ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2000 МАТЕМАТИКА № 1 (452)

УДК 533.6 : 517.946

С.С. ТИТОВ

РЕШЕНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ В АНАЛИТИЧЕСКИХ ПОЛИАЛГЕБРАХ. I

Содержательность свед́ения многих задач к задаче о неподвижной точке предполагает возможность введения на множестве решений содержательных алгебраических структур (напр., [1], [2]).

Для дифференциальных уравнений классический метод прямых итераций (напр., [3]) в аналитическом варианте уточняется и обосновывается теоремой Коши-Ковалевской [4], что предполагает использование мощного аппарата степенны́х рядов [5], а современная абстрактная ее форма — теорема Овсянникова–Трева–Ниренберга–Нишиды [6]–[11] имеет дело со шкалами банаховых пространств. При этом однако получение результатов типа теоремы Нишиды [12], [13] о существовании решения полной нелинейной системы Навье–Стокса или теорем В.А. Галкина [14] требуют как бы "возврата" к подходу Трева [8], [9], Лерэ [15] с детальным исследованием аналитической природы решения в некоторой банаховой алгебре. В методе характеристических [1], [16] и логарифмических [17] рядов строение решений крайне существенно [18]. Особенно важно, как показано в работах А.Ф. Сидорова и его учеников, наличие рекуррентности в построении коэффициентов таких рядов (напр., [19]–[23], а также [24], [25]).

Можно сформулировать некоторые требования алгебраического характера для получения общих результатов, которые могли бы быть применены к конкретным прикладным задачам математической физики. Нашей целью будет как общая задача о неподвижной точке для нелинейного отображения в некоторой алгебре, так и теоремы существования для нелинейных уравнений в частных производных не типа уравнений Ковалевской. В статье изложен новый метод исследования — комбинаторно-алгебраический анализ в полиалгебрах — для соединения подходов Л.В. Овсянникова, Нишиды и Трева в развитие работ А.Ф. Сидорова и его школы. Во второй части работы на основе уточнения этого метода получены новые теоремы существования периодических решений эволюционных систем, в том числе периодической по пространственным переменным задачи Коши для полной системы Навье–Стокса, описывающей движения сжимаемого вязкого теплопроводного газа.

Объектом нашего изучения будет уравнение

$$z = \varphi + \sum_{m=1}^{\infty} L_m(z, \dots, z) \tag{1}$$

относительно одного неизвестного z в векторном пространстве $A \ni z$ с полилинейными отображениями $L_1(z)$, $L_2(z,z)$, $L_3(z,z,z)$, $\dots$; $\varphi \in A$. Дальнейшее введение в (1) времени-подобного переменного t позволяет применить эту технику к дифференциальным уравнениям.

Определение 1. Пусть A — векторное пространство. Назовем A *полиалгеброй*, если для каждого $n \in \mathbf{N}$ в A задано конечное множество Q_n полилинейных (n-линейных) отображений $L : A^n \to A$, $L \in Q_n$, так что $L(\lambda_1 v_1, \dots, \lambda_n v_n) = \lambda_1 \cdot \ldots \cdot \lambda_n L(v_1, \dots, v_n)$ для любых скаляров $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ и векторов $v_1, \dots, v_n \in A$; а также $L(w_1, \dots, w_n) = L(u_1, \dots, u_n) + L(v_1, \dots, v_n)$, если для некоторого $m \in \{1, \dots, n\}$ имеем $w_m = u_m + v_m$, и $u_l = v_l = w_l$ при $l \neq m$.

Обычная алгебра получается, если $Q_n = \emptyset$ при $n \neq 2$, а Q_2 состоит из единственной билинейной операции умножения, удовлетворяющей быть может некоторым тождествам типа ассоциативности, лиевости и т.п., а может быть и нет (напр., [26]). Одновременное использование нескольких операций в прикладном контексте встречается, например, в алгебрах Мальцева [27], в группах Ли–Беклунда [28]–[30] и др. [31].

Определение 2. Назовем подпространство $B \subset A$ *подполиалгеброй* полиалгебры A, если для любого $n \in \mathbf{N}$, любого $L \in Q_n$ и любых $a_1, \dots, a_n \in B$ имеем $L(a_1, \dots, a_n) \in B$.

Определение 3. Назовем подпространство $J \subset A$ *идеалом* полиалгебры A, если для любого $n \in \mathbf{N}$, любого $L \in Q_n$ и любых $a_1, \dots, a_n \in A$ имеем $L(a_1, \dots, a_n) \in J$, как только хотя бы один из элементов $a_1, \dots, a_n$ принадлежит множеству J.

Естественным образом определяется фактор-полиалгебра и т. п., в соответствии с общими алгебраическими построениями [32], путем расширения сигнатуры исходной алгебраической системы (векторного пространства) за счет n-арных операций $L \in Q_n$ с тождествами полилинейности, т. к. соответствующее отношение эквивалентности оказывается конгруэнцией [33], и структура идеалов, очевидно, модулярна.

Вместе с основными отображениями $L \in Q = \bigcup_{n=1}^{\infty} Q_n$ в A определяются и другие полилинейные отображения. Стандартным образом [34] описание всех композиций исходных отображений можно провести в комбинаторных терминах при помощи (корневых) деревьев, развилкам которых соответствуют основные отображения $L \in Q$ полиалгебры. При решении одного уравнения (1) достаточно полагать $|Q_n| \leq 1$ для любого n. Для единообразия считаем $L_n = 0$ при $|Q_n| = 0$, т. е. $Q = \emptyset$.

Можно использовать не весь класс корневых деревьев, а только лишь его подкласс плоских (упорядоченных) деревьев ([34], с. 300). При этом удается получить оценки, гарантирующие сходимость построенных формальных рядов в соответствующих нормированных пространствах. Количество d_n плоских (упорядоченных) деревьев с n концевыми вершинами при условии нетривиальности развилок в остальных вершинах определяется из очевидного рекуррентного соотношения

$$d_n = \sum_{l=1}^{n-1} \sum_{k_1 + \dots + k_l = n} \prod_{i=1}^{l} d_{k_i}, \quad (k_i \in \mathbf{N}), \quad d_1 = 1;$$

следовательно, производящая d_n функция $g(x)$ удовлетворяет уравнению, которое после суммирования геометрической прогрессии в правой части равносильно квадратному уравнению. Его решение $g(x) = [x + 1 - \sqrt{x^2 - 6x + 1}]/4$ аналитично при $|x| < 3 - 2\sqrt{2} > 0$.

Каждому такому плоскому дереву λ с n концевыми вершинами и нетривиальными развилками соответствует естественным образом функция $L^\lambda(y_1, \dots, y_n)$ от n переменных $y_1, \dots, y_n$, построенная как суперпозиция базовых функций $L_2(x_1, x_2)$, $L_3(x_1, x_2, x_3)$ и т. д. Обозначим через Λ_n множество всех таких деревьев. Так, если дерево $\lambda \in \Lambda_n$ состоит только из одной корневой и n концевых вершин, то $L^\lambda(y_1, \dots, y_n) = L_n(y_1, \dots, y_n)$. Если дерево λ в корне распадается на плоские поддеревья $\lambda_1, \dots, \lambda_k$, причем $L^{\lambda_1}(x, \dots, y), \dots, L^{\lambda_k}(u, \dots, v)$ определены, то $L^\lambda(x, \dots, y, \dots, u, \dots, v) = L_k(L^{\lambda_1}(x, \dots, y), \dots, L^{\lambda_k}(u, \dots, v))$. Для тривиального дерева λ из единственной корневой вершины положим $L^\lambda(\varphi) = \varphi$. Множество всех этих деревьев обозначим через Λ.

Лемма 1. *Решение уравнения*

$$z = \varphi + \sum_{m=2}^{\infty} L_m(z, \dots, z) \tag{2}$$

дается формальным выражением

$$z = \varphi + \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{\lambda \in \Lambda_n} L^{\lambda}(\varphi, \ldots, \varphi). \tag{3}$$

Доказательство. Ввиду полилинейности L_m и однозначной определенности для каждого плоского дерева $\lambda \in \Lambda_m$ порядка $m \geq 2$ его корневой развилки и соответствующих плоских поддеревьев $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ (причем λ_i может быть тривиальным только для концевых вершин), в (3) имеем

$$z = \varphi + \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{\lambda \in \Lambda_n} L^{\lambda}(\varphi, \ldots, \varphi) = \sum_{\lambda \in \Lambda} L^{\lambda}(\varphi, \ldots, \varphi) =$$
$$= \varphi + \sum_{m=2}^{\infty} \sum_{\lambda_1, \ldots, \lambda_m} L_m(L^{\lambda_1}(\varphi, \ldots, \varphi), \ldots, L^{\lambda_m}(\varphi, \ldots, \varphi)) =$$
$$= \varphi + \sum_{m=2}^{\infty} L_m\Big(\sum_{\lambda_1 \in \Lambda} L^{\lambda_1}(\varphi, \ldots, \varphi), \ldots, \sum_{\lambda_m \in \Lambda} L^{\lambda_m}(\varphi, \ldots, \varphi)\Big) = \varphi + \sum_{m=2}^{\infty} L_m(z, \ldots, z). \quad \square$$

Придание законности выкладкам можно провести несколькими путями. Ниже рассматриваются

1) вариант нильпотентных полиалгебр как аналог формальных рядов ([5], с. 13);
2) вариант сходимости в банаховых полиалгебрах как аналог теорем Овсянникова–Трева [6]–[9].

Определение 4. Полиалгебру A назовем *нильпотентной* индекса нильпотентности N, если для всех $n \geq N$ и всех деревьев $\lambda \in \Lambda_n$ имеем $L^{\lambda}(a_1, \ldots, a_n) = 0$ при любых $a_1, \ldots, a_n$, и N — наименьшее число с таким свойством (в частности, $L_n(a_1, \ldots, a_n) \equiv 0$ при $n \geq N$).

Так как в каждой компоненте проективного предела правая часть (2) превращается, ввиду нильпотентности, в конечную сумму, как и все входящие в (3) ряды, очевидна следующая

Лемма 2. *Пусть полиалгебра A есть проективный предел нильпотентных полиалгебр. Тогда*

а) *правая часть* (2) *определена в A для любых $\varphi, z \in A$,*
б) *решение $z \in A$ уравнения* (2) *существует в виде* (3).

Лемма 3. *Пусть A — банахова полиалгебра, т. е.*

$$\|L_m(y_1, \ldots, y_m)\| \leq c_m \|y_1\| \ldots \|y_m\|, \quad c_m \geq 0, \tag{4}$$

для всех $y_i \in A$ при $\|y_i\| \leq R > 0$, причем ряд

$$\sum_{m=2}^{\infty} c_m y^m \tag{5}$$

— аналитическая функция в окрестности точки $y = 0$. Тогда ряд (3) *сходится по норме для всех $\|\varphi\| < r$ при достаточно малом $r > 0$ и представляет для таких φ решение уравнения* (2).

Доказательство. В силу полилинейности при $\varphi = \varphi_1 = \cdots = \varphi_n$ имеем для каждого $\lambda \in \Lambda_n$

$$\|L^{\lambda}(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)\| \leq \|\varphi\|^n \prod_{i \in V_\lambda} c_{m_i},$$

где i пробегает V_λ — все m_i-развилки дерева λ; очевидно, $\sum_i (m_i - 1) = n - 1$. Следовательно, если в силу аналитичности $c_m \leq M/R_*^{m-1} = 1/R_*^{m-1}$ $(m \geq 1)$, $R_* > 0$, (ввиду $c_1 = 1$ в неравенстве Коши полагаем $M = 1$), то $\sum_{\lambda \in \Lambda_n} \|L^{\lambda}(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)\| \leq \|\varphi\|^n d_n / R_*^{n-1}$. Итак, ряд $\sum_{n=2}^{\infty} \sum_{\lambda \in \Lambda_n} L^{\lambda}(\varphi, \ldots, \varphi) \leq$

$R_* \sum\limits_{n=2}^{\infty} d_n \|\varphi\|^n / R_*^n$ оценивается по норме сходящимся при $\|\varphi\| < r = R_*(3 - 2\sqrt{2}) > 0$ рядом, где R_* введено выше, так что $1/R_* = \min(c_m)^{1/(m-1)}$, $R_* < R$. При этом перестановка рядов в доказательстве леммы 1 законна ввиду абсолютной сходимости, и z является решением уравнения (2) (см. также [35], [36]). $\square$

Схема введения времени-подобной переменной t для решения эволюционных уравнений путем сведения к задаче о неподвижной точке стандартна (напр., [37]). Поставим задачу Коши (6), (7) для отображения $u : [0, T] \to A$, где $T > 0$,

$$\frac{du}{dt} = L_1[u] + L_2[u, u] + L_3[u, u, u] + \cdots \tag{6}$$

$$u|_{t=0} = \varphi \in A. \tag{7}$$

Если операторы L_n ограничены (4), то имеем аналог обыкновенного дифференциального уравнения; если они сингулярны (квазидифференциальны) [6], [7], то оказываемся в условиях теоремы Овсянникова–Трева для аналогов уравнений в частных производных типа уравнений Ковалевской. Применяя развитый выше подход к эволюционным уравнениям не типа уравнений Ковалевской, в частности к системам уравнений (6), в которых правые части — многочлены от неизвестных функций и их производных, в том числе выше первого порядка, приходим к уравнению (1) в полиалгебре $B = A[0, T] = A^{[0,T]}$, где $\varphi : [0, T] \to A$, $\varphi|_{t=0} = u|_{t=0}$, операторы $y = L_m(y_1, \dots, y_m)$ определяются посредством интегрирования

$$y(t) = L_m(y_1, \dots, y_m) = \int_0^t L_m[y_1(\tau), \dots, y_m(\tau)] d\tau. \tag{8}$$

Решение уравнения с линейным членом L_1 можно свести к уравнению (2) путем обращения оператора $E - L_1$ (где E — единичный оператор, $E(z) \equiv z$). Поэтому очевидна

Лемма 4. *Пусть в полиалгебре A линейный оператор $E - L_1$ обратим. Тогда уравнение* (1) *в A равносильно при $\widehat{\varphi} = (E - L_1)^{-1}(\varphi)$ уравнению* (2) *в полиалгебре $\widehat{A}$ с операторами $\widehat{L}_1 = 0$,*

$$\widehat{L}_m(z_1, \dots, z_m) = (E - L_1)^{-1}(L_m(z_1, \dots, z_m)). \tag{9}$$

Как обычно, вводя $A^1 = A$, а подпространства A^N при $N > 1$ — как множества конечных линейных комбинаций элементов вида $L^\lambda(a_1, \dots, a_n)$, где $n \geq N$, $\lambda \in \Lambda_n$, $a_1, \dots, a_n \in A$, стандартными рассуждениями убеждаемся, что A^N ($N \in \mathbf{N}$) образуют невозрастающую цепочку идеалов. Если A нильпотентна, то эта цепочка стабилизируется на нулевом идеале $\{0\}$. Ясно также, что для любого k справедливо включение

$$L_k(A^{n_1}, \dots, A^{n_k}) \subseteq A^{n_1 + \dots + n_k}. \tag{10}$$

Как показывают простые контрпримеры, естественно требовать, чтобы в случае пронильпотентности A идеалы J_N проективного спектра удовлетворяли аналогичному (10) свойству "композиционного ряда", справедливому при градуировке $J_N = A^N$. Канонические проекции π проективного предела

$$A = \lim_{\leftarrow} A / J_N \quad (N \in \mathbf{N}) \tag{11}$$

перестановочны с интегрированием по t, поэтому очевидно сохранение нильпотентности при переходе (8), (9) от полиалгебры A к полиалгебрам $B = A[0, T]$ и $\widehat{A}$.

Лемма 5. *Пусть в пронильпотентной полиалгебре* (11) *идеалы J_N ($N \in \mathbf{N}$, $J_1 = A$) удовлетворяют условию* (10)

$$L_k(J_{n_1}, \dots, J_{n_k}) \subseteq J_{n_1 + \dots + n_k}, \tag{12}$$

причем векторное пространство A представимо в виде прямой суммы подпространств J_N/J_{N+1}, инвариантных относительно L_1, где оператор $E-L_1$ обратим. Тогда полиалгебры $(A/J_N)[0,T]$, $\widehat{A}/J_N$ нильпотентны с операциями (8), (9).

Определение 5. Пусть в пронильпотентной полиалгебре $A^* = A$ (см. (11)) идеалы J_N ($N \in \mathbf{N}$, $J_1 = A^*$) удовлетворяют условию градуировки (12); векторное пространство полиалгебры A^* (см. (11)) разлагается в прямую сумму подпространств J_N/J_{N+1}, так что

$$A^* = \bigoplus\nolimits_{N=1}^{\infty}(J_N/J_{N+1});$$

в пространстве A^* введено однопараметрическое семейство норм $\|\cdot\|_\rho$ ($\rho > 0$ — параметр), связаных с нормами $\|\cdot\|_N$ в подпространствах J_N/J_{N+1} (предполагаемых банаховыми) таким образом, что

$$\|u\|_\rho = \sum_{n=1}^{\infty}\|u_N\|_N\rho^N, \tag{13}$$

причем нормы и операторы удовлетворяют условиям возможности мажорирования: для любых $u_1,\dots,u_n \in A^*$ имеем

$$\|L_n(u_1,\dots,u_n)_N\|_N \le \sum_{k=n}^{N} c_{n,N-k}\sum_{l_1+\dots+l_n=N}\|u_{1l_1}\|_{l_1}\dots\|u_{nl_n}\|_{l_n}, \tag{14}$$

где числа $c_{nN} > 0$ таковы, что функции

$$c_n(\rho) = \sum_{N=1}^{\infty} c_{nN}\rho^N \tag{15}$$

аналитичны при $|\rho| < \Upsilon$, ($\Upsilon > 0$). Такую полиалгебру A^*, следуя терминологии Л.В. Овсянникова [38], назовем *аналитической полиалгеброй.*

Ясно, что условие возможности мажорирования (14) — усиление требований (4), налагаемых на операторы $L_n^*(y_1,\dots,y_n)$ в нормированной полиалгебре A^*: из (14), (15) вытекает, что

$$\|L_n(u_1,\dots,u_n)\|_\rho \le c_n(\rho)\|u_1\|_\rho\cdot\ \dots\ \cdot\|u_n\|_\rho \quad (|\rho| < \Upsilon).$$

Пространства A_ρ^* элементов $\mathbf{u}$ с конечной нормой (13) образуют шкалу банаховых пространств [6], [7] с параметром ρ.

Рассмотрим теперь уравнение

$$u_t = \mathcal{M}u + L_2[u,u] + L_3[u,u,u] + \cdots \tag{16}$$

в пронильпотентной полиалгебре A.

Теорема 1. *Пусть A^* — аналитическая полиалгебра с отображениями — полилинейными операторами $L_2^*, L_3^*, \dots$ и градуировкой идеалами J_N/J_{N+1}* (12). *Пусть каждое подпространство J_N/J_{N+1} инвариантно относительно линейного оператора $\mathcal{M}$ и линейных операторов D_n ($n > 1$) так, что определены отображения*

$$L_n(y_1,\dots,y_n) = D_nL_n^*(y_1,\dots,y_n), \tag{17}$$

$$\|D_n\|_N \le DN \quad (D > 0,\ \ n > 1,\ \ N > 0) \tag{18}$$

в пронильпотентной полиалгебре A (11) *с операторами $L_2, L_3, \dots$* (17); *кроме того, на каждом подпространстве J_N/J_{N+1} преобразование $\mathcal{M}$ есть производящий оператор полугруппы типа не выше $\Omega_N > 0$, причем $\Omega_N \le \omega N$ ($\omega > 0$), т. е.*

$$\|\exp\mathcal{M}t\|_N \le \exp(\omega Nt) \quad (t > 0). \tag{19}$$

Тогда для каждого $\rho_0 > 0$, $\rho_0 < \Upsilon$, при любом $0 < \rho < \rho_0$ найдется такое $T > 0$, что при любых $\varphi \in A_{\rho_0}$, $\|\varphi\|_{\rho_0} \leq R$, где R — радиус сходимости ряда (5), существует решение u задачи Коши (16), (7) с конечной нормой $\|u(t)\|_\rho$ при $0 \leq t < T$.

Доказательство. По лемме 5 полиалгебра $B = A[0,T]$ с операторами $L_n(y_1,\dots,y_n)$, определенными посредством интегрирования по t, нильпотентна со спектром идеалов $J_N[0,T]$, а ввиду инвариантности $J_N/J_{N+1}[0,T]$ относительно $(E-\mathcal{M})$ и D_n полиалгебры $\widehat{B}$, $\widehat{B}^*$ нильпотентны с тем же спектром идеалов и с операторами $\widehat{L}_n(z_1,\dots,z_n) = (E-\widehat{\mathcal{M}})^{-1}(L_n(z_1,\dots,z_n))$. Применение формулы $(E-\widehat{\mathcal{M}})z = w$ равносильно применению формулы Коши для решения линейного неоднородного дифференциального уравнения $\dot{w} = \mathcal{M}w + \dot{z}$. Поэтому введение новых полилинейных отображений $v = \widehat{L}_n(y_1,\dots,y_n)$ равносильно тому, что результат v операции $\widehat{L}_n$ находится из решения дифференциального уравнения

$$\dot{v} = \mathcal{M}v + L_n[y_1,\dots,y_n]. \tag{20}$$

Следовательно, т.к. $\mathcal{K}_N = J_N/J_{N+1}[0,T]$ — нуль-полиалгебры, компонента решения $u_N \in \mathcal{K}_N$ определяется по компонентам $u_1,\dots,u_{N-1}$ как решение линейного неоднородного дифференциального уравнения (точнее — конечномерной системы, если J_N/J_{N+1} конечномерно) первого порядка. Решение u строится рекуррентно в виде формального ряда

$$u = \sum_{N=1}^{\infty} u_N.$$

Таким образом, формальное решение как кривая $u(t)$ в проективном пределе $A = \varprojlim A_N$ построено. В случае сходимости ряда по норме эта кривая будет, очевидно, непрерывна ввиду того, что на компонентах A_N ее проекции не пересчитываются при увеличении N.

Докажем сходимость. На каждом пространстве J_N/J_{N+1} для компоненты u_N в силу уравнения (20) получаем задачу Коши

$$\dot{u}_N = \mathcal{M}u_N + \sum_{n=2}^{\infty}(L_n[u,\dots,u])_N, \quad u_N|_{t=0} = \varphi_N. \tag{21}$$

Как было сказано выше, в правую часть (21) входят только компоненты u_{N_1} с $N_1 < N$, поэтому (21) есть линейное неоднородное дифференциальное уравнение относительно u_N, если все компоненты u_{N_1} с $N_1 < N$ уже известны в силу рекуррентной процедуры решения. Интегрируя (21), получаем оценки, ввиду которых, используя (3) (вынося множитель $e^{\omega N t}$ ввиду полилинейности) и возможность мажорирования (14), приходим к оценке, из которой вытекает существование такой последовательности $U_N(t)$ ($N \in \mathbf{N}$), что $\max\limits_{0\leq\tau\leq t}\|u(\tau)_N\|_N \leq U_N(t)$, удовлетворяющей рекуррентной цепочке уравнений

$$U_N(t) = \exp(\omega N t)\Big\{\|\varphi_N\|_N + DN\int_0^t \sum_{n=2}^{\infty}\sum_{k=n}^{N} c_{n,N-k}\sum_{l_1+\dots+l_n=N} U_{1l_1}(\tau)\dots U_{nl_n}(\tau)d\tau\Big\}. \tag{22}$$

Уравнение (22) равносильно тому, что производящая функция $U(\rho,t)$ последовательности $U_N(t)$ удовлетворяет задаче типа задачи Коши–Ковалевской

$$U_t = \frac{1}{1-\exp(\omega t)}\Big\{\Phi(\rho) + \omega D\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\sum_{n=2}^{\infty} c_n(\rho)U(\rho,t)^n\Big\} \tag{23}$$

с начальной функцией $U|_{t=0} = \Phi(\rho)$ — производящей для $\|\varphi\|_N$ в области аналитичности правой части (23). Следовательно, при $\|\Phi(\rho_0)\| < R$ (5), при $\rho < \rho_0$ и малых $T \geq 0$ по теореме Ковалевской мажоранта $U(\rho,t)$ аналитична на $t \in [0,T]$. Значит, сходится ряд и для нормы $\|u(t)\|_\rho$. $\square$

Замечание. Развитый выше формализм позволяет рассматривать теорему 1 при условии

$$\|\mathcal{M}\|_N \le MN \quad (M > 0) \tag{24}$$

как аналог теоремы Л.В. Овсянникова, поскольку тогда из (24) вытекает (19), а правая часть решаемого уравнения (16) есть сумма нелинейных квазидифференциальных операторов. Частный случай (24) — сжимающие полугруппы ($\omega = 0$ в (19), $\mathcal{M}$ диссипативен) — использовал Л.Г. Корзунин [22].

Лемма 6. *Пусть $\vec{y}(t) \in \mathbf{C}^m$ ($m \in \mathbf{N}$) удовлетворяет (при $t \ge 0$) дифференциальному уравнению*

$$\frac{d\vec{y}}{dt} = \mathcal{M}\vec{y} + \vec{z}$$

с начальными данными

$$\vec{y}|_{t=0} = \vec{w},$$

где в некоторых согласованных нормах имеют место оценки $\|\vec{w}\| \le W$, $\|\vec{z}(t)\| \le Z \cdot \Theta$ (при $t \in [0,T]$, $T > 0$), $\|\mathcal{M}\| \le M\Theta$; M, W, Z, Θ — положительные постоянные, $\mathcal{M}$ – постоянная матрица размерности $m \times m$ с разными собственными значениями $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$, имеющими неположительные вещественные части, более того, $\mathcal{M}$ “сильно диссипативна”, т. е.

$$|\lambda_p| \le a\Theta, \quad \frac{1}{|\lambda_p|} \le \frac{b}{\Theta}, \quad \frac{1}{|\lambda_p - \lambda_q|} \le \frac{\gamma}{\Theta} \quad (a, b, \gamma > 0; \quad p, q \in \{1, \ldots, m\}, \quad p \ne q).$$

Тогда при $t \in [0,T]$ имеет место не зависящая от Θ оценка $\|\vec{y}(t)\| \le (W + bZ)K$, где $K = \mathrm{const}$ не зависит от Θ,

$$K = m(a+M)^{m-1}\gamma^{m-1} = \mathrm{const}\,. \tag{25}$$

Доказательство.

$$\|y(t)\| = \left\| e^{\mathcal{M}t}w + \int_0^t e^{\mathcal{M}(t-\tau)}z(\tau)d\tau \right\| \le \|w\|\,\|e^{\mathcal{M}t}\| + Z\Theta \left\| \int_0^t e^{\mathcal{M}(t-\tau)}d\tau \right\| \le$$

по интерполяционной формуле Лагранжа ([39], с. 104)

$$\le W \left\| \sum_{p=1}^m e^{\lambda_p(t)} \prod_{q \ne p} \frac{\mathcal{M} - \lambda_p E}{\lambda_q - \lambda_p} \right\| + Z\Theta \left\| \sum_{p=1}^m \int_0^t e^{\lambda_p(t-\tau)}d\tau \prod_{q \ne p} \frac{\mathcal{M} - \lambda_p E}{\lambda_q - \lambda_p} \right\| \le$$

$$\le \sum_{p=1}^m \left\{ W|e^{\lambda_p t}| + Z\Theta \left| \int_0^t e^{\lambda_p(t-\tau)}d\tau \right| \right\} \prod_{q \ne p} \frac{\|\mathcal{M}\| + \|\lambda_p E\|}{|\lambda_q - \lambda_p|} \le$$

$$\le \sum_{p=1}^m \left\{ W + Z\Theta \frac{|1 - e^{\operatorname{Re}\lambda_p t}|}{|\lambda_p|} \right\} \prod_{q \ne p} \frac{(M+a)\Theta\gamma}{\Theta} \le$$

$$\le (W + bZ) \sum_{p=1}^m (a+M)^{m-1}\gamma^{m-1} = (W + bZ)K. \quad \square$$

Теорема 2. *Пусть дано уравнение (16) в пронильпотентной полиалгебре A с операторами $L_2, L_3, \ldots$ и связанная с нею как в теореме 1 формулами (17) аналитическая полиалгебра A^*, о подпространствах J_N/J_{N+1} которой дополнительно предполагается, что каждое такое пространство есть прямая сумма конечного (примем для простоты) числа I_N подпространств V_{jN} конечной размерности $m = m_{jN}$*

$$J_N/J_{N+1} = \bigoplus\nolimits_{j=1}^{I_N} V_{jN}, \quad \dim V_{jN} = m_{jN},$$

и каждое V_{jN} инвариантно относительно линейных операторов $\mathcal{M}$ и D_n (см. (17)), где условия (18) и (19) (или (24)) заменяются на условия

$$\|D_n\|_{jN} \le \Theta_{jN} D \quad (D > 0),$$
$$\|\mathcal{M}\|_{jN} \le M\Theta_{jN} \quad (M > 0,\ \ 1 \le \Theta_{jN} \le N^P)$$

($P \ge 0$) и требуется, чтобы нормы $\|\cdot\|_N$ и $\|\cdot\|_{jN}$ в пространствах J_N/J_{N+1} и V_{jN} были связаны таким образом, что

$$\|u\|_N = \sum_{j=1}^{I_N} \|u\|_{jN},$$

условия мажорирования уточняются:

$$\|L_n(u_1, \dots, u_n)_{jN}\|_{jN} \le \sum_{k=n}^{N} c_{n,j,N-k} \sum_{l_1+\dots+l_n=N} \sum_{j_1=1}^{I_{l_1}} \dots \sum_{j_n=1}^{I_{l_n}} \|u_{1j_1l_1}\|_{j_1l_1} \dots \|u_{nj_nl_n}\|_{j_nl_n},$$

где, естественно, $\sum_{j=1}^{I_n} c_{n,j,N-k} = c_{n,N-k}$. Наконец, потребуем, чтобы оператор $\mathcal{M}$ в каждом подпространстве V_{jN} имел $m = m_{jN}$ различных (примем для простоты) собственных значений $\lambda_{1iN}, \dots, \lambda_{miN}$ с неположительными вещественными частями, для которых при $\Theta_{jN} \le N^P$ справедливы оценки леммы 6

$$|\lambda_{pjN}| \le a\Theta_{jN}, \quad \frac{1}{|\lambda_{pjN}|} \le \frac{b}{\Theta_{jN}}, \quad \frac{1}{|\lambda_{pjN} - \lambda_{qjN}|} \le \frac{\gamma}{\Theta_{jN}}. \tag{26}$$

Тогда найдется такое $R > 0$, что при любом φ в шаре $\|\varphi\|_{\rho_0} \le R$ существует на полуоси $t \ge 0$ решение $u(t)$ задачи Коши (16), (7) с аналитической (по ρ) при $\rho < \rho_0$ и конечной при $\rho = \rho_0$ нормой $\|u(t)\|_\rho$.

Доказательство. Формальное решение уже построено ранее. Докажем сходимость ряда для нормы решения. На каждом пространстве V_{jN} для компоненты u_{jN} в силу уравнения (20) получаем задачу Коши

$$\dot{u}_{jN} = \mathcal{M} u_{jN} + \sum_{n=2}^{\infty} (L_n[u, \dots, u])_{jN}, \quad u_{jN}|_{t=0} = \varphi_{jN}. \tag{27}$$

Как было сказано выше, в правую часть (27) входят только компоненты $u_{j_1N_1}$ с $N_1 < N$, поэтому (27) есть линейное неоднородное дифференциальное уравнение относительно u_{jN}, если все компоненты $u_{j_1N_1}$ с $N_1 < N$ уже известны в силу рекуррентной процедуры решения. Интегрируя (27), согласно лемме 6 при $\Theta = \Theta_{jN}$ и K из (25) получаем оценки

$$\|u_{jN}\|_{jN} \le K\Big\{\|\varphi_{jN}\|_{jN} + Db \max_{0\le t\le T} \Big\| \sum_{n=2}^{\infty} (L_n^*[u, \dots, u])_{jN} \Big\|_{jN} \Big\}. \tag{28}$$

Из (14), (28) оцениваем $\widetilde{u}_{jN}(T) = \max_{0\le t\le T} \|u_{jN}(t)\|_{jN}$, $T > 0$:

$$\widetilde{u}_{jN}(T) \le K\Big\{\|\varphi_{jN}\|_{jN} + Db \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{k=n}^{N} c_{n,j,N-k} \sum_{l_1+\dots+l_n=N} \sum_{j_1=1}^{I_{l_1}} \dots \sum_{j_n=1}^{I_{l_n}} \widetilde{u}_{j_1l_1}(T) \dots \widetilde{u}_{j_nl_n}(T)\Big\}.$$

Ввиду возможности мажорирования существует последовательность $U_{jN}(T)$ такая, что $\widetilde{u}_{jN}(T) \le U_{jN}(T)$ и

$$U_{jN}(T) = K\Big\{\|\varphi_{jN}\|_{jN} + Db \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{k=n}^{N} c_{n,j,N-k} \sum_{l_1+\dots+l_n=N} \sum_{j_1=1}^{I_{l_1}} \dots \sum_{j_n=1}^{I_{l_n}} U_{j_1,l_1}(T) \dots U_{j_n,l_n}(T)\Big\}.$$

Суммируя по j, получаем

$$U_N(T) = K\Big\{\|\varphi_N\|_N + Db\sum_{n=2}^{\infty}\sum_{k=n}^{N} c_{n,N-k}\sum_{l_1+\dots+l_n=N} U_{l_1}(T)\dots U_{l_n}(T)\Big\}.$$

Следовательно, производящая функция $U(\rho,T) = \sum_{N=1}^{\infty} U_N(T)\rho^N$ последовательности $U_N(T)$ удовлетворяет алгебраическому уравнению

$$U(\rho,T) = K\Big\{\Phi(\rho) + \sum_{n=2}^{\infty}\sum_{k=n}^{N} c_n(\rho)U(\rho,T)^n\Big\}$$

с начальной функцией $U|_{t=0} = \Phi(\rho)$ — производящей для $\|\varphi\|_N$ в области аналитичности правой части (23). Если ряд $U(\rho,T)$ сходится ($U(\rho,T) < \infty$), то конечна и норма $\|u(T)\|_\rho$. Однако эта норма конечна при $\rho = \rho_0$ ввиду леммы 3, если $K\Phi(\rho_0) < R$, где $R > 0$ достаточно мало; следовательно, при любых $T \geq 0$ мажоранта $U(\rho,T)$ аналитична в области $|\rho| < \rho_0$, и конечна при $\rho = \rho_0$. Значит, сходится ряд и для нормы $\|u(t)\|_\rho$, т.е. $u \in A_\rho$ при $|\rho| \leq \rho_0$. $\square$

Если не накладывать дополнительных условий на решаемое уравнение, то можно избежать возможности $\lambda = 0$, рассматривая подполиалгебру, на которой $\lambda \neq 0$, аналитически для эволюционных уравнений это равносильно введению дифференциальных связей [40]. Для допущения возможности обращения в нуль собственных чисел (т.е. $ab\gamma = 0$ в (26)) потребуем, чтобы вещественные части собственных чисел операторов $\mathcal{M}$ на подпространствах V_{jN} при $N = 1$ не превосходили $-\nu$ ($\nu > 0$); тогда, оценивая рекуррентно операторы (9) из решения линейной системы (27) как в леммах 5, 6, вынося $e^{-\nu t}$ в силу полилинейности, получаем

Следствие 1. Пусть в условиях теоремы 2 допускается $\lambda_{jN} = 0$ при $N > 1$, однако вещественные части собственных чисел операторов $\mathcal{M}$ на подпространствах V_{jN} при $N = 1$ не превосходят $-\nu$ ($\nu > 0$). Тогда утверждение теоремы 2 остается справедливым. Более того, в этом случае норма решения стремится к нулю при $t \to +\infty$.

Следствие 2. Пусть в условиях следствия 1 теоремы 2 полиалгебра A градуирована подпространствами $\mathcal{K}_N = J_N/J_{N+1}$ так, что при всех $k \geq 2$ справедливо включение

$$L_k(\mathcal{K}_{n_1},\dots,\mathcal{K}_{n_k}) \subseteq \mathcal{K}_{n_1+\dots+n_k}.$$

Тогда норма решения стремится к нулю при $t \to +\infty$ не медленнее $e^{-\nu t}$.

Основным примером аналитической полиалгебры $A[0,T]$ является множество степенных рядов от нескольких переменных $x, y, \dots, z$ (или от их экспонент [22]). “Коэффициенты” рядов — векторы, зависящие от t, идеалы J_N состоят из формальных рядов, все одночлены которых имеют (общую) степень $\geq N$, с естественными полилинейными операциями, полученными с помощью линейного преобразования (напр., дифференцирования) из обычного произведения аргументов (т.е. полилинейных форм) ([5], с. 100). Для рекуррентного решения эволюционных уравнений в этих полиалгебрах (в виде специальных рядов) следует требовать, как показывает развитый выше формализм, их градуированность (характеристичность операторов правой части), а для сходимости — либо тип уравнений Ковалевской, либо “сильную диссипативность”, что расширяет область приложений экспоненциальных рядов [22].

Литература

1. Васин В.В., Сидоров А.Ф. *О некоторых методах приближенного решения дифференциальных и интегральных уравнений* // Изв. вузов. Математика. – 1983. – № 7. – С. 13–27.
2. Бухштабер В.М., Мищенко А.С., Новиков С.П. *Формальные группы и их роль в аппарате алгебраической топологии* // УМН. – 1971. – Т. 26. – Вып. 2. – С. 131–154.

3. Pate T.H. *A direct iterative method for an abstract Cauchy–Kowalewsky theorem* // Indiana Univ. Math. J. – 1981. – V. 30. – № 3. – P. 415–425.
4. Ковалевская С.В. *Научные работы.* – М.: Изд-во АН СССР, 1948. – 368 с.
5. Грауэрт Г., Реммерт Р. *Аналитические локальные алгебры.* – М.: Наука, 1988. – 303 с.
6. Овсянников Л.В. *Сингулярный оператор в шкале банаховых пространств* // ДАН СССР. – 1965. – Т. 163. – № 4. – С. 819–822.
7. Овсянников Л.В. *Нелинейная задача Коши в шкале банаховых пространств* // ДАН СССР. – 1971. – Т. 200. – № 4. – С. 789–792.
8. Treves F. *On the theory of linear partial differential operators with analytic coefficients* // Trans. Amer. Math. Soc. – 1969. – V. 137. – P. 1–20.
9. Treves F. *An abstract nonlinear Cauchy–Kovalewska theorem* // Trans. Amer. Math. Soc. – 1970. – V. 150. – № 1. – P. 77–92.
10. Nirenberg L. *An abstract form of the nonlinear Cauchy–Kowalewski theorem* // J. Different. Geom. – 1972. – V. 6. – № 4. – P. 561–576.
11. Nishida T. *A note on a theorem of Nirenberg* // J. Different. Geom. – 1977. – V. 12. – № 4. – P. 629–633.
12. Nishida T., Kawashima S., Matsumura A. *On the fluid-dynamical approximation to the Boltzman equation at the level of the Navier–Stokes equation* // Comm. Math. Phys. – 1979. – V. 70. – № 2. – P. 97–124.
13. Nishida T., Matsumura A. *The initial value problem for the equations of motion of viscous and heat-conductive gases* // J. Math. Kyoto Univ. – 1980. – V. 20. – № 1. – P. 67–104.
14. Галкин В.А. *Функциональные решения законов сохранения* // ДАН СССР. – 1990. – Т. 310. – № 4. – С. 834–839.
15. Leray J. *Etude de diverses équations intégrales nonlineaires et de quelques problèmes que pose l'hydrodinamique* // J. Math. Pures Appl. – 1933. – V. 12. – P. 1–82.
16. Баутин С.П. *Характеристическая задача Коши для квазилинейной аналитической системы* // Дифференц. уравнения. – 1976. – Т. 12. – № 11. – С. 2052–2063.
17. Вершинин С.В., Сидоров А.Ф. *О поведении решений уравнений двойных волн в окрестности области покоя* // ПММ. – 1975. – Т. 39. – № 6. – С. 1043–1050.
18. Титов С.С. *О нелинейных уравнениях типа Фукса* // Динам. сплошн. среды. – Новосибирск, 1994. – № 109. – С. 109–122.
19. Sidorov A.F. *On certain representation of solutions nonlinear initial value problems in gas dynamics* // Archives Mech. – Warszawa, 1975. – V. 27. – P. 591–597.
20. Сидоров А.Ф. *Применение специальных конструкций рядов для расчета особенностей обобщенных решений нелинейных уравнений* // Конструиров. алгоритмов и решение задач матем. физ. – М.: ИПМ АН СССР, 1987. – С. 79–97.
21. Коковихина О.В., Сидоров А.Ф. *Специальные конструкции рядов для решения нелинейных уравнений с частными производными* // Числен. методы механ. сплошн. среды. – Новосибирск, 1984. – Т. 15. – № 3. – С. 72–84.
22. Sidorov A.F., Korzunin L.G., Filimonov M.Yu. *Approximate method for solving nonlinear initial boundary problems based on special construction of series* // Soviet J. Numer. Anal. Math. Modelling. – 1993. – V. 8. – № 2. – P. 101–126.
23. Титов С.С. *Разложение решений нелинейных уравнений в двойные ряды* // Дифференц. уравнения. – 1978. – Т. 14. – № 10. – С. 1844–1850.
24. Манин Ю.И. *Алгебраические аспекты нелинейных дифференциальных уравнений* // Итоги науки и техн. ВИНИТИ. Современ. пробл. матем. – 1978. – Т. 11. – С. 5–152.
25. Мальгранж Б. *Идеалы дифференцируемых функций.* – М.: Мир, 1968. – 131 с.
26. Жевлаков К.А., Слинько А.М., Шестаков И.П., Ширшов А.И. *Кольца, близкие к ассоциативным.* – М.: Мир, 1968. – 431 с.
27. Шестаков И.П. *Алгебры Мальцева* // Алгебра и логика. – 1974. – Т. 13. – № 2. – С. 204–213.
28. Овсянников Л.В. *Групповой анализ дифференциальных уравнений.* – М.: Наука, 1978. – 339 с.

29. Ибрагимов Н.Х. *Группы преобразований в математической физике.* – М.: Мир, 1983. – 280 с.
30. Жибер А.В. *Уравнения n-волн и система нелинейных уравнений Шредингера* // Теор. и матем. физика. – 1982. – Т. 52. – № 3. – С. 405–413.
31. Филиппов В.Т. *Однородные алгебры Бола* // Сиб. матем. журн. – 1994. – Т. 35. – № 4. – С. 919–926.
32. Мальцев А.И. *Алгебраические системы.* – М.: Наука, 1970. – 392 с.
33. Титов С.С. *Об эволюции периодической тепловой волны* // Международн. школа-семинар “Аналитические методы и оптимизация процессов жидкости и газа САМГОП–94”. – Арзамас–16, 1994. – С. 107–108.
34. Стенли Р. *Перечислительная комбинаторика.* – М.: Мир, 1990. – 440 с.
35. Орлов А.Г. *Об асимптотике коэффициентов Тейлора алгебраических функций* // Сиб. матем. журн. – 1994. – Т. 35. – № 5. – С. 1125–1137.
36. Бурбаки Н. *Спектральная теория.* – М.: Мир, 1972. – 183 с.
37. Walter W. *An elementary proof of the Cauchy–Kowalevsky theorem* // Amer. Math. Monthly. – 1985. – V. 92. – № 2. – P. 115–126.
38. Овсянников Л.В. *Аналитические группы.* – Новосибирск: Изд-во Новосибирск. ун-та, 1972. – 237 с.
39. Гантмахер Ф.Р. *Теория матриц.* – М.: Наука, 1967. – 575 с.
40. Сидоров А.Ф., Шапеев В.П., Яненко Н.Н. *Метод дифференциальных связей и его применение в газовой динамике.* – Новосибирск: Наука, 1984. – 272 с.

Уральская государственная
архитектурно-художественная
академия

Поступила
05.08.1998