h_2}, \quad (5)$$

где $h = w_D$, $h_2 = \frac{ch\left(\frac{\pi z_A}{H_1}\right)\left(1 - \frac{w_A}{w_D}\right) - ch\left(\frac{\pi z_B}{H_1}\right)\left(1 - \frac{w_B}{w_D}\right)}{\frac{w_A}{w_D} - \frac{w_B}{w_D}}$,

$h_1 = \frac{w_A}{w_D} h_2 - ch\left(\frac{\pi z_A}{H_1}\right)\left(1 - \frac{w_A}{w_D}\right)$, осуществляющего отображение полуполосы $DFAD$ ширины H_1 (рис. 3) на верхнюю полуплоскость плоскости $w = u + iv$, область G_z отображается на область $G_{w^{(n)}}$ с указанным на рисунках 3 и 4 соответствием точек.

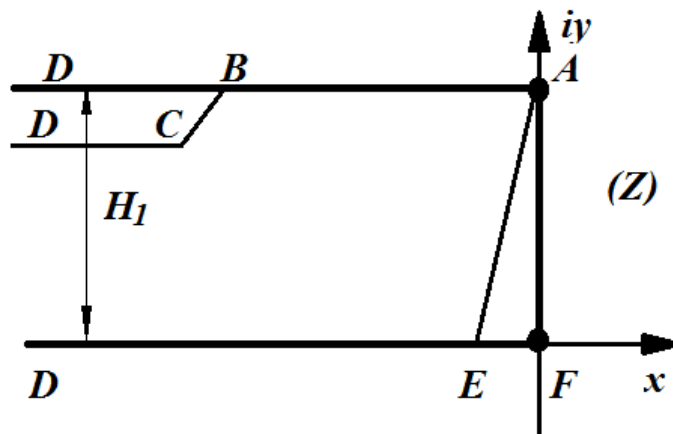


Рис.3 Вид полуполосы, содержащей многоугольник в плоскости $z = x + iy$

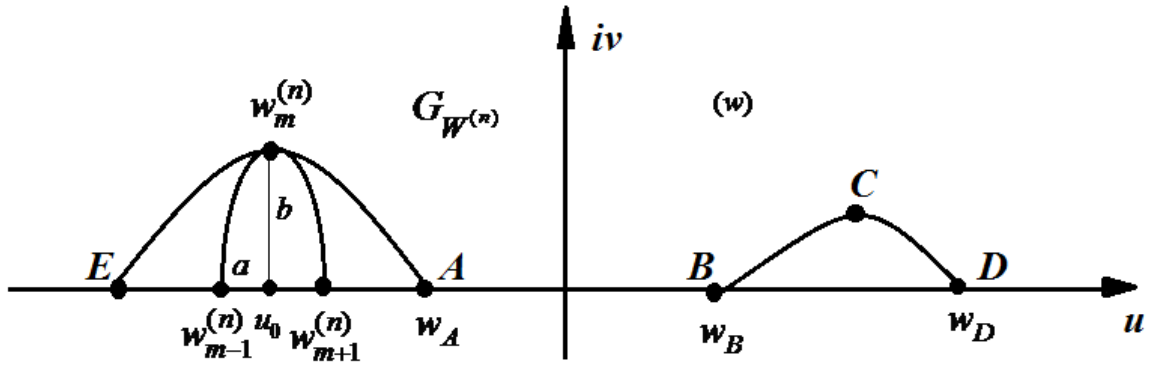


Рис.4 Параметрическая плоскость $w = u + iv$

Затем, с помощью метода последовательных конформных отображений, область $G_{W^{(n)}}$ отображается на верхнюю полуплоскость G_t . Суть метода состоит в последовательном применении конформного отображения верхней полуплоскости с вырезанным полуэллипсом, проходящим через три заданные точки $w_{m-1}^{(n)}, w_m^{(n)}, w_{m+1}^{(n)}$ (рис.4) на верхнюю полуплоскость. Отображение верхней полуплоскости с вырезанным полуэллипсом, заданным уравнением $\frac{(u - u_0)^2}{a^2} + \frac{v^2}{b^2} = 1$, где $(u_0, 0)$ - центр эллипса, a, b - полуоси эллипса, на верхнюю полуплоскость имеет вид

$$t = w + \frac{b(a+b)}{w - u_0 + \sqrt{w - u_0 - \sqrt{a^2 - b^2}} \cdot \sqrt{w - u_0 + \sqrt{a^2 - b^2}}}. \quad (6)$$

Формулы для определения параметров u_0, a, b эллипса, проходящего через три заданные точки $u_{m-1} + iv_{m-1}, u_m + iv_m, u_{m+1} + iv_{m+1}$, где $u_{m-1} < u_m < u_{m+1}$, имеют вид

$$u_0 = \frac{1}{2} \cdot \frac{u_{m-1}^2 + (\sigma - 1)u_m^2 - \sigma u_{m+1}^2}{u_{m-1} + (\sigma - 1)u_m - \sigma u_{m+1}}, \quad \sigma = \frac{v_m^2 - v_{m-1}^2}{v_m^2 - v_{m+1}^2},$$

$$a^2 = \frac{(u_{m-1} - u_0)^2 \cdot v_m^2 - (u_m - u_0)^2 \cdot v_{m-1}^2}{v_m^2 - v_{m-1}^2}, \quad b^2 = \frac{(u_{m-1} - u_0)^2 \cdot v_m^2 - (u_m - u_0)^2 \cdot v_{m-1}^2}{(u_{m-1} - u_0)^2 - (u_m - u_0)^2}.$$

Отображение (6) применяется до тех пор, пока область $G_{W^{(n)}}$ не будет достаточно близка к верхней полуплоскости G_t .

Вычислительная процедура нахождения искомого отображения методом последовательных конформных отображений состоит в следующем. Сначала на границу области G_z наносится достаточно большое количество точек z_j ($j = \overline{1, N}$), в число которых включаются и вершины z_E, z_A, z_B, z_C многоугольника G_z . Затем с помощью (5) эти точки переводятся в точки $w_j^{(0)}$ границы области $G_{W^{(0)}}$. Из точек $w_j^{(0)}$ выбирается точка $w_m^{(0)}$ с максимальной ординатой и через точки $w_{m-1}^{(0)}, w_m^{(0)}, w_{m+1}^{(0)}$ проводится полуэллипс, внешность которого затем с помощью (6) отображается на верхнюю полуплоскость. При этом точки $w_j^{(0)}$ переходят в точки $w_j^{(1)}$, лежащие на границе области $G_{W^{(1)}}$. После чего уже из точек $w_j^{(1)}$ выбирается точка $w_m^{(1)}$ с максимальной ординатой и процедура повторяется. Вычислительная процедура заканчивается, когда область $G_{W^{(n)}}$ будет достаточно близка к верхней полуплоскости, т.е. когда выполнится условие $\max_j \left(\operatorname{Im} w_j^{(n)} \right) \leq \varepsilon$, где $j = \overline{1, N}$, ε - наперёд заданное малое число. С помощью вышеописанной вычислительной процедуры находятся точки $w_j^{(n)}$, соответствующие точкам z_j , и в том числе образы $w_E^{(n)}, w_C^{(n)}$ вершин многоугольника z_A, z_C . Найденные значения $w_E^{(n)}, w_C^{(n)}$ и выбираются в качестве начального приближения $t_E^{(0)}, t_C^{(0)}$ для численного нахождения решения системы (2).

Для проверки работоспособности предложенного численно-аналитического метода нахождения неизвестных параметров в интеграле Шварца-Кристоффеля (1), осуществляющего отображение верхней полуплоскости на многоугольник, были проведены численные расчёты для области G_z , где $\alpha = 75^\circ$, $\beta = 105^\circ$, $\gamma = 135^\circ$, $H = 0.6$, $H_1 = 0.9$, $L = 1.1$. При проведении вычислительных процедур предполагалось, что $\varepsilon = 10^{-6}$. Неизвестные параметры в интеграле Шварца-Кристоффеля (1) получились равными: $t_E = -1.196069$,

$t_C = 9.583349$, $K_1 = -0.190986$, $K_2 = -1.069361 + 0.9i$. Для проверки эффективности и точности предложенной методики проведено сравнение заданных координат вершин многоугольника с координатами вершин, рассчитанными по формуле (1). Результаты сравнения представлены в приведенной ниже таблице и говорят об эффективности предложенной методики.

Таблица

Результаты сравнения координат вершин многоугольника

Вершины многоугольника	Координаты вершин	
	заданные	рассчитанные
(x_E, y_E)	(0,0)	(0,0)
(x_A, y_A)	(-0.241154, 0.9)	(-0.241153, 0.9)
(x_B, y_B)	(-1.341154, 0.9)	(-1.341092, 0.9)
(x_C, y_C)	(-1.641154, 0.6)	(-1.641150, 0.599998)

Литература

1. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы: Учеб. пособие. - М.: Наука, 1987. – 600с.
2. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного. - М.: Наука, 1987. – 688с.
3. Маклаков Д.В., Углов А.Н. О моделировании поворотных решёток проницаемыми поверхностями // Аэрогидродинамика течений с неизвестными границами: труды семинара по краевым задачам. Выпуск 26 (тематический). – Изд-во Казанского университета, 1991. - С. 199-207.

Uglov A.N., candidate of Physical and Mathematical Science, assistant professor, Naberezhnye Chelny Institute of Kazan (Volga region) Federal University, an.uglov@mail.ru

ONE NUMERICAL AND ANALYTICAL METHOD OF FINDING OF A CONFORMAL MAPPING ONTO THE INFINITE POLIGONAL DOMAIN OF AN UPPER HALF PLANE

Abstract: The task about finding of a conformal mapping onto the infinite polygonal domain of an upper half plane arising at the solution of many applied tasks is considered. In work the numerical and analytical method of finding of such mapping based on a method of consecutive conformal mappings is offered.

Key words: Polygonal domain, upper half plane, conformal mapping, method of consecutive conformal mappings.