ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1998 МАТЕМАТИКА № 6 (433)

УДК 514.796

К.В. АНДРЕЕВ

О ВНУТРЕННИХ ГЕОМЕТРИЯХ МНОГООБРАЗИЯ ПЛОСКИХ ОБРАЗУЮЩИХ 6-МЕРНОЙ КВАДРИКИ

Статья посвящена исследованию римановой связности, заданной в касательном расслоении $\tau(CV_6)$ с 6-мерной базой CV_6 — комплексно-аналитическим римановым пространством. Согласно теории, разработанной в статье [1], строится продолжение такой связности в спинорные расслоения $A^C(CV_6)$, т. е. векторные расслоения со слоями, изоморфными C^4. Этот частный случай интересен своими приложениями в теории относительности ([2], т. 2, с. 355).

Рассмотрим невырожденную квадрику CQ_6, вложенную в проективное пространство CP_7. Она может быть описана уравнением

$$G_{AB}X^AX^B = 0 \ \Leftrightarrow \ (X, X) = 0 \quad (A, B, \ldots = \overline{1, 8}). \tag{1}$$

На основании принципа тройственности Картана ([3], с. 159) многообразие точек квадрики диффеоморфно многообразию 3-х мерных плоских образующих, составляющих два семейства, базисные точки которых

$$X_a = ({X_a}^A) \quad (a, b, \ldots, i, j, \ldots, p, q, \ldots = \overline{1, 4}) \tag{2}$$

удовлетворяют уравнению (1)

$$(X_a, X_b) = 0. \tag{3}$$

Определим плоскую образующую ее матричной координатой $Z = (Z_a^p)$ [4]:

$$X_a := A_a + B_pZ_a^p, \quad (A_a, B_p) := d_{ap}, \quad B^a := d^{ap}B_p, \tag{4}$$

тогда из (3) следует

$$Z_{ab} = -Z_{ba}, \quad Z_{ab} := d_{ap}Z_a^p. \tag{5}$$

Это означает, что X_a зависит от шести комплексных параметров. Рассмотрим многообразие M плоских образующих максимальной размерности квадрики CQ_6. Обозначим через RM действительную реализацию такого многообразия. Как известно [1], нормализация многообразия RM определяется заданием такого вещественного дифференциального соответствия между плоскими образующими максимальной размерности квадрики CQ_6:

$$f : CP_3(X_a) \to CP_3(Y_p), \tag{6}$$

что образующей $CP_3(X_a)$ соответствует плоскость $CP_3(Y_p)$, не пересекающаяся с первой. Для 6-мерной квадрики эти плоские образующие необходимо принадлежат одному семейству. Тогда расслоение $A^C(RM)$ можно построить следующим образом. В качестве базы возьмем многообразие RM, а в качестве слоев над каждой точкой многообразия RM согласно принципу тройственности рассмотрим векторное пространство C^4, представляющее плоскую образующую максимальной размерности конуса (1). Потребуем, чтобы соответствие (6) описывало только *гармоническую* нормализацию. В локальных координатах такая нормализация определяется параметрическими уравнениями

$$X_a = X_a(u^\Lambda), \quad Y_a = Y_a(u^\Lambda) \quad (\Lambda, \Psi, \ldots = \overline{1,12}) \tag{7}$$

так, что выполнены соотношения

$$(X_a, X_b) = 0, \quad (Y_p, Y_q) = 0, \quad (X_a, Y_p) = c_{ap}. \tag{8}$$

Ввиду невырожденности c_{ap} можно положить

$$Y^a := c^{ap} Y_p, \quad c^{ap} c_{pb} = \delta^a_b, \quad (X_a, Y^b) = \delta^a_b. \tag{9}$$

Согласно [1] деривационные уравнения нормализованного семейства плоских образующих имеют вид

$$\nabla_\Lambda X_a = Y^b M_{\Lambda ab}, \quad \widetilde{\nabla}_\Lambda Y^b = X_a N_\Lambda{}^{ab}. \tag{10}$$

Поэтому из (8) вытекает

$$M_{\Lambda(ab)} = 0, \quad N_\Lambda{}^{(ab)} = 0, \quad \Gamma_{\Lambda a}{}^c = \widetilde{\Gamma}_{\Lambda a}{}^c, \tag{11}$$

где $\Gamma_{\Lambda a}{}^c$ — коэффициенты связности в комплексном векторном расслоении $A^C(RM)$. Отметим, что комплексное векторное расслоение A^C метризуемо, т. е. в нем можно задать поле метрического 4-вектора ε_{abcd}, кососимметричного по всем своим индексам. Гармоничность нормализации ([5], с. 209) равносильна эквиаффинности определенной выше связности и ковариантной постоянности 4-вектора ε_{abcd}:

$$\nabla_\Lambda \varepsilon_{abcd} = 0. \tag{12}$$

Это позволяет использовать его для переброски индексов. Оператор $M_{\Lambda ab}$ есть связующий оператор, который каждому бивектору слоя ставит в соответствие вещественный вектор касательного расслоения $\tau(RM)$:

$$V_{ab} := M_{\Lambda ab} V^\Lambda. \tag{13}$$

Это соответствие будет взаимнооднозначно, т. к. оператор $M_{\Lambda ab}$ невырожден. Поэтому можно определить согласно [1]

$$\begin{cases} M^{\Lambda ab} M_{\Lambda cd} = \delta^{ab}_{cd}, \\ \overline{M}^{\Lambda a' b'} M_{\Lambda cd} = 0, \end{cases} \qquad \det \left\| \begin{matrix} M_{\Lambda ab} \\ \overline{M}_{\Lambda a' b'} \end{matrix} \right\| \neq 0, \quad \delta^{ab}_{cd} = 2\delta_{[c}{}^a \delta_{d]}{}^b. \tag{14}$$

Оператор

$$\triangle_\Lambda{}^\Psi = \frac{1}{2}(\delta_\Lambda{}^\Psi + i f_\Lambda{}^\Psi) = \frac{1}{2} M_{\Lambda ab} M^{\Psi ab}, \quad f^\Psi_\Lambda M^{\Lambda cd} = -i M^{\Psi cd} \tag{15}$$

является единичным аффинором Нордена [6], где $f_\Lambda{}^\Psi$ — оператор интегрируемой комплексной структуры. Определим согласно работе [7] операторы $m_\alpha{}^\Lambda$

$$\begin{cases} m_\alpha{}^\Lambda m_\Lambda{}^\beta = \delta_\alpha{}^\beta, \\ m_\alpha{}^\Lambda \overline{m}^{\beta'}_\Lambda = 0, \end{cases} \qquad \det \left\| \begin{matrix} m^\alpha{}_\Lambda \\ \overline{m}^{\alpha'}{}_\Lambda \end{matrix} \right\| \neq 0, \tag{16}$$

и тогда

$$\triangle_\Lambda{}^\Psi = \frac{1}{2}(\delta_\Lambda{}^\Psi + i f_\Lambda{}^\Psi) = m_\Lambda{}^\alpha m_\alpha{}^\Psi, \quad f^\Psi_\Lambda m_\alpha{}^\Lambda = -i m_\alpha{}^\Psi \quad (\alpha, \beta, \ldots = \overline{1,6}) \tag{17}$$

есть все тот же единичный аффинор Нордена [6] с комплексной структурой $f_\Lambda{}^\Psi$ (15). Поэтому верно следующее разложение:

$$m_\alpha{}^\Lambda = \frac{1}{2}\eta_\alpha{}^{ab} M^\Lambda{}_{ab} \tag{18}$$

для некоторых $\eta_\alpha{}^{ab} = -\eta_\alpha{}^{ba}$ (комплексные операторы Нордена [6]). При этом метрическому 4-вектору будет соответствовать метрический тензор $G_{\Lambda\Psi}$ базы RM так, что

$$\begin{cases} g_{\alpha\beta} = m_\alpha{}^\Lambda m_\beta{}^\Psi G_{\Lambda\Psi}, \\ g_{\alpha'\beta} = \overline{m}_{\alpha'}{}^\Lambda m_\beta{}^\Psi G_{\Lambda\Psi} = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} \varepsilon_{abcd} = M^\Lambda{}_{ab} M^\Psi{}_{cd} G_{\Lambda\Psi}, \\ \varepsilon_{a'b'cd} = \overline{M}^\Lambda{}_{a'b'} M^\Psi{}_{cd} G_{\Lambda\Psi} = 0. \end{cases}$$

Обратные соотношения имеют вид

$$G_{\Lambda\Psi} = \frac{1}{4}(M_\Lambda{}^{ab} M_\Psi{}^{cd}\varepsilon_{abcd} + \overline{M}_\Lambda{}^{a'b'}\overline{M}_\Psi{}^{c'd'}\varepsilon_{a'b'c'd'}),$$
$$\eta^\alpha{}_{ab} = m^\alpha{}_\Lambda M^\Lambda{}_{ab}, \quad \overline{\eta}^{\alpha'}{}_{a'b'} = \overline{m}^\alpha{}_\Lambda \overline{M}^\Lambda{}_{a'b'}.$$

Отсюда с учетом (14), (16), (18) будет следовать

$$\eta^\alpha{}_{ab}\eta_\alpha{}^{cd} = M^\Lambda{}_{ab} M_\Lambda{}^{cd} = \delta^{cd}_{ab}, \quad \frac{1}{4}\eta_\alpha{}^{ab}\eta^\beta{}_{cd}\delta^{cd}_{ab} = \delta_\alpha{}^\beta.$$

Это означает, что многообразие RM является вещественным римановым пространством V_{12} с метрическим тензором $G_{\Lambda\Psi}$ и комплексной структурой $f_\Lambda{}^\Psi$. И кроме того, пространство V_{12} является действительной реализацией комплексного аналитического риманова пространства CV_6 с метрическим тензором $g_{\alpha\beta}$, что позволяет сформулировать следующую теорему, в которой определены

$$\nabla_\alpha := m_\alpha{}^\Lambda \nabla_\Lambda, \quad \overline{\nabla}_{\alpha'} := \overline{m}_{\alpha'}{}^\Lambda \nabla_\Lambda. \tag{19}$$

Теорема 1. *Пусть в качестве базы расслоения задано комплексное аналитическое риманово пространство CV_6. Тогда две связности, заданные в расслоениях $\tau(CV_6)$ и $A^C(CV_6)$, взаимнооднозначно определяют друг друга:*

1. *риманова аналитическая связность, заданная в расслоении $\tau(CV_6)$ условиями*

$$\nabla_\alpha g_{\beta\gamma} = 0, \quad \overline{\nabla}_{\alpha'} g_{\beta\gamma} = 0,$$

2. *риманова аналитическая связность, заданная в расслоении $A^C(CV_6)$ условиями*

$$\nabla_\alpha \varepsilon_{abcd} = 0, \quad \overline{\nabla}_{\alpha'}\varepsilon_{abcd} = 0.$$

При этом коэффициенты соответствующей связности однозначно определятся из условий

$$\nabla_\alpha \eta_\beta{}^{ab} = 0, \quad \overline{\nabla}_{\alpha'}\eta_\beta{}^{ab} = 0.$$

Пусть теперь в CP_7 задана инволюция в смысле [7]

$$S_{A'}{}^B \overline{S}_B{}^{D'} = \delta_{A'}{}^{D'}, \tag{20}$$

тогда условие действительности точки X^A примет следующий вид:

$$S_{A'}{}^B \overline{X}^{A'} = X^B. \tag{21}$$

Потребуем, чтобы эта инволюция определяла вложение действительной квадрики в комплексную. Отсюда следует, что плоские образующие максимальной размерности конуса (1) должны удовлетворять условиям

$$1)\ \ S_{A'}{}^B \overline{X}^{A'}_{a'} s_a{}^{a'} = X^B_a, \qquad 2)\ \ S_{A'}{}^B \overline{X}^{A'}_{a'} s^{aa'} = X^{aB}. \tag{22}$$

Здесь тензоры $s_a{}^{a'}$ и $s^{aa'}$ определяют в комплексном расслоении соответственно эрмитову инволюцию и эрмитов поляритет [8]. Различие этих двух случаев возникает из-за того, что в расслоении $A^C(CV_6)$ нет тензора, с помощью которого можно поднимать и опускать одиночные индексы. Из (20)–(22) согласно [8] следует

$$1)\ \ s_a{}^{a'}\overline{s}_{a'}{}^b = \pm\delta_a{}^b, \qquad 2)\ \ s_{aa'}\overline{s}^{a'b} = \delta_a{}^b, \qquad s_{ab'} = \pm\overline{s}_{b'a}.$$

Далее будем рассматривать только случай 2) как наиболее интересный с точки зрения физики ([2], т. 2, с. 86). Случай 1) рассматривается аналогично, и его опустим. В случае 2) будет выполнено следующее тождество:

$$\overline{X}^{b'} = \overline{s}^{b'a}X_a.$$

Поэтому мы можем написать эквивалентные (8), (9) выражения

$$(X_a, \overline{X}^{b'}) = 0, \quad (Y_p, \overline{Y}^{q'}) = 0, \quad (X_a, \overline{Y}_{b'}) = s_{ab'}, \tag{23}$$

так что деривационные уравнения примут вид

$$\nabla_\Lambda \overline{X}^{a'} = -\overline{Y}_{b'}\widetilde{M}_\Lambda{}^{a'b'}, \quad \nabla_\Lambda \overline{Y}_{b'} = -\overline{X}^{a'}\widetilde{N}_{\Lambda a'b'},$$

тогда из (23) будут следовать тождества

$$\widetilde{M}_\Lambda{}^{a'b'} = \frac{1}{4}\overline{\varepsilon}^{a'b'c'd'}s_{cc'}s_{dd'}\varepsilon^{cdab}M_{\Lambda ab}, \quad \nabla_\Lambda s_{ab'} = 0, \tag{24}$$

и равенством

$$S_\Lambda{}^\Theta = \frac{1}{2}(M_{\Lambda ab}\overline{M}^\Theta{}_{c'd'}\overline{s}^{c'a}\overline{s}^{d'b} + \overline{M}_{\Lambda a'b'}M^\Theta{}_{cd}s^{ca'}s^{db'})$$

определится вещественная инволюция вида

$$S_\Lambda{}^\Theta S_\Theta{}^\Psi = \delta_\Lambda{}^\Psi, \quad \overline{M}_{\Lambda a'b'} = S_\Lambda{}^\Psi\widetilde{M}_{\Psi a'b'}, \quad S_\Lambda{}^\Theta f_\Theta{}^\Lambda = -f_\Lambda{}^\Theta S_\Theta{}^\Lambda.$$

Согласно условиям (12), (24) имеем

$$\nabla_\Lambda s_{ab'} = 0, \quad \nabla_\Lambda\varepsilon_{abcd} = 0, \tag{25}$$

и, полагая

$$\nabla_\Lambda M_{\Psi ab} = 0, \quad \nabla_\Lambda\overline{M}_{\Psi a'b'} = 0, \tag{26}$$

получим риманову связность без кручения, согласованную с инволюцией,

$$\nabla_\Lambda G_{\Psi\Theta} = 0, \quad \nabla_\Lambda S_\Psi{}^\Theta = 0. \tag{27}$$

Таким же образом из (27) с учетом (26) получим связность (25). Можно, кроме того, определить еще одну эрмитову инволюцию (согласно [7])

$$\begin{cases} s_\alpha{}^\beta = 0, \\ s_\alpha{}^{\beta'} = m_\alpha{}^\Lambda\overline{m}^{\beta'}{}_\Psi S_\Lambda{}^\Psi, \end{cases} \qquad s_\alpha{}^{\beta'}\overline{s}_{\beta'}{}^\gamma = \delta_\alpha{}^\gamma.$$

Тогда связность (27) при условии

$$\nabla_\Psi m_\beta{}^\Lambda = 0, \quad \nabla_\Psi m_{\beta'}{}^\Lambda = 0 \tag{28}$$

определит связность

$$\nabla_\Psi g_{\alpha\beta} = 0, \quad \nabla_\Psi s_{\alpha'}{}^\beta = 0. \tag{29}$$

Обратное тоже верно. Исходя из (29), с учетом (28), получим связность (27). Из определения (19), в свою очередь, будет следовать, что связность

$$\nabla_\lambda g_{\alpha\beta} = 0, \quad \nabla_\lambda s_{\alpha'}{}^\beta = 0$$

взаимнооднозначно определит связность

$$\nabla_\lambda s_{ab'} = 0, \quad \nabla_\lambda \varepsilon_{abcd} = 0$$

с помощью условий

$$\nabla_\lambda \eta_\beta{}^{ab} = 0, \quad \nabla_\lambda \eta_{\beta'}{}^{a'b'} = 0.$$

Используем теперь оператор $H_i{}^\alpha$ [7] $(i, j = \overline{1,6})$, определяющий вложение $V^6_{(p,q)} \subset CV_6$. Через $V^6_{(p,q)}$ обозначено вещественное риманово пространство с метрическим тензором

$$g_{ij} := H_i{}^\alpha H_i{}^\beta g_{\alpha\beta} = \overline{H_i{}^\alpha H_i{}^\beta g_{\alpha\beta}}.$$

При этом будут верны следующие тождества:

$$s_\alpha{}^{\beta'} = H_\alpha{}^i \overline{H}_i{}^{\beta'}, \quad \eta_i{}^{ab} := H_i{}^\alpha \eta_\alpha{}^{ab} = \overline{H_i{}^\alpha \eta_\alpha{}^{ab}}, \quad \overline{\eta}_i{}^{a'b'} = \overline{\eta_i{}^{ab}} = \eta_{iab} s^{aa'} s^{bb'}, \tag{30}$$

что позволяет сформулировать следствие из вышеуказанной теоремы 1.

Теорема 2. *Пусть в качестве базы расслоения задано вещественное риманово пространство $V^6_{(p,q)}$. Тогда две вещественные связности, заданные в расслоениях $\tau(V^6_{(p,q)})$ и $A^R(V^6_{(p,q)})$ (расслоение $A^C(V^6_{(p,q)})$ со структурой $s_{ab'}$ или $s_a{}^{b'}$), взаимнооднозначно определяют друг друга:*

1. *риманова вещественная связность, заданная в расслоении $\tau(V^6_{(p,q)})$ условиями*

$$\nabla_i g_{jk} = 0,$$

2. *риманова вещественная связность, заданная в расслоении $A^R(V^6_{(p,q)})$ условиями*

$$\nabla_i \varepsilon_{abcd} = 0,$$

$$\nabla_i s_{ab'} = 0 \ \ (q \text{ четно}), \qquad \nabla_i s_a{}^{b'} = 0 \ \ (q \text{ нечетно}).$$

При этом коэффициенты соответствующей связности однозначно определятся из условия

$$\nabla_i \eta_j{}^{ab} = 0.$$

Опишем приложения указанной теории.

Первое. Поскольку согласно [6] векторы пространства R^6 и бивекторы пространства $\Lambda^2 C^4$ связывает следующее соотношение:

$$r^i = 1/2 \cdot \eta^i{}_{ab} R^{ab},$$

то из него согласно работе [8] будут следовать соотношения

$$R_{ij} = A_{ijd}{}^c R_c{}^d, \quad R_k{}^k = 0, \quad R_{ij} = -R_{ij}, \quad R_{ab'} = R_a{}^b s_{bb'}, \quad A_{ijd}{}^c = \eta_{[i}{}^{ca} \eta_{j]da},$$

основанные на изоморфизме соответствующих групп Ли. Кроме того, из (30) следует выполнение

$$R_{ij} = \overline{R}_{ij} \ \Leftrightarrow \ R_{ab'} = -\overline{R}_{b'a},$$

что означает эрмитову симметрию матрицы $\|iR_{ab'}\|$, а значит, и ее диагонализируемость. Поэтому невырожденная кососимметричная квадратичная форма, заданная на векторах нашего пространства, будет иметь каноническую форму вида

$$\frac{1}{2} R_{ij} X^i Y^j = R_{16} X^{[1} Y^{6]} + R_{23} X^{[2} Y^{3]} + R_{45} X^{[4} Y^{5]}.$$

Второе. Из уравнений (10), (14) для расслоения $A^C(CV_6)$ с базой CV_6, полагая

$$\nabla_{ab} := \eta^\alpha{}_{ab} \nabla_\alpha,$$

можно получить выражения

$$\nabla_\alpha X_a = Y^b \eta_{\alpha ab}, \quad \nabla_{cd} X_a = Y^b \varepsilon_{cdab},$$

что даст два уравнения:

$$\nabla_{c(\,d}X_{a\,)} = 0, \quad \nabla^{c(\,d}X^{a\,)} = 0,$$

последнее из которых назовем *битвисторным уравнением*. С помощью этого уравнения можно исследовать конформную структуру пространств вида $\mathrm{C}R_6$. Следует отметить, что битвисторное уравнение не меняется при конформных преобразованиях метрики и инвариантно при преобразованиях нормализации в смысле [1]. Указанное уравнение по своим свойствам аналогично твисторному уравнению Пенроуза ([2], т. 2, с. 58). Это дает возможность рассматривать твисторные расслоения (обозначенные в статье через $A^C(CV_6)$) над 6-мерными римановыми пространствами CV_6, в то время как у Пенроуза ([2], т. 2, с. 60–62) подобные расслоения имеют в качестве базы пространственно-временные многообразия специального вида.

Литература

1. Нейфельд Э.Г. *Нормализация комплексных грассманианов и квадрик* // Тр. Геометрич. семин. – Казань, 1990, вып. 20. – С. 58–69.
2. Пенроуз Р., Риндлер В. *Спиноры и пространство-время.* – Т. 2. – М.: Мир, 1988. – 572 с.
3. Картан Э. *Теория спиноров.* – М.: ГИИЛ, 1947. – 223 с.
4. Хуа Ло-ген, Розенфельд Б.А. *Геометрия прямоугольных матриц и ее применение к вещественной проективной и неевклидовой геометрии* // Изв. вузов. Математика. – 1957. – № 1. – С. 233–247.
5. Норден А.П. *Пространства аффинной связности.* – М.: Наука, 1976. – 432 с.
6. Норден А.П. *О комплексном представлении тензоров пространства Лоренца* // Изв. вузов. Математика. 1959. – № 1. – С. 156–163.
7. Нейфельд Э.Г. *Об инволюциях в комплексных пространствах* // Тр. Геометрич. семин. – Казань, 1989, вып. 19. – С. 71–82.
8. Андреев К.В. *О бивекторах* 6*-мерных римановых пространств* // Вестн. Башкирск. ун-та. – 1996. – №. 2. – С. 136–140.

Башкирский государственный университет

Поступила 06.02.1997