ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2005 МАТЕМАТИКА № 1 (512)

УДК 517.958:532.546

О.А. ЗАДВОРНОВ

ИССЛЕДОВАНИЕ НЕЛИНЕЙНОЙ СТАЦИОНАРНОЙ ЗАДАЧИ ФИЛЬТРАЦИИ ПРИ НАЛИЧИИ ТОЧЕЧНОГО ИСТОЧНИКА

Введение

Данная работа посвящена исследованию математической модели нелинейной стационарной задачи фильтрации несжимаемой жидкости в произвольной ограниченной области при наличии точечного источника, в частности, задачи фильтрации с предельным градиентом сдвига. Относительно функции, определяющей закон фильтрации, предполагается, что она имеет линейный рост на бесконечности. В случае, когда область имеет специальный вид, указанная задача имеет решение (напр., [1], [2]). В [3] в случае произвольной ограниченной области устанавливается существование обобщенного решения задачи с законом фильтрации, задаваемым функцией, имеющей степенной (в том числе и линейный) рост на бесконечности. При этом обобщенная задача формулируется в виде уравнения с оператором, действующим из соболевского пространства ($\overset{\circ}{W}{}_2^{(1)}(\Omega)$ — в случае линейного роста, Ω — область фильтрации) в сопряженное к нему, и соответственно рассматривается ситуация, когда функция, описывающая плотность внешних источников, определяет линейный, непрерывный функционал над соболевским пространством. В данной работе используется подход, примененный в [3], для исследования нелинейного стационарного уравнения фильтрации с менее гладкой правой частью: в неодномерном случае дельта-функция, моделирующая точечный источник, не принадлежит пространству, сопряженному к $\overset{\circ}{W}{}_2^{(1)}(\Omega)$.

1. Формулировка вариационной задачи

Рассматривается стационарная задача фильтрации несжимаемой жидкости, следующей нелинейному закону фильтрации
$$w = -g(|\nabla v|)|\nabla v|^{-1}\nabla v,$$
где w — поле скоростей фильтрации, v — поле давлений жидкости. Фильтрация происходит в области $\Omega \subset R^n$, $n \geq 2$, с липшиц-непрерывной границей Γ, на которой давление считается равным нулю, при наличии точечного источника с интенсивностью q в начале координат (считаем, что начало координат — внутренняя точка Ω). Указанный процесс фильтрации описывается следующей краевой задачей:
$$-\mathrm{div}\left(\frac{g(|\nabla v(x)|)}{|\nabla v(x)|}\nabla v(x)\right) = q\delta(x), \quad x \in \Omega, \tag{1}$$
$$v(x) = 0, \quad x \in \Gamma. \tag{2}$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (коды проектов №№ 03-01-00380, 04-01-00821) и Конкурсного центра фундаментального естествознания Министерства образования и науки Российской Федерации (код проекта № Е02-1.0-189).

Считаем, что функция g, определяющая закон фильтрации, представима в виде

$$g(s) = \begin{cases} 0, & s < s_0; \\ g^*(s - s_0), & s \geq s_0, \end{cases} \tag{3}$$

$s_0 \geq 0$ — заданное число (случай $s_0 > 0$ соответствует закону фильтрации с начальным градиентом s_0). Относительно функции $g^* : [0, +\infty) \to R^1$ предполагаются выполненными условия

$$g^*(0) = 0, \quad g^*(s) > g^*(t) \quad \forall s > t \geq 0, \tag{4}$$

$$\exists k > 0, \ s^* \geq 0 : g^*(s^*) \geq ks^*, \quad g^*(s) - g^*(t) \geq k(s - t) \quad \forall s \geq t \geq s^*, \tag{5}$$

$$\exists L > 0 : g^*(s) - g^*(t) \leq L(s - t) \quad \forall s \geq t \geq 0. \tag{6}$$

Определим по функции g оператор $G : R^n \to R^n$ следующим образом:

$$Gy = \begin{cases} g(|y|)|y|^{-1}y, & y \neq 0; \\ 0, & y = 0. \end{cases} \tag{7}$$

Под решением задачи (1), (2) будем понимать такую функцию $v \in \overset{\circ}{W}{}_1^{(1)}(\Omega)$, что выполнено следующее вариационное равенство:

$$\int_\Omega (G(\nabla v(x)), \nabla \eta(x))dx = q\eta(0) \quad \forall \eta \in C_0^\infty(\Omega). \tag{8}$$

2. Существование обобщенного решения

Исследуем сначала частный случай задачи (8) при $\Omega = B_r = \{x \in R^n : |x| < r\}$, $\Gamma = S_r = \{x \in R^n : |x| = r\}$. Пусть требуется

$$\text{найти} \ \ v \in \overset{\circ}{W}{}_1^{(1)}(B_r) : \int_{B_r} (G(\nabla v(x)), \nabla \eta(x))dx = q\eta(0) \quad \forall \eta \in C_0^\infty(B_r). \tag{9}$$

Решение задачи (9) можно записать в явном виде [1]. С этой целью введем обратную к g^* функцию h^*. Из условий (4)–(6) следует, что такая функция существует, непрерывна и удовлетворяет следующим неравенствам:

$$\begin{aligned} &h^*(s) - h^*(t) \geq L^{-1}(s - t) \quad \text{при} \ \ s \geq t \geq 0, \\ &h^*(s) - h^*(t) \leq k^{-1}(s - t) \quad \text{при} \ \ s \geq t \geq h(s^*). \end{aligned} \tag{10}$$

Определим функцию

$$h(s) = h^*(s) + s^* \tag{11}$$

и введем функцию

$$p_r(s) = \int_s^r h\left(\frac{q}{\sigma_1 \xi^{(n-1)}}\right) d\xi, \quad \text{где} \ \ \sigma_1 = \operatorname{mes} S_1.$$

Убедимся, что функция $v_r : B_r \to R^1$, $v_r(x) = p_r(|x|)$, является решением задачи (9).

При $x \neq 0$ имеем

$$\nabla v_r(x) = \frac{x}{|x|} h\left(\frac{q}{\sigma_1 |x|^{(n-1)}}\right).$$

Из (10), (11) следует, что существует такое $C > 0$, при котором выполнена оценка

$$h(s) \leq k^{-1}s + C \quad \text{при} \ \ s \geq 0.$$

Используя это неравенство, получаем

$$|\nabla v_r(x)| \leq \frac{q}{\sigma_1 k |x|^{(n-1)}} + C, \tag{12}$$

а значит, $v_r \in \overset{\circ}{W}{}_1^{(1)}(B_r)$.

Далее, из (3) и (11) при $s > 0$ следует равенство $g(h(s)) = s$, в силу которого

$$\int_{B_r} (G(\nabla v(x)), \nabla\eta(x))dx = \int_{B_r} -q\frac{(x, \nabla\eta(x))}{\sigma_1 |x|^n} dx = q\eta(0) \quad \forall \eta \in C_0^\infty(B_r).$$

Выберем r настолько большим, что $\Omega \subseteq B_r$. Поскольку точка 0 является внутренней для Ω, то найдется такое $\varepsilon > 0$, что $\Gamma \subset B_r \setminus B_\varepsilon$. Из неравенства (12) следует $v_r \in W_2^{(1)}(B_r \setminus B_\varepsilon)$ и, таким образом, найдется функция $v_\Gamma \in W_2^{(1)}(\Omega)$, для которой выполнено условие

$$v_\Gamma(x) = -v_r(x), \quad x \in \Gamma.$$

Решение задачи (8) будем искать в виде $v = v_r + v_\Gamma + u$, где $u \in \overset{\circ}{W}{}_2^{(1)}(\Omega)$ — неизвестная функция. Поскольку $C_0^\infty(\Omega) \subseteq C_0^\infty(B_r)$, то с учетом равенства (9) задача (8) сводится к следующей:

$$\begin{gathered}\text{найти такую функцию } u \in \overset{\circ}{W}{}_2^{(1)}(\Omega), \text{ что будет выполняться равенство} \\ \int_\Omega (G(\nabla(v_r + v_\Gamma + u)) - G(\nabla v_r), \nabla\eta)\, dx = 0 \quad \forall \eta \in C_0^\infty(\Omega).\end{gathered} \tag{13}$$

Известна

Лемма 1 ([4]). *Оператор G, определенный в (7), удовлетворяет условию*

$$|Gy - Gz|^2 \le L(Gy - Gz, y - z) \quad \forall y, z \in R^n, \tag{14}$$

т. е. G — обратно сильно монотонный с константой $1/L > 0$ и, следовательно, липшиц-непрерывный с константой L.

Лемма 2. *Пусть для функции $g_0 : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ существуют такие $\mu > 0$ и $s_* \ge 0$, что выполнены неравенства*

$$g_0(s) - g_0(t) \ge \mu(s - t) \quad \text{при} \quad s \ge t \ge s_*, \tag{15}$$

$$g_0(s_*) \ge \mu s_*, \quad 0 \le g_0(s) \le g_0(s_*) \quad \text{при} \quad 0 \le s \le s_*. \tag{16}$$

Тогда оператор G_0, определенный по функции g_0 в соответствии с (7), удовлетворяет неравенству

$$(G_0 y - G_0 z, y - z) \ge \mu|y - z|^2 - 2c|y - z| \quad \forall y, z \in R^n, \tag{17}$$

и, следовательно, для произвольного $\varepsilon \in (0, \mu)$ — неравенству

$$(G_0 y - G_0 z, y - z) \ge (\mu - \varepsilon)|y - z|^2 - c^2\varepsilon^{-1} \quad \forall y, z \in R^n, \tag{18}$$

где

$$c = \max_{0 \le s \le s_*} |g_0(s) - g_0(s_*)s_*^{-1}s| \le 2g_0(s_*). \tag{19}$$

Доказательство. Пусть

$$g_1(s) = \begin{cases} g_0(s) - g_0(s_*)s_*^{-1}s, & s < s_*; \\ 0, & s \ge s_*, \end{cases} \qquad g_2(s) = \begin{cases} g_0(s_*)s_*^{-1}s, & s < s_*; \\ g_0(s), & s \ge s_*, \end{cases}$$

и G_i, $i = 1, 2$, — соответствующие функциям $g_1(s)$, $g_2(s)$ операторы, определенные согласно (7). Из условий (15) и (16) получаем, что при $s \ge t \ge s_*$ и $s_* \ge s \ge t \ge 0$ функция g_2 удовлетворяет неравенству

$$g_2(s) - g_2(t) \ge \mu(s - t). \tag{20}$$

При $s \ge s_* \ge t \ge 0$

$$g_2(s) - g_2(t) = g_2(s) - g_2(s_*) + g_2(s_*) - g_2(t) \ge \mu(s - s_*) + \mu(s_* - t) = \mu(s - t),$$

следовательно, неравенство (20) выполнено при $s \ge t \ge 0$. В силу (20), а также неравенства Коши–Буняковского

$$(G_2 y - G_2 z, y - z) - \mu|y - z|^2 = \left(\frac{g_2(|y|)}{|y|} y - \frac{g_2(|z|)}{|z|} z, y - z\right) - \mu(y - z, y - z) =$$

$$= (g_2(|y|) - \mu|y|)|y| + (g_2(|z|) - \mu|z|)|z| - [(g_2(|y|) - \mu|y|)|z| + (g_2(|z|) - \mu|z|)|y|]\frac{(y, z)}{|y|\,|z|} \ge$$

$$\ge (g_2(|y|) - \mu|y|)|y| + (g_2(|z|) - \mu|z|)|z| - [(g_2(|y|) - \mu|y|)|z| + (g_2(|z|) - \mu|z|)|y|] =$$

$$= (|y| - |z|)[(g_2(|y|) - g_2(|z|)) - \mu(|y| - |z|)] \ge 0.$$

Таким образом, выполнено неравенство

$$(G_2 y - G_2 z, y - z) \ge \mu|y - z|^2 \quad \forall y, z \in R^n. \tag{21}$$

Из определения функции g_1 имеем $\max\limits_{s \ge 0} |g_1(s)| = \max\limits_{0 \le s \le s_*} |g_0(s) - g_0(s_*) s_*^{-1} s| = c$. Пользуясь последним равенством, получаем оценку

$$|(G_1 y - G_1 z, y - z)| \le |G_1 y|\,|y - z| + |G_1 z|\,|y - z| = (|g_1(|y|)| + |g_1(|z|)|)|y - z| \le 2c|y - z|.$$

Итак, выполнено неравенство

$$(G_1 y - G_1 z, y - z) \ge -2c|y - z| \quad \forall y, z \in R^n. \tag{22}$$

Поскольку $g_0 = g_1 + g_2$, и, значит, $G_0 = G_1 + G_2$, то из неравенств (21), (22) следует

$$(G_0 y - G_0 z, y - z) = (G_1 y - G_1 z, y - z) + (G_2 y - G_2 z, y - z) \ge \mu|y - z|^2 - 2c|y - z|,$$

т. е. (17) имеет место.

Далее, для всех $\alpha \in R^1$ и $\varepsilon > 0$ имеем неравенство $\varepsilon\alpha^2 - 2c\alpha + c^2\varepsilon^{-1} \ge 0$, следовательно для любого α справедливо $\mu\alpha^2 - 2c\alpha \ge (\mu - \varepsilon)\alpha^2 - c^2\varepsilon^{-1}$. Пользуясь последним неравенством, из (17) получаем (18). $\square$

Пусть, далее, $V = \overset{\circ}{W}{}_2^{(1)}(\Omega)$ — пространство Соболева со скалярным произведением и соответствующей ему нормой

$$(u, v)_V = \int_\Omega (\nabla u, \nabla v)dx, \quad \|u\|_V = \left[\int_\Omega |\nabla u|^2 dx\right]^{1/2}, \quad u, v \in V.$$

Определим форму $a : V \times V \to R^1$ следующим образом:

$$a(u, \eta) = \int_\Omega (G(\nabla\phi + \nabla\xi + \nabla u) - G(\nabla\phi), \nabla\eta)dx, \quad u, \eta \in V, \tag{23}$$

где G — оператор, определенный в (7), а $\phi \in W_1^{(1)}(\Omega)$, $\xi \in W_2^{(1)}(\Omega)$ — заданные функции. Форма (23) линейна по второму аргументу. В силу леммы 1 выполняется неравенство $|G(\nabla\phi + \nabla\xi + \nabla u) - G(\nabla\phi)| \le L|\nabla\xi + \nabla u|$ для всех $x \in \Omega$, следовательно

$$|a(u, \eta)| \le \left[\int_\Omega |G(\nabla\phi + \nabla\xi + \nabla u) - G(\nabla\phi)|^2 dx\right]^{1/2} \left[\int_\Omega |\nabla\eta|^2 dx\right]^{1/2} \le L\|\xi + u\|_V \|\eta\|_V < +\infty, \tag{24}$$

что означает непрерывность формы a по второму аргументу. Поэтому эта форма порождает оператор $T : V \to V$,

$$(Tu, \eta)_V = a(u, \eta) \quad \forall u, \eta \in V. \tag{25}$$

Из оценки (24) получаем

$$\|Tu\|_V^2 = (Tu, Tu)_V \le L\|\xi + u\|_V \|Tu\|_V$$

и, таким образом, выполнено неравенство $\|Tu\|_V \le L\|\xi + u\|_V$, а значит, оператор T является ограниченным.

Лемма 3. *Оператор T, определенный в (25), удовлетворяет условию*

$$\|Tu - Tv\|_V^2 \le L(Tu - Tv, u - v)_V \quad \forall u, v \in V, \tag{26}$$

т. е. T — обратно сильно монотонный оператор с константой $1/L > 0$.

Доказательство. Из определений (23), (25) и неравенства (14) вытекает

$$L(Tu - Tv, u - v)_V = \int_\Omega L(G(\nabla\phi + \nabla\xi + \nabla u) - G(\nabla\phi + \nabla\xi + \nabla v), \nabla u - \nabla v)dx \ge$$
$$\ge \int_\Omega |G(\nabla\phi + \nabla\xi + \nabla u) - G(\nabla\phi + \nabla\xi + \nabla v)|^2 dx \quad \forall u, v \in V. \tag{27}$$

С другой стороны,

$$|(Tu - Tv, \eta)_V| = \left| \int_\Omega (G(\nabla\phi + \nabla\xi + \nabla u) - G(\nabla\phi + \nabla\xi + \nabla v), \nabla\eta)dx \right| \le$$
$$\le \left[\int_\Omega |G(\nabla\phi + \nabla\xi + \nabla u) - G(\nabla\phi + \nabla\xi + \nabla v)|^2 dx \right]^{1/2} \left[\int_\Omega |\nabla\eta|^2 dx \right]^{1/2}.$$

Выберем в предыдущем неравенстве $\eta = Tu - Tv$, тогда получим

$$\|Tu - Tv\|_V^2 \le \left[\int_\Omega |G(\nabla\phi + \nabla\xi + \nabla u) - G(\nabla\phi + \nabla\xi + \nabla v)|^2 dx \right]^{1/2} \|Tu - Tv\|_V.$$

Таким образом,

$$\|Tu - Tv\|_V^2 \le \int\limits_\Omega |G(\nabla\phi + \nabla\xi + \nabla u) - G(\nabla\phi + \nabla\xi + \nabla v)|^2 dx,$$

и, пользуясь неравенством (27), получаем (26). □

Лемма 4. *Пусть $s_* = s_0 + s^*$, $\mu = ks^*/s_*$, тогда для произвольного $\varepsilon \in (0, \mu)$ оператор T, определенный в (25), удовлетворяет для любых $u, v \in V$ неравенству*

$$(Tu, u - v) \ge (\mu - \varepsilon)\|\xi + u\|_V^2 - c^2\varepsilon^{-1} \operatorname{mes}\Omega - L\|\xi + u\|_V(\|\xi\|_V + \|v\|_V), \tag{28}$$

где константа c определена по функции g в соответствии с (19).

Доказательство. Имеем

$$(Tu, u) = \int_\Omega (G(\nabla\phi + \nabla\xi + \nabla u) - G(\nabla\phi), \nabla u + \nabla\xi)dx - \int_\Omega (G(\nabla\phi + \nabla\xi + \nabla u) - G(\nabla\phi), \nabla\xi)dx.$$

Функция g, определенная правилом (3), в силу условия (5) удовлетворяет неравенствам (15), (16) с константами μ, s_*, определенными в условии леммы. Поэтому, пользуясь леммой 3, получаем неравенство

$$\int_\Omega (G(\nabla\phi + \nabla\xi + \nabla u) - G(\nabla\phi), \nabla\phi + \nabla\xi + \nabla u - \nabla\phi)dx \ge$$
$$\ge \int_\Omega [(\mu - \varepsilon)|\nabla\xi + \nabla u|^2 - c^2\varepsilon^{-1}]dx = (\mu - \varepsilon)\|\xi + u\|_V^2 - c^2\varepsilon^{-1} \operatorname{mes}\Omega \quad \forall u \in V. \tag{29}$$

Из оценки (24) получаем

$$\left| \int_\Omega (G(\nabla\phi + \nabla\xi + \nabla u) - G(\nabla\phi), \nabla\xi) dx \right| \leq L\|\xi + u\|_V \|\xi\|_V, \quad (30)$$

следовательно,

$$|(Tu, v)| \leq L\|\xi + u\|_V \|v\|_V \quad \forall u, v \in V. \quad (31)$$

Из неравенств (29), (30), (31) следует (28). □

Основным результатом данной работы является

Теорема. *Пусть выполнены условия* (4)–(6). *Тогда*

1) *задача* (13) *имеет по крайней мере одно решение* v,
2) *множество решений выпукло и замкнуто в пространстве* $\overset{\circ}{W}{}_2^{(1)}(\Omega)$,
3) *скорость фильтрации*

$$w = -g(|\nabla v|)|\nabla v|^{-1}\nabla v = G(\nabla(v_r + v_\Gamma + u))$$

определяется единственным образом.

Доказательство. Положим в определении оператора T (см. (23), (25)) функции ϕ, ξ равными соответственно v_r и v_Γ, тогда задача (13) эквивалентна операторному уравнению

$$Tu = 0. \quad (32)$$

Из леммы 3 следует монотонность и липшиц-непрерывность, а из леммы 4 — коэрцитивность оператора T. Таким образом, существование решения уравнения (32) следует из ([5], с. 95, теорема 2.1).

Пусть u_1, u_2 — два решения задачи (13), тогда из (27) получаем неравенство

$$\int_\Omega |G(\nabla(v_r + v_\Gamma + u_1)) - G(\nabla(v_r + v_\Gamma + u_2))|^2 dx \leq 0,$$

справедливость третьего утверждения теоремы. □

Литература

1. Бернандинер М.Г., Ентов В.М. *Гидродинамическая теория аномальных жидкостей.* – М.: Наука, 1975. – 199 с.
2. Мифтахутдинов Б.А., Молокович Ю.М., Скворцов Э.В. *Некоторые вопросы плоской стационарной нелинейной фильтрации* // В сб. Проблемы гидродинамики и рациональной разработки нефтяных месторождений. – Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 1971. – С. 51–70.
3. Ляшко А.Д., Карчевский М.М. *О решении некоторых нелинейных задач теории фильтрации* // Изв. вузов. Математика. – 1975. – № 6. – С. 73–81.
4. Глушенков В.Д. *Об одном уравнении нелинейной теории фильтрации* // Прикладная математика в научно-технических задачах. – Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 1976. – С. 12–21.
5. Гаевский Х., Грегер К., Захариас К. *Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения.* – М.: Мир, 1978. – 336 с.

Казанский государственный университет

Поступила 27.08.2004