ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1999 МАТЕМАТИКА № 9 (448)

УДК 515.124.4

Е.Н. СОСОВ

О НАИЛУЧШЕЙ СЕТИ, НАИЛУЧШЕМ СЕЧЕНИИ И ЧЕБЫШЕВСКОМ ЦЕНТРЕ ОГРАНИЧЕННОГО МНОЖЕСТВА В БЕСКОНЕЧНОМЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ ЛОБАЧЕВСКОГО

В данной статье доказано, что некоторые результаты А.Л. Гаркави ([1], [2]) и П.К. Белоброва ([3], [4]) о наилучшей сети, наилучшем сечении и чебышевском центре ограниченного множества в специальном банаховом пространстве верны и в бесконечномерном пространстве Лобачевского. А именно, для каждого ограниченного множества бесконечномерного пространства Лобачевского доказано: существование наилучшей N-сети и наилучшего N-сечения; единственность и сильная устойчивость чебышевского центра; совпадение чебышевского центра с чебышевским центром замыкания выпуклой оболочки данного множества и принадлежность чебышевского центра замыканию выпуклой оболочки данного множества.

1. Необходимые определения и теоремы

Пусть V — вещественное гильбертово пространство, X — открытый шар единичного радиуса с центром в нуле. Зададим в множестве X метрику ρ следующим образом:

$$\rho(x,y) = k \operatorname{Arch}\left[\frac{1-(x,y)}{((1-x^2)(1-y^2))^{1/2}}\right], \tag{1}$$

где (x,y) — скалярное произведение векторов x, y из X, $k > 0$. Таким образом, получили известную интерпретацию Бельтрами–Клейна бесконечномерного пространства Лобачевского ([5], с. 73).

Напомним следующие определения и обозначения.

Пусть M — ограниченное множество в пространстве X. Радиусом покрытия множества M N-сетью $S_N = \{y_1, \dots, y_N\}$ ($y_n \in X$) называется число [1]

$$R(M, S_N) = \sup_{x\in M} \min_{1\le n\le N} \rho(x, y_n).$$

N-сеть S_N^*, для которой $R(M,S_N^*) = \inf\limits_{S_N\subset X} R(M,S_N)$, где точная нижняя грань берется по всем N-сетям в пространстве X, называется наилучшей N-сетью для множества M [1]. При этом наилучшая 1-сеть y^* называется чебышевским центром множества M, а число $R(M) = R(M, y^*)$ называется (чебышевским) радиусом множества M [1].

Наилучшим N-мерным сечением множества M (не обязательно ограниченного) в пространстве X называется N-мерная плоскость H_N^* пространства X, для которой

$$\sup_{x\in M} \min_{y\in H_N^*} \rho(x,y) = \inf_{H_N\subset X} \sup_{x\in M} \min_{y\in H_N} \rho(x,y) < \infty, \tag{2}$$

где точная нижняя грань берется по всевозможным N-плоскостям пространства X [1].

Отклонением ограниченных множеств M и K из некоторого метрического пространства в смысле Хаусдорфа называется число $\delta(M,K) = \max\{\sup\limits_{x\in M} \rho(x,K); \sup\limits_{y\in K} \rho(y,M)\}$ ([6], с. 441; [4]).

Говорят, что последовательность ограниченных множеств $\{M_n\}$ сходится к ограниченному множеству M в смысле Хаусдорфа, если $\lim\limits_{n\to\infty} \delta(M_n, M) = 0$ [4].

Чебышевский центр y^* ограниченного множества M называется сильно устойчивым, если для каждой последовательности ограниченных множеств $\{M_n\}$ с чебышевскими центрами y^*_n, сходящейся в смысле Хаусдорфа к множеству M, выполняется условие $\lim\limits_{n\to\infty} \rho(y^*_n, y^*) = 0$ [4].

Сформулируем теперь полученные результаты.

Теорема 1. *Для каждого ограниченного множества M пространства Лобачевского X и каждого натурального N существует наилучшая N-сеть (ср. [1]).*

Теорема 2. *Для каждого множества M пространства Лобачевского X, для которого нижняя грань из (2) конечна (в частности, для ограниченного множества M), существует наилучшее N-мерное сечение для каждого натурального N (ср. [1]).*

Теорема 3. *Для каждого ограниченного множества M пространства Лобачевского X существует единственный чебышевский центр (ср. [1]).*

Теорема 4. *Для каждого ограниченного множества M пространства Лобачевского X верны следующие утверждения.*

A. *Чебышевский центр множества M совпадает с чебышевским центром замыкания выпуклой оболочки множества M и с чебышевским центром выпуклой оболочки множества M (ср. [3]).*

B. *Чебышевский центр множества M принадлежит замыканию выпуклой оболочки множества M (ср. [2]).*

Теорема 5. *Чебышевский центр каждого ограниченного множества M пространства Лобачевского X сильно устойчив (ср. [4]).*

2. Доказательства теорем

Доказательство теоремы 1. Пусть $\{\epsilon_l\}$ $(l = 1, 2, \dots)$ — последовательность положительных вещественных чисел, сходящаяся к нулю и $r = \inf\limits_{S_N \subset X} R(M, S_N)$, где точная нижняя грань берется по всем N-сетям пространства X. Тогда для каждого натурального l найдется N-сеть $S^l_N = \{y^l_1, \dots, y^l_N\}$ такая, что

$$R(M, S^l_N) \le r + \epsilon_l. \tag{3}$$

Можно считать, что N-сети S^l_N для всех натуральных l принадлежат некоторому ограниченному замкнутому множеству P в пространстве X. Действительно, пусть P — замыкание объединения множества всех тех шаров пространства X, центры которых принадлежат ограниченному множеству M и радиусы которых равны $1 + r + \max[\varepsilon_l : l$ — натуральное число$]$. При сохранении прежних обозначений N-сеть S^l_N для каждого натурального l можно изменить следующим образом: элементы N-сети S^l_N, принадлежащие множеству $X \backslash P$ (если такие найдутся), заменяем на произвольные элементы из множества P. Неравенство (3) при этом сохранится. Нетрудно понять, что множество P ограничено и замкнуто в пространстве V и, следовательно, слабо компактно в нем. Пусть $u^* = \{y^*_1, \dots, y^*_N\}$ — N-сеть, составленная из N предельных точек последовательностей $\{y^l_1, \dots, y^l_N\}$ в слабой топологии на множестве P. Покажем, что N-сеть u^* наилучшая. Допустим, что это не выполняется. Тогда найдутся такие $x \in M$ и $\alpha > 0$, что

$$\rho(x, y^*_n) > r + \alpha \tag{4}$$

для каждого $n \in \{1, \dots, N\}$. В силу (3), для каждого $x \in M$ имеем

$$\rho(x, y^l_{n_l}) \le r + \epsilon_l, \tag{5}$$

где $n_l = n_l(x)$ принимает одно из значений $1, 2, \dots, N$. В дальнейшем вместо двойного индекса n_l (или n_t) всюду пишем индекс n. Пусть $\{y^t_n\}$ — подпоследовательность последовательности

$\{y_n^l\}$, слабо сходящаяся к y_n^*. Тогда существуют сходящиеся к нулю последовательности положительных вещественных чисел $\{\delta_t\}$ и $\{\tau_t\}$, для которых, начиная с некоторого t, выполняются неравенства

$$\begin{gathered} |(y_n^t - y_n^*, x)| < \tau_t, \quad |(y_n^t, y_n^*) - (y_n^*)^2| < \delta_t |y_n^*|, \\ (y_n^*)^2 < (y_n^t, y_n^*) + \delta_t |y_n^*| \le |y_n^t|\, |y_n^*| + \delta_t |y_n^*|, \quad |y_n^*| \le |y_n^t| + \delta_t < 1. \end{gathered} \tag{6}$$

Используя эти неравенства, а также (1), (4) и (5), получим

$$\begin{aligned} \operatorname{ch}\left[\frac{r+\alpha}{k}\right] < \frac{1-(x,y_n^*)}{((1-x^2)(1-(y_n^*)^2))^{1/2}} \le \frac{1-(x,y_n^t)+\tau_t}{[(1-x^2)(1-(y_n^*)^2)]^{1/2}} \le \\ \le \operatorname{ch}\left[\frac{r+\epsilon_t}{k}\right][1-(y_n^t)^2]^{1/2}[1-(|y_n^t|+\delta_t)^2]^{-1/2} + \tau_t[(1-x^2)(1-(y_n^*)^2)]^{-1/2}. \end{aligned} \tag{7}$$

Очевидно, правая часть этого неравенства стремится к $\operatorname{ch}(\frac{r}{k})$ при $t \to \infty$. Но $\operatorname{ch}(\frac{r+\alpha}{k}) > \operatorname{ch}(\frac{r}{k})$ при $\alpha > 0$, $r > 0$, $k > 0$. Получили противоречие. $\square$

Доказательство теоремы 2. Очевидно, что каждый элемент y произвольной N-плоскости H_N пространства X можно представить в виде

$$y = y_0 + a_1 y_1 + \ldots + a_N y_N,$$

где y_0 — вектор, ортогональный N-плоскости H_N, определяющий точку из H_N, $\{y_1, \ldots, y_N\}$ — семейство из N ортонормированных векторов пространства V, ортогональных вектору y_0 и $|a_m| < 1$ ($m \in \{1, \ldots, N\}$). Последнее неравенство следует из того, что $y^2 < 1$. Пусть для множества M пространства X

$$r = \inf_{H_N \subset X} \sup_{x \in M} \min_{y \in H_N} \rho(x, y) < \infty.$$

Рассмотрим последовательность N-мерных плоскостей H_N^n ($n = 1, 2, \ldots$) такую, что

$$\sup_{x \in M} \min_{y \in H_N} \rho(x, y) \le r + \epsilon_n,$$

где ϵ_n — последовательность положительных вещественных чисел, сходящаяся к нулю. Предположим, что $y_0^n, y_1^n, \ldots, y_N^n$ — элементы, введенные ранее для N-мерных плоскостей H_N^n ($n = 1, 2, \ldots$). Пусть x — произвольная точка из M и

$$y_x^n = y_0^n + a_{x,1}^n y_1^n + \ldots + a_{x,N}^n y_N^n$$

— ближайший к точке x в метрике (1) элемент N-мерной плоскости H_N^n. Наделим замкнутый шар $B[0,1]$ единичного радиуса с центром в нуле индуцированной слабой топологией пространства V, а отрезок $I_x = [-1, 1]$ наделим стандартной топологией. Тогда множество

$$Q = B^{N+1}[0,1] \times \prod \{I_x^N : x \in M\}$$

будет компактно в топологии произведения. Пусть $\{u_n\}$ — последовательность точек из множества Q, проекциями которых являются точки

$$y_0^n, y_1^n, \ldots, y_N^n \in B[0,1]; \quad a_{x,1}^n, \ldots, a_{x,N}^n \in I_x,$$

где $x \in M$. И пусть точка $u \in Q$ с проекциями

$$y_0, y_1, \ldots, y_N \in B[0,1]; \quad a_{x,1}, \ldots, a_{x,N} \in I_x,$$

где $x \in M$, является предельной точкой для последовательности $\{u_n\}$. Докажем, что N-мерная плоскость H_N^*, элементы которой имеют вид

$$y = y_0 + a_1 y_1 + \cdots + a_N y_N,$$

является наилучшим N-мерным сечением для M. Пусть x — произвольная точка из M. Тогда

$$\rho(x, y_x) \le r, \tag{8}$$

где $y_x = y_0 + a_{x,1}y_1 + \dots + a_{x,N}y_N$ — ближайший к точке x элемент N-мерной плоскости H_N^* в метрике (1). Действительно, если это неравенство не выполняется, то найдется такое число $\alpha > 0$, что $\rho(x, y_x) > r + \alpha$. Очевидно, для последовательности $\{y_x^n\}$ найдется подпоследовательность

$$\{y_x^t = y_0^t + a_{x,1}^t y_1^t + \ldots + a_{x,N}^t y_N^t\},$$

слабо сходящаяся к точке y_x. Рассуждая так же, как и в теореме 1, получим неравенства (6) и (7), где вместо точек y_n^t, y_n^* нужно подставить точки y_x^t и y_x^* соответственно. Следовательно, получаем противоречие. Таким образом, неравенство (8) верно, и N-мерное сечение H_N^* действительно наилучшее. $\square$

Доказательство теоремы 3. Поскольку при различных коэффициентах k в формуле (1) получаются подобные метрики, то в теореме достаточно рассмотреть случай, когда $k = 1$. Пусть, напротив, существуют два различных чебышевских центра u и v для некоторого ограниченного множества M чебышевского радиуса r. Докажем, что середина w отрезка с концами u и v в метрике (1) также является чебышевским центром. Пусть x — произвольная точка множества M. Тогда $\rho(x, u) \le r$, $\rho(x, v) \le r$, поскольку u, v — чебышевские центры. Из простого свойства выпуклости шаров в пространстве Лобачевского следует $\rho(x, w) \le r$. А из этого неравенства и определения чебышевского центра легко получить, что w — чебышевский центр множества M.

Пусть $t = (\mathrm{ch}[\frac{\rho(u,v)}{2}])^{-1}$. Очевидно, $t < 1$. Из определения чебышевского центра w следует, что найдется точка z в множестве M такая, что выполняется неравенство $\mathrm{ch}\,\rho(z, w) > t\,\mathrm{ch}\,r$. Но $\mathrm{ch}\,\rho(z, w) = t(\mathrm{ch}\,\rho(z, u) + \mathrm{ch}\,\rho(z, v))/2$, поскольку $\rho(z, w)$ — длина медианы треугольника с вершинами z, u и v в пространстве Лобачевского X (формулу для длины медианы нетрудно получить из теоремы косинусов ([5], с. 60)). Отсюда и из последнего неравенства следует $\mathrm{ch}\,\rho(z, u) + \mathrm{ch}\,\rho(z, v) > 2\,\mathrm{ch}\,r$. Но это противоречит тому, что r — чебышевский радиус и u, v — чебышевские центры множества M. $\square$

Доказательство теоремы 4. А. Пусть x' — произвольный элемент выпуклой оболочки $\mathrm{Co}(M)$ ограниченного множества M пространства X. Тогда найдутся точки $u_1, \dots, u_n$ из множества M и неотрицательные вещественные числа $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ такие, что $x' = \lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_n u_n$, $\lambda_1 + \dots + \lambda_n = 1$. Из свойства выпуклости шаров в геометрии Лобачевского нетрудно получить, что для произвольной точки y пространства X выполняется неравенство $\rho(x', y) \le \max[\rho(u_1, y), \dots, \rho(u_n, y)]$. Следовательно, $\rho(x', y) \le \sup\limits_{x \in M} \rho(x, y)$. Отсюда, в силу произвольности точки $x' \in \mathrm{Co}(M)$, получим

$$\sup_{x' \in \mathrm{Co}(M)} \rho(x', y) = \sup_{x \in M} \rho(x, y). \tag{9}$$

Пусть y^* и y^+ чебышевские центры множеств M и $\mathrm{Co}(M)$ соответственно. Из определения чебышевского центра и равенства (9) получим

$$\sup_{x' \in \mathrm{Co}(M)} \rho(x', y^*) = \sup_{x \in M} \rho(x, y^*) = \inf_{y \in X} \sup_{x \in M} \rho(x, y) = \inf_{y \in X} \sup_{x' \in \mathrm{Co}(M)} \rho(x', y),$$
$$\sup_{x \in M} \rho(x, y^+) = \sup_{x' \in \mathrm{Co}(M)} \rho(x', y^+) = \inf_{y \in X} \sup_{x' \in \mathrm{Co}(M)} \rho(x', y) = \inf_{y \in X} \sup_{x \in M} \rho(x, y).$$

Из этих соотношений следует $y^* = y^+$. Кроме того, из непрерывности метрики ρ по каждому аргументу следует равенство

$$\sup_{x \in M} \rho(x, y) = \sup_{z \in \overline{M}} \rho(z, y),$$

где $\overline{M}$ — замыкание множества M. Отсюда, проводя аналогичные рассуждения, убедимся, что чебышевские центры всякого ограниченного множества M и его замыкания $\overline{M}$ совпадают (см. [4]).

B. Пусть, напротив, чебышевский центр y^* ограниченного множества M не принадлежит замыканию выпуклой оболочки этого множества. Тогда найдется гиперплоскость L, строго отделяющая чебышевский центр y^* от множества M (следовательно, y^* не принадлежит гиперплоскости L) [2]. Пусть точка y^+ — основание перпендикуляра в пространстве X, проведенного из точки y^* к гиперплоскости L, и z — произвольная точка множества M. Точку пересечения отрезка с концами z, y^* и гиперплоскости L обозначим через y. Тогда $\rho(y, y^+) \le \rho(y, y^*)$, поскольку гипотенуза в геометрии Лобачевского длиннее катета. Кроме того,

$$\rho(z, y^+) \le \rho(z, y) + \rho(y, y^+) \le \rho(z, y) + \rho(y, y^*) = \rho(z, y^*).$$

Отсюда заключаем, что точка y^+ также является чебышевским центром множества M. Но это противоречит свойству единственности чебышевского центра, доказанному в теореме 3. $\square$

Доказательство теоремы 5. Пусть теорема неверна. Тогда найдутся ограниченные множества M, M_n $(n = 1, 2, \dots)$ пространства X с чебышевскими центрами y^*, y_n^* и чебышевскими радиусами r, r_n соответственно, для которых выполняются следующие условия: а) $\alpha_n = \delta(M_n, M) \to 0$ при $n \to \infty$; б) найдется подпоследовательность $\{y_l^*\}$ последовательности $\{y_n^*\}$ и число $A > 0$, для которых, начиная с некоторого номера l_0, выполняется неравенство

$$\rho(y^*, y_l^*) \ge 2A. \tag{10}$$

Докажем, что

$$|r_n - r| \le \alpha_n \quad [4]. \tag{11}$$

Действительно, зададим произвольно точку x в множестве M и число $\epsilon > 0$. Тогда найдется точка $z_n \in M_n$ такая, что $\rho(x, z_n) \le \rho(x, M_n) + \epsilon$. Кроме того, получим неравенства

$$\rho(x, y) \le \rho(x, z_n) + \rho(z_n, y) \le \rho(x, M_n) + \rho(z_n, y) + \epsilon \le$$
$$\le \sup_{x\in M} \rho(x, M_n) + \sup_{z\in M_n} \rho(z, y) + \epsilon \le \delta(M, M_n) + \sup_{z\in M_n} \rho(z, y) + \epsilon$$

для каждого $y \in X$. Отсюда следует, что

$$\inf_{y\in X} \sup_{x\in M} \rho(x, y) \le \delta(M, M_n) + \sup_{z\in M_n} \rho(z, y) + \epsilon.$$

Переходя к точной нижней грани в правой части и используя произвольность выбора $\epsilon > 0$, получим

$$r = \inf_{y\in X} \sup_{x\in M} \rho(x, y) \le \delta(M, M_n) + \inf_{y\in X} \sup_{z\in M_n} \rho(z, y) = \delta(M, M_n) + r_n.$$

Неравенство $r_n \le \delta(M, M_n) + r$ получается аналогично (формальной заменой обозначений).

Пусть x — произвольная точка в множестве M. Выберем число $\epsilon > 0$ и номер $l > l_0$ такие, что

$$\operatorname{ch}(r + 2\alpha_l + \epsilon) < (2 \operatorname{ch} A - 1) \operatorname{ch} r. \tag{12}$$

Тогда $\rho(x, y^*) \le r$, и найдется точка $x_l \in M$ такая, что $\rho(x, x_l) \le \alpha_l + \epsilon$. Кроме того, учитывая (11), получим

$$\rho(x, y_l^*) \le \rho(x, x_l) + \rho(x_l, y_l^*) \le \alpha_l + \epsilon + r_l \le r + 2\alpha_l + \epsilon. \tag{13}$$

Пусть w_l — середина отрезка с концами y^* и y_l^* в метрике (1). Тогда, используя выражение для длины медианы в треугольнике с вершинами x, y^*, y_l^* и неравенства (10), (12), (13), получим

$$\operatorname{ch} \rho(x, w_l) = \frac{\operatorname{ch} \rho(x, y^*) + \operatorname{ch} \rho(x, y_l^*)}{2 \operatorname{ch}[\rho(y^*, y_l^*)/2]} \le \frac{\operatorname{ch} r + \operatorname{ch}(r + 2\alpha_l + \epsilon)}{2 \operatorname{ch} A} < \operatorname{ch} r.$$

Таким образом, $\rho(x, w_l) < r$ для каждой точки $x \in M$. Но это противоречит тому, что r — чебышевский радиус множества M. $\square$

Литература

1. Гаркави А.Л. *О наилучшей сети и наилучшем сечении множеств в нормированном пространстве* // Изв. АН СССР. Сер. матем. – 1962. – Т. 26. – № 1. – С. 87–106.
2. Гаркави А.Л. *О чебышевском центре и выпуклой оболочке множества* // УМН. – 1962. – Т. 19. – Вып. 6. – С. 139–145.
3. Белобров П.К. *К вопросу о чебышевском центре множества* // Изв. вузов. Математика. – 1964. – № 1. – С. 3–9.
4. Белобров П.К. *О чебышевской точке системы множеств* // Изв. вузов. Математика. – 1966. – № 6. – С. 18–24.
5. Широков П.А. *Краткий очерк основ геометрии Лобачевского.* – М.: Наука, 1983. – 77 с.
6. Энгелькинг Р. *Общая топология.* – М.: Мир, 1986. – 751 с.

Казанский государственный
педагогический университет

Поступила
06.05.1998