Известия вузов. Математика
2014, № 6, с. 78–83
http://old.kpfu.ru/journals/izv_vuz/
e-mail: izvuz.matem@kpfu.ru

Краткое сообщение, представленное Р.Б. Салимовым

Р.М. САФИНА

КРИТЕРИЙ ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ С ОСЕВОЙ СИММЕТРИЕЙ ДЛЯ ТРЕХМЕРНОГО УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА С ОПЕРАТОРОМ БЕССЕЛЯ

Аннотация. Для трехмерного уравнения смешанного типа с оператором Бесселя методом спектральных разложений установлен критерий единственности решения задачи Дирихле.

Ключевые слова: уравнение смешанного типа, оператор Бесселя, задача Дирихле, спектральный метод, единственность.

УДК: 517.95

1. Постановка задачи. Рассмотрим уравнение смешанного типа второго рода
$$T_B u \equiv B_{x_1} u + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + (\operatorname{sgn} x_3)|x_3|^m \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2} - a^2 u = 0 \tag{1}$$
в полуцилиндре $D = \{(x_1, x_2, x_3) | x_1^2 + x_2^2 < 1,\ x_1 > 0,\ -\alpha < x_3 < \beta\}$, где $a > 0$, $0 < m < 2$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$ — заданные действительные числа, $B_{x_1} = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{k}{x_1}\frac{\partial}{\partial x_1}$, $k > 0$, — оператор Бесселя.

Исследование вопросов о корректности краевых задач для уравнения (1) в полуцилиндре D проще всего проводить в цилиндрических координатах (ρ, φ, z), связанных с декартовыми координатами по формулам $x_1 = \rho\cos\varphi$, $x_2 = \rho\sin\varphi$, $x_3 = z$, $(0 \le \varphi \le \pi)$.

Уравнение (1) в цилиндрических координатах с осевой симметрией (при $\frac{\partial u}{\partial \varphi} = 0$) принимает вид
$$T_B u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{k+1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \rho} + (\operatorname{sgn} z)|z|^m \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - a^2 u = 0. \tag{2}$$

Задача Дирихле с осевой симметрией. Найти в области D функцию $u(\rho, z)$, удовлетворяющую условиям
$$u(\rho, z) \in C^2(D^+ \cup D^-) \cap C(\overline{D}), \tag{3}$$
$$T_B u(\rho, z) \equiv 0, \quad (\rho, z) \in D^+ \cup D^-, \tag{4}$$
$$\frac{\partial u}{\partial \rho}\Big|_{\rho=0} = 0, u|_{\rho=1} = 0, \quad -\alpha \le z \le \beta, \tag{5}$$
$$u|_{z=-\alpha} = \psi(\rho), u|_{z=\beta} = \varphi(\rho), \quad 0 \le \rho \le 1, \tag{6}$$
$$\lim_{z\to 0+0} u_z(\rho, z) = \lim_{z \to 0-0} u_z(\rho, z), \quad 0 < \rho < 1, \quad 0 < m < 1, \tag{7}$$

Поступила 05.12.2013

$$\lim_{z\to 0+0} z^{m-1}u_z = -\lim_{z\to 0-0}(-z)^{m-1}u_z, \quad 0<\rho<1, \quad 1<m<2, \tag{8}$$

$$\lim_{z\to 0+0} \frac{u_z(\rho,z)}{\ln z} = -\lim_{z\to 0-0}\frac{u_z(\rho,z)}{\ln(-z)}, \quad 0<\rho<1, \quad m=1, \tag{9}$$

где ψ и φ — заданные достаточно гладкие функции.

В работах [1]–[3] для уравнений смешанного типа

$$u_{xx} + (\operatorname{sgn} y)|y|^m u_{yy} - b^2 u = 0, \quad 0<m<2, \quad b=\mathrm{const}\geq 0,$$

$$u_{xx} + y u_{yy} + a u_y - b^2 u = 0, \quad 0<a<1, \quad b=\mathrm{const}\geq 0,$$

$$(\operatorname{sgn} t)|t|^n u_{xx} + x^m u_{tt} - b^2 x^m (\operatorname{sgn} t)|t|^n u = 0, \quad n>0, \quad m>0,$$

в прямоугольной области в зависимости от значения параметров m и a изучена первая граничная задача.

В данной работе, следуя [1]–[3], на основании свойства полноты системы собственных функций одномерной спектральной задачи установим критерий единственности решения задачи (3)–(9) в зависимости от значения параметра m при всех $k>0$.

Система частных решений уравнения (2) при $0<m<2$ на множестве $D^+\cup D^-$ определяется по формулам [3], [4]

$$u_n(\rho,z) = R_n(\rho)Z_n(z), \quad n=1,2,3,\dots\ . \tag{10}$$

Здесь

$$R_n(\rho) = \rho^{-k/2}J_{k/2}(\lambda_n\rho), \quad n=1,2,3,\dots, \tag{11}$$

являются собственными функциями спектральной задачи

$$R'' + \frac{k+1}{\rho}R' + \lambda^2 R = 0, \quad 0<\rho<1, \tag{12}$$

$$R'(0)=0, R(1)=0, \tag{13}$$

$\lambda=\lambda_n$ — собственные значения этой задачи, которые определяются как корни уравнения $J_{k/2}(\lambda)=0$ ([5], с. 354);

$$Z_n(z) = \begin{cases} Z_n^+(z) = a_n\sqrt{z}I_{1/(2q)}(p_n z^q) + b_n\sqrt{z}K_{1/(2q)}(p_n z^q), & z>0; \\ Z_n^-(z) = c_n\sqrt{-z}J_{1/(2q)}(p_n(-z)^q) + d_n\sqrt{-z}Y_{1/(2q)}(p_n(-z)^q), & z<0, \end{cases} \tag{14}$$

где $I_{1/(2q)}(\xi)$ и $K_{1/(2q)}(\xi)$ — модифицированные функции Бесселя соответственно первого и третьего родов, $J_{1/(2q)}(\xi)$ и $Y_{1/(2q)}(\xi)$ — функции Бесселя соответственно первого и второго родов; a_n, b_n, c_n и d_n — произвольные постоянные, $qp_n = \sqrt{a^2+\lambda_n^2} = \mu_n$, $q=(2-m)/2$.

2. Случай $0<m<1$**.** С учетом класса решений (3) и (7) в формуле (14) подберем постоянные a_n, b_n, c_n и d_n так, чтобы выполнялись следующие условия сопряжения:

$$Z_n(0+0) = Z_n(0-0), Z_n'(0+0) = Z_n'(0-0). \tag{15}$$

На основании работ [3], [4] первое из равенств (15) имеет место, если $d_n=-\pi b_n/2$ и a_n, b_n любые, а второе равенство выполнено при $d_n=-\pi b_n/2$ и $c_n = \pi b_n \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4q}\right)/2 - a_n$. Тогда функции (14) примут вид

$$Z_n(z) = \begin{cases} Z_n^+(z) = a_n\sqrt{z}I_{1/(2q)}(p_n z^q) + b_n\sqrt{z}K_{1/(2q)}(p_n z^q), & z>0; \\ Z_n^-(z) = -a_n\sqrt{-z}J_{1/(2q)}(p_n(-z)^q) + b_n\sqrt{-z}\overline{Y}_{1/(2q)}(p_n(-z)^q), & z<0, \end{cases} \tag{16}$$

где
$$\overline{Y}_{\frac{1}{2q}}(p_n(-z)^q)=\frac{\pi}{2}\frac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{2q}\right)}\big(J_{1/(2q)}(p_n(-z)^q)+J_{-1/(2q)}(p_n(-z)^q)\big).$$

Пусть $u(\rho,z)$ — решение задачи (3)–(7). На основании
$$u_n(z)=\int_0^1 u(\rho,z)\rho^{k+1}R_n(\rho)d\rho,\quad n=1,2,3,\ldots,\tag{17}$$
введем вспомогательные функции
$$u_{n,\varepsilon}(z)=\int_\varepsilon^{1-\varepsilon} u(\rho,z)\rho^{k+1}R_n(\rho)d\rho,\tag{18}$$
где $\varepsilon>0$ — достаточно малое число. Дифференцируя равенство (18) по z дважды при $z\in(-\alpha,0)\cup(0,\beta)$ и учитывая уравнение (2), имеем
$$u''_{n,\varepsilon}=\int_\varepsilon^{1-\varepsilon} u_{zz}(\rho,z)\rho^{k+1}R_n(\rho)d\rho=(\operatorname{sgn} z)|z|^{-m}\int_\varepsilon^{1-\varepsilon}\left(a^2u-u_{\rho\rho}-\frac{k+1}{\rho}u_\rho\right)\rho^{k+1}R_n(\rho)d\rho=$$
$$=(\operatorname{sgn} z)|z|^{-m}\left[a^2u_{n,\varepsilon}(z)-\int_\varepsilon^{1-\varepsilon}\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho^{k+1}u_\rho)R_n(\rho)d\rho\right]=$$
$$=(\operatorname{sgn} z)|z|^{-m}\left[a^2u_{n,\varepsilon}(z)-\left(\rho^{k+1}u_\rho R_n(\rho)\Big|_\varepsilon^{1-\varepsilon}-\int_\varepsilon^{1-\varepsilon}\rho^{k+1}u_\rho R'_n(\rho)d\rho\right)\right].\tag{19}$$

Из равенства (18) в силу уравнения (12) получим
$$u_{n,\varepsilon}=-\frac{1}{\lambda_n^2}\int_\varepsilon^{1-\varepsilon}u(\rho,z)\rho^{k+1}\left(R''_n+\frac{k+1}{\rho}R'_n\right)d\rho=-\frac{1}{\lambda_n^2}\int_\varepsilon^{1-\varepsilon}u(\rho,z)\frac{d}{d\rho}(\rho^{k+1}R'_n)d\rho=$$
$$=-\frac{1}{\lambda_n^2}\left[\rho^{k+1}R'_nu\Big|_\varepsilon^{1-\varepsilon}-\int_\varepsilon^{1-\varepsilon}u_\rho\rho^{k+1}R'_nd\rho\right].\tag{20}$$

Из равенства (20) найдем
$$\int_\varepsilon^{1-\varepsilon}u_\rho\rho^{k+1}R'_n(\rho)d\rho=\lambda_n^2u_{n,\varepsilon}(z)-\rho^{k+1}R'_nu\Big|_\varepsilon^{1-\varepsilon}.\tag{21}$$

Подставляя (21) в (19), получим
$$u''_{n,\varepsilon}=(\operatorname{sgn} z)|z|^{-m}[a^2u_{n,\varepsilon}(z)-\rho^{k+1}u_\rho R_n(\rho)|_\varepsilon^{1-\varepsilon}-\lambda_n^2u_{n,\varepsilon}(z)-\rho^{k+1}R'_nu|_\varepsilon^{1-\varepsilon}].$$

Переходя здесь к пределу при $\varepsilon\to0$, с учетом граничных условий (6) и (13) получим, что $u_n(z)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению
$$u''_n(z)-(\operatorname{sgn} z)|z|^{-m}(a^2+\lambda_n^2)u_n(z)=0, z\in(-\alpha,0)\cup(0,\beta).\tag{22}$$
Решения уравнения (22), удовлетворяющие условиям сопряжения (15), определяются по формуле (16), т. е. $u_n(z)\equiv Z_n(z)$. Для нахождения постоянных a_n и b_n воспользуемся граничными условиями (6) и формулой (17):
$$u_n(\beta)=\int_0^1 u(\rho,\beta)\rho^{k+1}R_n(\rho)d\rho=\int_0^1\varphi(\rho)\rho^{k+1}R_n(\rho)d\rho=\varphi_n,\tag{23}$$
$$u_n(-\alpha)=\int_0^1 u(\rho,-\alpha)\rho^{k+1}R_n(\rho)d\rho=\int_0^1\psi(\rho)\rho^{k+1}R_n(\rho)d\rho=\psi_n.\tag{24}$$

Теперь, удовлетворяя функции (16) граничным условиям (23) и (24), получим систему для неизвестных коэффициентов a_n и b_n:

$$\begin{aligned} a_n I_{1/(2q)}(p_n\beta^q) + b_n K_{1/(2q)}(p_n\beta^q) &= \varphi_n \beta^{-1/2}, \\ -a_n J_{1/(2q)}(p_n\alpha^q) + b_n \overline{Y}_{1/(2q)}(p_n\alpha^q) &= \psi_n \alpha^{-1/2}. \end{aligned} \tag{25}$$

Если определитель системы (25) при всех $n \in \mathbb{N}$

$$\triangle_n(\alpha,\beta) = J_{1/(2q)}(p_n\alpha^q) \cdot K_{1/(2q)}(p_n\beta^q) + I_{1/(2q)}(p_n\beta^q) \cdot \overline{Y}_{1/(2q)}(p_n\alpha^q) \neq 0, \tag{26}$$

то данная система имеет единственное решение

$$a_n = \frac{\varphi_n\sqrt{\alpha}\,\overline{Y}_{1/(2q)}(p_n\alpha^q) - \psi_n\sqrt{\beta}\,K_{1/(2q)}(p_n\beta^q)}{\triangle_n(\alpha,\beta)\sqrt{\alpha\beta}},$$

$$b_n = \frac{\varphi_n\sqrt{\alpha}\,J_{1/(2q)}(p_n\alpha^q) + \psi_n\sqrt{\beta}\,I_{1/(2q)}(p_n\beta^q)}{\triangle_n(\alpha,\beta)\sqrt{\alpha\beta}}.$$

Тогда функции $u_n(z)$ примут вид

$$u_n(z) = \begin{cases} \frac{\varphi_n\sqrt{\alpha z}\triangle_n(\alpha,z) + \psi_n\sqrt{\beta z}M_n(z,\beta)}{\triangle_n(\alpha,\beta)\sqrt{\alpha\beta}}, & z > 0; \\ \frac{\varphi_n\sqrt{-\alpha z}N_n(\alpha,-z) + \psi_n\sqrt{-\beta z}\triangle_n(-z,\beta)}{\triangle_n(\alpha,\beta)\sqrt{\alpha\beta}}, & z < 0, \end{cases} \tag{27}$$

где

$$M_n(z,\beta) = I_{1/(2q)}(p_n\beta^q) \cdot K_{1/(2q)}(p_n z^q) - I_{1/(2q)}(p_n z^q) \cdot K_{1/(2q)}(p_n\beta^q),$$

$$N_n(\alpha,-z) = \overline{Y}_{1/(2q)}(p_n(-z)^q) \cdot J_{1/(2q)}(p_n\alpha^q) - \overline{Y}_{1/(2q)}(p_n\alpha^q) J_{1/(2q)}(p_n(-z)^q),$$

$$\triangle_n(\alpha,z) = \overline{Y}_{1/(2q)}(p_n\alpha^q) \cdot I_{1/(2q)}(p_n z^q) + J_{1/(2q)}(p_n\alpha^q) K_{1/(2q)}(p_n z^q),$$

$$\triangle_n(-z,\beta) = I_{1/(2q)}(p_n\beta^q) \cdot \overline{Y}_{1/(2q)}(p_n(-z)^q) + J_{1/(2q)}(p_n(-z)^q) K_{1/(2q)}(p_n\beta^q).$$

Пусть теперь $\varphi(\rho) \equiv 0$ и $\psi(\rho) \equiv 0$ и выполнены условия (26). Из равенств (23), (24) и (27) следует $u_n(z) \equiv 0$ при всех $n \in \mathbb{N}$. Тогда из (17) получим

$$\int_0^1 u(\rho,z)\rho^{k+1}R_n(\rho)d\rho = 0, \quad n = 1,2,\dots\ .$$

Отсюда в силу полноты системы (11) в пространстве $L_2[0,1]$ с весом ρ^{k+1} следует $u(\rho,z) = 0$ почти для всех $\rho \in [0,1]$ и при любом $z \in [-\alpha,\beta]$. Поскольку $u(\rho,z) \in C(\overline{D})$, то $u(\rho,z) \equiv 0$ в $\overline{D}$.

Пусть при некоторых α, β и $n = s \in N$ нарушено условие (26), т. е. $\triangle_s(\alpha,\beta) = 0$. Тогда однородная задача (3)–(7) (где $\varphi(\rho) \equiv \psi(\rho) \equiv 0$) имеет нетривиальное решение

$$u_s(\rho,z) = \begin{cases} \frac{\triangle_s(\alpha,z)\sqrt{z}}{J_{1/(2q)}(p_s\alpha^q)}R_s(\rho), & z > 0; \\ \frac{\triangle_s(-z,\beta)\sqrt{-z}}{I_{1/(2q)}(p_s\beta^q)}R_s(\rho), & z < 0. \end{cases}$$

Существование нулей $\Delta_n(\alpha,\beta)$ относительно $\alpha_q = \alpha^q/q$ следует из того, что функции $J_{1/(2q)}(\mu_n t)$ и $\overline{Y}_{1/(2q)}(\mu_n t)$, $t = \alpha_q$, являются линейно независимыми решениями уравнения Бесселя

$$y''(t) + \frac{1}{t}y'(t) + \left[\mu_n^2 - \left(\frac{1}{2qt}\right)^2\right]y(t) = 0. \tag{28}$$

Отсюда функции $J_{1/(2q)}(\mu_n t)$ и $\Delta_n((tq)^{1/q},\beta)$ также являются линейно независимыми решениями уравнения (28). Из общей теории линейных дифференциальных уравнений известно, что нули двух линейно независимых решений уравнения Бесселя строго чередуются, т. е. на интервале между любыми последовательными нулями любого из этих решений содержится ровно один нуль другого решения. Функция $J_{1/(2q)}(\mu_n t)$ имеет счетное множество положительных нулей. Тогда функция $\Delta_n((tq)^{1/q},\beta)$ также имеет счетное множество положительных нулей.

Таким образом, установлен следующий критерий единственности.

Теорема 1. *Если существует решение задачи* (3)–(7)*, то оно единственно тогда и только тогда, когда выполнены условия* (26) *при всех* $n\in\mathbb{N}$.

3. Случай $1<m<2$**.** Имеем задачу (3)–(6), (8). С учетом класса решений (3) и (8) в формуле (14) подберем постоянные a_n, b_n, c_n и d_n так, чтобы выполнялись условия сопряжения

$$Z_n(0+0)=Z_n(0-0),\quad \lim_{z\to 0+0} z^{m-1}Z'_n(z)=-\lim_{z\to 0-0}(-z)^{m-1}Z'_n(z). \tag{29}$$

Первое из равенств (29) имеет место, если $b_n=-\frac{2}{\pi}d_n$ с любыми a_n и c_n, а второе равенство выполнено при $b_n=\frac{2}{\pi}d_n$ и любых a_n и c_n. Следовательно, $b_n=d_n=0$, a_n и c_n — любые постоянные. Тогда из формулы (14) получим

$$Z_n(z)=\begin{cases} Z_n^+(z)=a_n\sqrt{z}I_{1/(2q)}(p_n z^q), & z>0;\\ Z_n^-(z)=c_n\sqrt{-z}J_{1/(2q)}(p_n(-z)^q), & z<0.\end{cases} \tag{30}$$

Теперь, удовлетворяя функции (30) граничным условиям (23) и (24), найдем неизвестные коэффициенты

$$a_n=\varphi_n/[\sqrt{\beta}I_{1/(2q)}(p_n\beta^q)],\quad c_n=\psi_n/[\zeta_n(\alpha)\sqrt{\alpha}] \tag{31}$$

при условии

$$\zeta_n(\alpha)=J_{1/(2q)}(p_n\alpha^q)\neq 0,\quad n\in\mathbb{N}. \tag{32}$$

Тогда с учетом (31)

$$u_n(z)=\begin{cases} \frac{\sqrt{z}\,\varphi_n I_{1/(2q)}(p_n z^q)}{\sqrt{\beta}\,I_{1/(2q)}(p_n\beta^q)}, & z>0;\\ \frac{\sqrt{-z}\,\psi_n J_{1/(2q)}(p_n(-z)^q)}{\sqrt{\alpha}\,\zeta_n(\alpha)}, & z<0.\end{cases} \tag{33}$$

На основании (33) аналогично п. 2 доказывается

Теорема 2. *Если существует решение задачи* (3)–(6), (8)*, то оно единственно тогда и только тогда, когда выполнены условия* (32) *при всех* $n\in\mathbb{N}$.

4. Случай $m=1$**.** Постоянные a_n, b_n, c_n и d_n в (14) подбираются так, чтобы выполнялись условия сопряжения

$$Z_n(0+0)=Z_n(0-0),\quad \lim_{z\to 0+0}\frac{Z_n'^{+}(z)}{\ln z}=-\lim_{z\to 0-0}\frac{Z_n'^{+}(z)}{\ln(-z)}. \tag{34}$$

Аналогично, удовлетворяя функции (14) условиям (34), построим функции $u_n(z)$, которые определяются по формулам (33) при условии (32). Только в формулах (33) и (32) нужно положить $m=1$ или $2q=1$.

Теорема 3. *Если существует решение задачи* (3)–(6), (9)*, то оно единственно тогда и только тогда, когда выполнены условия* (32) *при* $m=1$ *и всех* $n\in\mathbb{N}$.

Литература

[1] Сабитов К.Б., Сулейманова А.Х. *Задача Дирихле для уравнения смешанного типа второго рода в прямоугольной области*, Изв. вузов. Матем., № 4, 45–53 (2007).

[2] Сабитов К.Б., Сулейманова А.Х. *Задача Дирихле для уравнения смешанного типа с характеристическим вырождением в прямоугольной области*, Изв. вузов. Матем., № 11, 43–52 (2009).

[3] Сабитов К.Б., Вагапова Э.В. *Задача Дирихле для уравнения смешанного типа с двумя линиями вырождения в прямоугольной области*, Дифференц. уравнения **49** (1), 68–78 (2013).

[4] Сафина Р.М. *Задача Дирихле с осевой симметрией для уравнения смешанного B-эллиптико – B-гиперболического типа с характеристическим вырождением*, Вестн. Татарск. гуманитарно-педагогического ун-та, № 4(22), 63–69 (2010).

[5] Владимиров В.С. *Уравнения математической физики* (Физматлит, М., 1976).

Р.М. Сафина

соискатель, кафедра высшей математики и математического моделирования,
Казанский (Приволжский) федеральный университет,
ул. Кремлевская, д. 18, г. Казань, 420008, Россия,

`e-mail:` rimma77705@mail.ru

R.M. Safina

Criterion of uniqueness of solution of the Dirichlet problem with axial symmetry for tree-dimensional equation of mixed type with the Bessel operator

Abstract. By the method of spectral expansions we establish a criterion of uniqueness of the solution of the Dirichlet problem for three-dimensional mixed-type equation with the Bessel operator.

Keywords: equation of mixed type, Bessel operator, Dirichlet problem, spectral method, uniqueness.

R.M. Safina

Competitor, Chair of Higher Mathematics and Mathematical Modelling,
Kazan (Volga Region) Federal University,
18 Kremlyovskaya str., Kazan, 420008 Russia,

`e-mail:` rimma77705@mail.ru