ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1997 МАТЕМАТИКА № 8 (423)

УДК 512.553.6

С.Н. ТРОНИН

О МОРИТА-КОНТЕКСТАХ, ВОЗНИКАЮЩИХ ПРИ ИЗОМОРФИЗМЕ НЕКОТОРЫХ ПОДКОЛЕЦ КОЛЕЦ ЭНДОМОРФИЗМОВ

В известной работе [1] показано, что необходимым и достаточным условием Морита-эквивалентности колец R и K является изоморфизм колец эндоморфизмов свободных модулей счетного ранга над этими кольцами. Если рассматриваемые модули правые, то это — кольца бесконечных матриц со счетным количеством строк и столбцов, причем в каждом столбце лишь конечное число ненулевых элементов. Будем обозначать такие кольца через $R_{\mathbf{N}}$ и $K_{\mathbf{N}}$, где $\mathbf{N}$ — множество положительных натуральных чисел. В статье [2] (и в ряде других работ) установлено, что Морита-эквивалентность равносильна изоморфности некоторых подколец (возможно, без единицы) колец $R_{\mathbf{N}}$ и $K_{\mathbf{N}}$, например, подколец матриц с конечным числом ненулевых строк или подколец матриц с конечным числом ненулевых элементов.

В данной статье показывается, что по заданному изоморфизму подколец колец эндоморфизмов модулей, являющихся строгими образующими (т. е. содержащими в качестве прямого слагаемого свободный модуль ранга 1 [3]) в ряде случаев можно построить Морита-контекст с "хорошими" свойствами, который при некоторых условиях определяет Морита-эквивалентность. Эти условия таковы, что позволяют, в частности, доказывать как достаточность упомянутых выше критериев, так и классический критерий Морита-эквивалентности ($K \cong \mathrm{End}(Q_R)$ для конечно порожденного прообразующего Q). Исходным пунктом построения является простая

Лемма 1. *Пусть даны ассоциативные кольца с единицей $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{K}$, их подкольца (возможно, без единицы) $\mathfrak{R}' \subseteq \mathfrak{R}$, $\mathfrak{K}' \subseteq \mathfrak{K}$, идемпотенты $e = e^2 \in \mathfrak{R}'$, $f = f^2 \in \mathfrak{K}'$ и изоморфизм колец $\sigma : \mathfrak{R}' \to \mathfrak{K}'$, $\tau = \sigma^{-1}$. Пусть $R = e\mathfrak{R}'e$, $K = f\mathfrak{K}'f$. Тогда существует Морита-контекст $({}_RP_K,\ {}_KQ_R)$,*

$$P \otimes_K Q \to R, \quad p \otimes q \mapsto pq, \qquad Q \otimes_R P \to K, \quad q \otimes p \mapsto qp$$

такой, что $P \cong e\mathfrak{R}'\tau(f) \cong \sigma(e)\mathfrak{K}'f$, $Q \cong \tau(f)\mathfrak{R}'e \cong f\mathfrak{K}'\sigma(e)$ (имеются в виду полулинейные изоморфизмы модулей, соответствующие изоморфизмам колец, индуцированным σ и τ: $e\mathfrak{R}'e \cong \sigma(e)\mathfrak{K}'\sigma(e)$, $f\mathfrak{K}'f \cong \tau(f)\mathfrak{R}'\tau(f)$). После соответствующих отождествлений можно считать, что отображения композиции, определяющие Морита-контекст, есть умножения в кольцах $\mathfrak{R}$ и $\mathfrak{K}$. Построенный таким образом Морита-контекст задает эквивалентность $\mathrm{Mod}-R$ и $\mathrm{Mod}-K$ тогда и только тогда, когда $e\mathfrak{R}'\tau(f)\mathfrak{R}'e = e\mathfrak{R}'e$, $f\mathfrak{K}'\sigma(e)\mathfrak{K}'f = f\mathfrak{K}'f$.

Доказательство. Положим $P = e\mathfrak{R}'\tau(f)$, $Q = \tau(f)\mathfrak{R}'e$ и определим структуры K-модулей следующим образом: $p \cdot k = p\tau(k)$, $k \cdot q = \tau(k)q$, где $p \in P$, $q \in Q$, $k \in K = f\mathfrak{K}'f$. Отображение $R - R$–бимодулей $p \otimes q \mapsto pq$ определим как умножение в $\mathfrak{R}$. Аналогично можно определить структуры R–модулей на $\sigma(e)\mathfrak{K}'f = P'$ и $f\mathfrak{K}'\sigma(e) = Q'$, полагая $r \cdot p' = \sigma(r)p'$, $q' \cdot r = q'\sigma(r)$. Теперь гомоморфизмы σ и τ будут идуцировать изоморфизмы бимодулей $P \cong P'$, $Q \cong Q'$, и можно определить второе спаривание как композицию

$$Q \times P \xrightarrow{\cong} Q' \times P' = f\mathfrak{K}'\sigma(e) \times \sigma(e)\mathfrak{K}'f \longrightarrow f\mathfrak{K}'f = K,$$

так что, если $p = ea\tau(f)$, $q = \tau(f)be$, то $qp = f\sigma(bea)f$. Проверим свойство ассоциативности. Пусть $p' = ed\tau(f)$, $q' = \tau(f)ce$, тогда

$$(qp)q' = \tau(f\sigma(bea)f)\tau(f)ce = \tau(f)bea\tau(f)ce = q(pq'),$$

$$p(qp') = p \cdot \tau(f\sigma(bed)f) = ea\tau(f)bed\tau(f) = (pq)p'.$$

Очевидно, $PQ = e\mathfrak{R}'\tau(f)\mathfrak{R}'e$, $QP = f\mathfrak{K}'\sigma(e)\mathfrak{K}'f$. Отсюда следует последнее утверждение леммы. $\square$

В дальнейшем зафиксируем обозначения и предположения леммы 1 и будем дополнительно предполагать, что $\mathfrak{R} = \mathrm{End}(U_R)$, $\mathfrak{K} = \mathrm{End}(V_K)$, и что идемпотенты $e \in \mathfrak{R}$, $f \in \mathfrak{K}$ таковы, что $R = e\mathfrak{R}e$, $K = f\mathfrak{K}f$, $U \cong \mathfrak{R}e$, $V \cong \mathfrak{K}f$. Эти условия означают, что в модуле U есть прямое слагаемое, изоморфное R, гомоморфизм e есть проекция на это прямое слагаемое, и аналогично для V, K и f. В [3] такие модули называются строгими образующими. Будем называть эту совокупность предположений базовыми условиями. Если $g = g^2 \in \mathfrak{R}$ таков, что $\mathfrak{R} = \mathrm{End}(\mathfrak{R}g_S)$, где $S = g\mathfrak{R}g$, то, следуя [3], обозначаем это свойство так: $r(g) = 1$.

Лемма 2. *Предположим, что имеют место базовые условия и следующие соотношения:*

$$\begin{aligned} e\mathfrak{R}e &= e\mathfrak{R}'e, & f\mathfrak{K}f &= f\mathfrak{K}'f, \\ \tau(f)\mathfrak{R}e &= \tau(f)\mathfrak{R}'e, & \sigma(e)\mathfrak{K}f &= \sigma(e)\mathfrak{K}'f, \\ e\mathfrak{R}\tau(f) &= e\mathfrak{R}'\tau(f), & f\mathfrak{K}\sigma(e) &= f\mathfrak{K}'\sigma(e), \\ \tau(f)\mathfrak{R}\tau(f) &= \tau(f)\mathfrak{R}'\tau(f), & \sigma(e)\mathfrak{K}\sigma(e) &= \sigma(e)\mathfrak{K}'\sigma(e). \end{aligned}$$

Тогда для построенного выше Морита-контекста естественные гомоморфизмы колец и бимодулей

$$R \to \mathrm{End}(P_K), \quad K \to \mathrm{End}(Q_R), \quad P \to \mathrm{Hom}(Q_R, R_R), \quad Q \to \mathrm{Hom}(P_K, K_K)$$

являются изоморфизмами.

Будем называть условия этой леммы условиями существования Морита-контекста. Используется следующий хорошо известный факт (см., напр., [3], лемма 1.10).

Лемма 3. *Пусть M, L — правые R-модули, $u = u^2 \in \mathrm{End}(M_R)$, $v = v^2 \in \mathrm{End}(L_R)$. Тогда имеет место изоморфизм бимодулей $\mathrm{Hom}(uM_R, vL_R) \cong v\,\mathrm{Hom}(M_R, L_R)u$. В частности, имеет место изоморфизм колец $\mathrm{End}(uM_R) \cong u\,\mathrm{End}(M_R)u$.*

Доказательство леммы 2. Можно сразу отождествить R с $e\mathfrak{R}e \cong \sigma(e)\mathfrak{K}\sigma(e)$, K с $f\mathfrak{K}f \cong \tau(f)\mathfrak{R}\tau(f)$, P с $e\mathfrak{R}\tau(f) \cong \sigma(e)\mathfrak{K}f$, Q с $\tau(f)\mathfrak{R}e \cong f\mathfrak{K}\sigma(e)$. Имеются в виду, конечно, полулинейные изоморфизмы. Тогда из леммы 3 следует

$$\mathrm{End}(P_K) \cong \sigma(e)\mathfrak{K}\sigma(e) \cong e\mathfrak{R}e = R, \quad \mathrm{End}(Q_R) \cong \tau(f)\mathfrak{R}\tau(f) \cong f\mathfrak{K}f = K,$$

$$\mathrm{Hom}(P_K, K_K) \cong f\mathfrak{K}\sigma(e) \cong \tau(f)\mathfrak{R}e = Q, \quad \mathrm{Hom}(Q_R, R_R) \cong \tau(f)\mathfrak{R}\tau(f) \cong f\mathfrak{K}f = K.$$

Легко проверяется, что изоморфизмы из леммы 3 (с учетом имеющейся здесь структуры бимодулей) являются теми естественными гомоморфизмами, о которых говорится в утверждении леммы. $\square$

Теорема 1. *Пусть выполнены базовые условия и, кроме того,*

$$\mathfrak{R}e\mathfrak{R} \subseteq \mathfrak{R}', \quad \mathfrak{K}f\mathfrak{K} \subseteq \mathfrak{K}', \quad \tau(f)\mathfrak{R}\tau(f) \subseteq \mathfrak{R}', \quad \sigma(e)\mathfrak{K}\sigma(e) \subseteq \mathfrak{K}'.$$

Тогда выполнены условия существования Морита-контекста. Построенный Морита-контекст определяет эквивалентность $\mathrm{Mod}-R$ и $\mathrm{Mod}-K$ в том и только том случае, если $\sigma(\mathfrak{R}e\mathfrak{R}) = \mathfrak{K}f\mathfrak{K}$. Достаточным условием эквивалентности будут включения $\sigma(e) \in \mathfrak{K}f\mathfrak{K}$, $\tau(f) \in \mathfrak{R}e\mathfrak{R}$.

Анонс этой теоремы был дан в [4], где, однако, были пропущены условия $\tau(f)\mathfrak{R}\tau(f) \subseteq \mathfrak{R}'$, $\sigma(e)\mathfrak{K}\sigma(e) \subseteq \mathfrak{K}'$. Эти условия, впрочем, тривиально выполняются при $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}'$, $\mathfrak{K} = \mathfrak{K}'$.

Прежде чем доказывать теорему, рассмотрим ряд примеров, показывающих ее связи с уже известными результатами.

Пример 1. Рассмотрим произвольный Морита-контекст

$$P \otimes_K Q \to R, \quad p \otimes q \mapsto pq, \quad Q \otimes_R P \to K, \quad q \otimes p \mapsto qp,$$

соответствующее кольцо

$$\mathfrak{M} = \begin{pmatrix} R & P \\ Q & K \end{pmatrix}$$

и модули

$$U = \begin{pmatrix} R \\ Q \end{pmatrix} \in \mathrm{Mod}-R \quad V = \begin{pmatrix} P \\ K \end{pmatrix} \in \mathrm{Mod}-K.$$

Тогда

$$\mathfrak{R} = \mathrm{End}(U_R) \cong \begin{pmatrix} R & \mathrm{Hom}(Q_R, R_R) \\ Q & \mathrm{End}(Q_R) \end{pmatrix}, \qquad \mathfrak{K} = \mathrm{End}(V_K) \cong \begin{pmatrix} \mathrm{End}(P_K) & P \\ \mathrm{Hom}(P_K, K_K) & K \end{pmatrix}.$$

Если Морита-контекст удовлетворяет условиям

$$R \cong \mathrm{End}(P_K), \quad K \cong \mathrm{End}(Q_R), \quad Q \cong \mathrm{Hom}(P_K, K_K), \quad P \cong \mathrm{Hom}(Q_R, R_R)$$

(причем изоморфизмами являются естественные гомоморфизмы), то кольца $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{K}$ можно отождествить. Полагая

$$e = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad f = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad e, f \in \mathfrak{R} = \mathfrak{K},$$

приходим к условиям теоремы 1. В этом случае

$$\mathfrak{R}e\mathfrak{R} = \begin{pmatrix} R & P \\ Q & QP \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{K}f\mathfrak{K} = \begin{pmatrix} PQ & P \\ Q & K \end{pmatrix},$$

$\mathfrak{R}e\mathfrak{R} = \mathfrak{K}f\mathfrak{K}$ тогда и только тогда, когда $R = PQ$ и $K = QP$. Как известно, это равносильно тому, что данный Морита-контекст определяет эквивалентность категорий $\mathrm{Mod}-R$ и $\mathrm{Mod}-K$ ([5], гл. 2, § 3).

Пример 2. Пусть $Q \in \mathrm{Mod}-R$ — образующий, т. е. $Q^{(n)} \cong R \oplus L$. Положим $U = Q^{(n)}$, $\mathfrak{R} = \mathrm{End}(U_R)$, и пусть $e \in \mathfrak{R}$ — проекция на прямое слагаемое $Q^{(n)}$, изоморфное R. Тогда, очевидно, $e\mathfrak{R}e \cong R$ и $\mathfrak{R}e \cong U$. Полагая $K = \mathrm{End}(Q_R)$, имеем естественный изоморфизм $\sigma : \mathfrak{R} \cong \mathfrak{K} = K_n$, где K_n — кольцо $n \times n$-матриц. Можно считать, что $\mathfrak{K} = \mathrm{End}(V_K)$, где $V = K^{(n)}$ — свободный K-модуль с базисом из n элементов. Пусть $f \in \mathfrak{K}$ — проекция V на первое прямое слагаемое, изоморфное K. При отождествлении $\mathfrak{K}$ с $\mathfrak{R}$ f становится проекцией $Q^{(n)}$ на первое слагаемое, изоморфное Q. Ясно, что и здесь $f\mathfrak{K}f \cong K, \mathfrak{K}f \cong V$. Теперь окончательно положим $\mathfrak{R} = \mathfrak{K}$ и тогда можно считать, что $Q = f\mathfrak{R}e$. Положим $P = e\mathfrak{R}f$. Умножение в $\mathfrak{R}$ определяет Морита-контекст. Согласно первой части теоремы 1 $P \cong \mathrm{Hom}(Q_R, R_R)$, $Q \cong \mathrm{Hom}(P_K, K_K)$, $R \cong \mathrm{End}(P_K)$ (напомним, что $K = \mathrm{End}(Q_R)$ по определению). Это — хорошо известное свойство образующих в $\mathrm{Mod}-R$ ([6], гл. 4, предлож. 4.1).

Выясним теперь, что означает в данной ситуации условие $\mathfrak{R}e\mathfrak{R} = \mathfrak{K}f\mathfrak{K}$. Во-первых, заметим, что из определения f сразу следует $\mathfrak{K}f\mathfrak{K} = \mathfrak{K}$. Чтобы это увидеть, достаточно вспомнить, что фактически $\mathfrak{R} = K_n$, а $f = f_{11}$ — стандартная матричная единица. Следовательно, необходимо выяснить, когда $\mathfrak{R}e\mathfrak{R} = \mathfrak{R}$.

Лемма 4. *При сделанных выше предположениях $\mathfrak{R}e\mathfrak{R} = \mathfrak{R}$ тогда и только тогда, когда Q — конечно порожденный проективный R-модуль (т. е. конечно порожденный прообразующий).*

Доказательство. Равенство $\mathfrak{R}e\mathfrak{R} = \mathfrak{R}$ эквивалентно соотношению

$$1_{\mathfrak{R}} = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i e \beta_i. \tag{1}$$

Положим $e = \vartheta\pi$, $\pi\vartheta = 1_R$,

$$\alpha_i\vartheta : R \longrightarrow Q^{(n)}, \quad f_i = \pi\beta_i : Q^{(n)} \longrightarrow R.$$

Полагая $x_i = \alpha_i\vartheta(1)$, для каждого $x \in Q^{(n)}$ получаем

$$x = \sum_{i=1}^{m} x_i f_i(x). \tag{2}$$

Таким образом, найден дуальный базис для $Q^{(n)}$. Обратно, если Q конечно порожден и проективен, то таков же и $Q^{(n)}$. Возьмем дуальный базис для $Q^{(n)}$, например, $\{x_i, f_i \mid 1 \le i \le m\}$. Обращая рассуждения, отождествим $x_i \in Q^{(n)}$ с $\alpha'_i : R \to Q^{(n)}$. Так как R — прямое слагаемое $Q^{(n)}$, то $\alpha'_i = \alpha_i\vartheta$, где $\alpha_i : Q^{(n)} \to Q^{(n)}$. По той же причине можно представить f_i в виде $\pi\beta_i$, $\beta_i : Q^{(n)} \to Q^{(n)}$. Теперь (2) сводится к (1). $\square$

Подводя итоги, видим, что из теоремы 1 вытекает достаточность критерия Морита-эквивалентности R и K.

Пример 3. Пусть $U = R^{\mathbf{N}}, V = K^{\mathbf{N}}$ — свободные модули со счетными базисами,

$$\mathfrak{R} = \mathrm{End}(U_R) = R_{\mathbf{N}}, \quad \mathfrak{K} = \mathrm{End}(V_K) = K_{\mathbf{N}},$$

$e = e_{11}$, $f = f_{11}$ — стандартные матричные единицы. Если существует изоморфизм $\sigma : \mathfrak{R} \xrightarrow{\cong} \mathfrak{K}$, то условия первой части теоремы 1 выполнены и существует некоторый Морита-контекст $P = \sigma(e_{11})V$, $Q = \sigma^{-1}(f_{11})U$. Основная часть доказательства теоремы Камилло из [1] состоит в том, чтобы непосредственно установить, что P конечно порожден и является образующим. Условия нашей теоремы 1 являются слишком общими, чтобы вывести из них этот факт (это будет видно из примера 4). Заметим, что $\mathfrak{R}e\mathfrak{R}$ в данном случае есть подкольцо без единицы кольца $R_{\mathbf{N}}$, состоящее из матриц с конечным числом ненулевых строк (и аналогично для $\mathfrak{K}f\mathfrak{K}$). Таким образом, фактически в [1] доказано (и это отмечено в [2]),что при любом изоморфизме $R_{\mathbf{N}} \cong K_{\mathbf{N}}$ матрицы с конечным числом не равных нулю строк переходят в матрицы с аналогичным свойством.

Пример 4, когда условия первой части теоремы 1 выполнены, но Морита-эквивалентность отсутствует. Пусть $\mathfrak{R} = R_{\mathbf{N}}$, $K = \mathfrak{R}$, а $\mathfrak{K} = K_{\mathbf{N}}$. Рассмотрим любую биекцию $\gamma : \mathbf{N} \times \mathbf{N} \longrightarrow \mathbf{N}$. По ней строится гомоморфизм колец с единицей

$$\varphi = \varphi_\gamma : K_{\mathbf{N}} \longrightarrow R_{\mathbf{N}}$$

следующим образом. Элементы $K_{\mathbf{N}}$ будем представлять в виде блочных $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$-матриц, блоки которых суть элементы $R_{\mathbf{N}}$. Обозначим через $a_{i(j)k(l)} \in R$ компоненту $a \in \mathfrak{K}$, находящуюся в i-й строке и k-м столбце блока (j, l). Пусть теперь

$$\varphi(a) = (d_{ts})_{t,s \in \mathbf{N}}, \quad d_{ts} \in R,$$

где $d_{\gamma(i,j),\gamma(k,l)} = a_{i(j)k(l)}$.

Лемма 5. *φ — инъективный гомоморфизм колец с единицей.*

Доказательство. Аддитивность и инъективность очевидны. Покажем, что $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$. Пусть $c = ab$, $\varphi(c) = \bar{c}$, $\varphi(a) = \bar{a}$, $\varphi(b) = \bar{b}$. Тогда

$$c_{i(j)k(l)} = \sum_p \sum_q a_{i(j)p(q)} b_{p(q)k(l)}$$

или

$$\bar{c}_{\gamma(i,j)\gamma(k,l)} = \sum_p \sum_q \bar{a}_{\gamma(i,j)\gamma(p,q)} \bar{b}_{\gamma(p,q)\gamma(k,l)}.$$

Так как γ —биекция, то $t = \gamma(p,q)$ принимает все значения из $\mathbf{N}$ ровно по одному разу, и мы приходим к равенству

$$\bar{c}_{mn} = \sum_t \bar{a}_{mt} \bar{b}_{tn},$$

что и означает $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$.

Покажем, что единица переходит в единицу. Если $\varepsilon \in K_{\mathbf{N}}$ — единичный элемент, то $\varepsilon_{i(j)k(l)} = \delta_{ik}\delta_{jl}$ (символы Кронекера) и $\bar{\varepsilon} = \varphi(\varepsilon)$ таков, что

$$\bar{\varepsilon}_{\gamma(i,j)\gamma(k,l)} = \delta_{ik}\delta_{jl}$$

тогда и только тогда, когда $i = k$, $j = l$, т.е. $\gamma(i,j) = \gamma(k,l)$. $\square$

Положим теперь $\mathfrak{K}' = \mathfrak{K}$, $\mathfrak{R}' = \mathrm{Im}(\varphi) \subset \mathfrak{R}$, $\tau : \mathfrak{K}' \xrightarrow{\cong} \mathfrak{R}'$ — то же самое, что и φ_γ, $e = e_{11} \in \mathfrak{R}$, $f = f_{11} \in \mathfrak{K}$ — стандартные матричные единицы. Проверим условия $\sigma(e)\mathfrak{K}\sigma(e) \subseteq \mathfrak{K}'$, $\tau(f)\mathfrak{R}\tau(f) \subseteq \mathfrak{R}'$. Выполнимость первого тривиальна, т.к. $\mathfrak{K} = \mathfrak{K}'$. Если положить $g = \tau(f)$ (это матрица с элементами g_{pq}), то легко убедиться, что $g_{\gamma(i,1)\,\gamma(i,1)} = 1$, а для всех остальных индексов $g_{pq} = 0$. Пусть $r \in \mathfrak{R}$ и $r_{t\,s} \in R$ — компоненты этой матрицы. Тогда компоненты матрицы $d = g\,r\,g$ таковы: $d_{\gamma(i,1)\,\gamma(k,1)} = r_{\gamma(i,1)\,\gamma(k,1)}$, $d_{\gamma(i,j)\,\gamma(k,l)} = 0$ для $j \neq 1$ или $l \neq 1$. Элементы из $\varphi(\mathfrak{K}) = \mathfrak{R}'$ можно охарактеризовать как матрицы a, компоненты которых удовлетворяют следующим двум свойствам:

1) $\forall l\ \exists j_0\ \forall j > j_0\ \forall i\,\forall k \quad a_{\gamma(i,j)\,\gamma(k,l)} = 0$,

2) $\forall j, l, k\ \exists i_0\ \forall i > i_0 \quad a_{\gamma(i,j)\,\gamma(k,l)} = 0$.

Проверим, что для матрицы d эти свойства выполнены. При $l \neq 1$ вообще все $d_{\gamma(i,j)\,\gamma(k,l)} = 0$. Если же $l = 1$, то при $j > 1$ $d_{\gamma(i,j)\,\gamma(k,l)} = 0$ для любых i, k. Проверка второго свойства также сводится к перебору вариантов, из которых нетривиален лишь случай $j = l = 1$. Фактически надо убедиться в том, что для фиксированного k лишь конечное число элементов $r_{\gamma(i,1)\,\gamma(k,1)}$ отлично от нуля. Но это следует из определения кольца $\mathfrak{R}$.

Убедимся, что $\mathfrak{R}e\mathfrak{R} \subset \mathfrak{R}'$. Как уже отмечалось, $\mathfrak{R}e\mathfrak{R}$ — подкольцо, состоящее из матриц с конечным числом ненулевых строк. Если $d \in \mathfrak{R}e\mathfrak{R}$, то из соотношения $d_{\gamma(i,j)\,\gamma(k,l)} = a_{i(j)k(l)}$ следует, что если для всех $\gamma(i,j)$, кроме конечного числа, $d_{\gamma(i,j)\,\gamma(k,l)} = 0$ при любых $\gamma(k,l)$, то, во-первых, для каждого блочного столбца матрицы a с номером l почти все блоки в этом столбце нулевые. Это уже означает существование у элемента $d \in \mathfrak{R}e\mathfrak{R}$ прообраза относительно τ. Во-вторых, в каждом ненулевом блоке матрицы a все строки, кроме конечного числа, нулевые, и, более того, существует общая верхняя граница количеств ненулевых строк во всех блоках. Тем самым выяснено, что такое $\tau^{-1}(\mathfrak{R}e\mathfrak{R})$, а также, что это множество существенно меньше, чем $\mathfrak{K}f\mathfrak{K}$.

Итак, условия первой части теоремы 1 выполнены, Морита-контекст с указанными в теореме свойствами существует, но эквивалентности категорий модулей он не определяет. Более того, эквивалентности в общем случае не может быть.

Чтобы проверить это, построим некоторое семейство идеалов в $R_{\mathbf{N}}$. А именно, по любой конечной или счетной последовательности вложенных идеалов в R, например, $\mathfrak{A}_1 \supseteq \mathfrak{A}_2 \supseteq \cdots$, где включения не обязательно строгие, построим идеал $I(\mathfrak{A}_1 \supseteq \mathfrak{A}_2 \supseteq \cdots) = I(\mathfrak{A}_i)$ следующим образом. Бесконечная матрица $a = (a_{ij})$ принадлежит $I(\mathfrak{A}_i)$, если существует последовательность натуральных чисел $m_1 = 1 \leq m_2 \leq m_3 \leq \cdots$ такая, что для любого i элементы всех строк матрицы a, начиная со строки с номером m_i, принадлежат идеалу $\mathfrak{A}_i$. Последовательность, разумеется, определена неоднозначно. Например, для любых неотрицательных $l_2, l_3, \dots$ таких, что $m_1 = 1 \le m_2 + l_2 \le m_3 + l_3 \le \cdots$, эта последовательность номеров строк также определяет принадлежность элемента a множеству $I(\mathfrak{A}_i)$.

Лемма 6. *$I(\mathfrak{A}_i)$ — идеал в $R_{\mathbf{N}}$.*

Доказательство. Очевидно, $I(\mathfrak{A}_i)$ — правый идеал. Пусть $b \in R_{\mathbf{N}}$ — произвольная матрица с конечными столбцами, и пусть k_j — наименьший номер строки, начиная с которой в столбцах матрицы b с 1-го по j-й располагаются только нули. Ясно, что $k_1 \le k_2 \le \cdots$. Рассмотрим матрицу ba. Тогда последовательность номеров строк из определения идеала $I(\mathfrak{A}_i)$ для этой матрицы можно взять такой: $n_1 = 1 \le n_2 \le n_3 \le \cdots$, где $n_j = k_{m_j}$. $\square$

Заметим, что в $R_{\mathbf{N}}$ идеал $I(R \supset \{0\})$ — это идеал всех матриц с конечным числом ненулевых строк, а если $\mathfrak{A}$ — произвольный идеал R, то $I(\mathfrak{A}) = I(\mathfrak{A} \supseteq \mathfrak{A} \supseteq \cdots) = \mathfrak{A}_{\mathbf{N}}$ и т. д. Удовлетворительного описания связи между идеалами R и идеалами $R_{\mathbf{N}}$, по видимому, еще не найдено.

Используем идеалы вида $I(\mathfrak{A}_i)$ для того, чтобы доказать, что $R_{\mathbf{N}}$ и $(R_{\mathbf{N}})_{\mathbf{N}}$ в общем случае не являются Морита-эквивалентными. Если, например, R — тело, то в $R_{\mathbf{N}}$ имеется всего один нетривиальный идеал $\mathfrak{B} = I(R \supset \{0\})$. Но тогда в $(R_{\mathbf{N}})_{\mathbf{N}}$ имеем уже несколько несовпадающих нетривиальных идеалов: $I(\mathfrak{R} \supset \{0\})$, $I(\mathfrak{B} \supseteq \mathfrak{B} \supseteq \cdots)$, $I(\mathfrak{R} \supset \mathfrak{B})$, $I(\mathfrak{B} \supset \{0\})$, что исключает Морита-эквивалентность. Вопрос о том, для каких R кольца $R_{\mathbf{N}}$ и $(R_{\mathbf{N}})_{\mathbf{N}}$ Морита-эквивалентны, также, по-видимому, открыт.

Доказательство теоремы 1 представим в виде двух лемм.

Лемма 7. *Если дан базовый набор условий, и, кроме того, $\mathfrak{R}e\mathfrak{R} \subseteq \mathfrak{R}'$, $\mathfrak{K}f\mathfrak{K} \subseteq \mathfrak{K}'$, $\tau(f)\mathfrak{R}\tau(f) \subseteq \mathfrak{R}'$, $\sigma(e)\mathfrak{K}\sigma(e) \subseteq \mathfrak{K}'$, то выполнены условия существования Морита-контекста, и, кроме того, $\mathfrak{R}e\mathfrak{R} = \mathfrak{R}'e\mathfrak{R}'$, $\mathfrak{K}f\mathfrak{K} = \mathfrak{K}'f\mathfrak{K}'$.*

Доказательство. Так как $e\mathfrak{R}e \subseteq \mathfrak{R}'$, то $e\mathfrak{R}e = e(e\mathfrak{R}e)e \subseteq e\mathfrak{R}'e \subseteq e\mathfrak{R}e$, и аналогично для $f\mathfrak{K}f = f\mathfrak{K}'f$. Очевидно, $\tau(f)\mathfrak{R}'e \subseteq \tau(f)\mathfrak{R}e$, так что необходимо установить обратное включение. Оно получается из цепочки включений $\tau(f)\mathfrak{R}e \subseteq \tau(f)(\mathfrak{R}e\mathfrak{R})e \subseteq \tau(f)\mathfrak{R}'$ ввиду того, что $\mathfrak{R}e \subseteq \mathfrak{R}e\mathfrak{R}$. Оставшиеся равенства из набора условий существования Морита-контекста доказываются аналогично.

Докажем включение $\mathfrak{R}e\mathfrak{R} \subseteq \mathfrak{R}'e\mathfrak{R}'$. Заметим, что $(\mathfrak{R}e\mathfrak{R})^2 = \mathfrak{R}e\mathfrak{R}$, и рассмотрим цепочку равенств и включений $\mathfrak{R}e\mathfrak{R} = (\mathfrak{R}e\mathfrak{R})^3 = \mathfrak{R}e(\mathfrak{R}\mathfrak{R})e(\mathfrak{R}\mathfrak{R})e\mathfrak{R} = (\mathfrak{R}e\mathfrak{R})e(\mathfrak{R}e\mathfrak{R}) \subseteq \mathfrak{R}'e\mathfrak{R}'$. Остальное очевидно. $\square$

Лемма 8. *Если дан базовый набор условий, и, кроме того, $\mathfrak{R}e\mathfrak{R} \subseteq \mathfrak{R}'$, $\mathfrak{K}f\mathfrak{K} \subseteq \mathfrak{K}'$, $\sigma(e)\mathfrak{K}\sigma(e) \subseteq \mathfrak{K}'$, $\tau(f)\mathfrak{R}\tau(f) \subseteq \mathfrak{R}'$, то условия эквивалентности равносильны равенству $\sigma(\mathfrak{R}e\mathfrak{R}) = \mathfrak{K}f\mathfrak{K}$ и следуют из включений $\sigma(e) \in \mathfrak{K}f\mathfrak{K}, \tau(f) \in \mathfrak{R}e\mathfrak{R}$.*

Доказательство. Пусть даны условия эквивалентности. Заметим, что $f \in f\mathfrak{K}'f = f\mathfrak{K}'\sigma(e)\mathfrak{K}'f$, и рассмотрим цепочку включений

$$\mathfrak{K}f\mathfrak{K} \subseteq \mathfrak{K}(f\mathfrak{K}'\sigma(e)\mathfrak{K}'f)\mathfrak{K} = (\mathfrak{K}f\mathfrak{K}')\sigma(e)(\mathfrak{K}'f\mathfrak{K}) \subseteq \mathfrak{K}'\sigma(e)\mathfrak{K}' = \sigma(\mathfrak{R}'e\mathfrak{R}') \subseteq \sigma(\mathfrak{R}e\mathfrak{R}).$$

Аналогично получается включение $\mathfrak{R}e\mathfrak{R} \subseteq \tau(\mathfrak{K}f\mathfrak{K})$. Так как σ и τ взаимно обратны, то необходимая часть утверждения леммы доказана.

Обратно, пусть $\sigma(\mathfrak{R}e\mathfrak{R}) = \mathfrak{K}f\mathfrak{K}$. Используя уже доказанные в предыдущих леммах соотношения, имеем $\sigma(e) \in \mathfrak{K}f\mathfrak{K} = \mathfrak{K}'f\mathfrak{K}' = \sigma(\mathfrak{R}'\tau(f)\mathfrak{R}')$, откуда $e \in e\mathfrak{R}'\tau(f)\mathfrak{R}'$, и далее $e\mathfrak{R}'e \subseteq (e\mathfrak{R}'\tau(f)\mathfrak{R}')\mathfrak{R}'e \subseteq e\mathfrak{R}'\tau(f)\mathfrak{R}'e$. Это значит, что $e\mathfrak{R}e \subseteq e\mathfrak{R}\tau(f)\mathfrak{R}e$. Аналогично получается второе условие эквивалентности. $\square$

Эта лемма завершает доказательство теоремы 1.

Следствие 1. Пусть дано кольцо $\mathfrak{R} = \mathrm{End}(U_R)$, где U — строгий образующий, подкольцо (возможно, без единицы) $\mathfrak{R}' \subseteq \mathfrak{R}$ и два идемпотента $e, f \in \mathfrak{R}'$ такие, что $r(e) = r(f) = 1$. Допустим, что $\mathfrak{R}e\mathfrak{R} = \mathfrak{R}f\mathfrak{R} \subseteq \mathfrak{R}'$, $e\mathfrak{R}e \subseteq \mathfrak{R}'$, $f\mathfrak{R}f \subseteq \mathfrak{R}'$. Тогда кольца $e\mathfrak{R}e$ и $f\mathfrak{R}f$ Морита-эквивалентны.

Теорема 2. *Пусть дан базовый набор условий. Тогда достаточными условиями существования Морита-контекста, определяющего эквивалентность, будут следующие соотношения:* $\mathfrak{R}e \subseteq \mathfrak{R}'$, $\mathfrak{K}f \subseteq \mathfrak{K}'$, $\sigma(\mathfrak{R}'e\mathfrak{R}') = \mathfrak{K}'f\mathfrak{K}'$. *Равносильно последнему равенству условие* $\sigma(e) \in \mathfrak{K}'f\mathfrak{K}'$, $\tau(f) \in \mathfrak{R}'e\mathfrak{R}'$.

Заметим, что условия $\mathfrak{R}e \subseteq \mathfrak{R}'$, $\mathfrak{K}f \subseteq \mathfrak{K}'$ на языке работы [3] можно выразить так: подкольца $\mathfrak{R}'$ и $\mathfrak{K}'$ являются обильными. Снова предварим доказательство примером.

Пример 4. Вернемся к ситуации примера 3. Пусть $\mathfrak{R}'$, $\mathfrak{K}'$ — подкольца $\mathfrak{R}$ и $\mathfrak{K}$, состоящие из матриц с конечным числом ненулевых компонент. Тогда

$$\mathfrak{R}e \subseteq \mathfrak{R}', \quad \mathfrak{K}f \subseteq \mathfrak{K}', \quad \mathfrak{R}' = \mathfrak{R}'e\mathfrak{R}', \quad \mathfrak{K}' = \mathfrak{K}'f\mathfrak{K}'.$$

Если существует изоморфизм $\sigma : \mathfrak{R}' \xrightarrow{\cong} \mathfrak{K}'$, то условия теоремы 2 выполнены, и кольца R и K Морита-эквивалентны. Это — часть известного результата, доказанного В. Стефенсоном (см. [2]), о том, что изоморфизм колец бесконечных матриц с конечным числом ненулевых компонент есть необходимое и достаточное условие Морита-эквивалентности. Необходимость этого условия можно легко вывести, рассмотрев изоморфизм $Q^{\mathbf{N}} \cong R^{\mathbf{N}}$ (где Q — конечно порожденный проективный образующий в $\mathrm{Mod}-R$) из доказательства одного утверждения Эйленберга ([1]) и соответствующий изоморфизм $\mathrm{End}_R(Q)_{\mathbf{N}} \cong R_{\mathbf{N}}$. Этот изоморфизм индуцирует не только изоморфизм подколец матриц с конечным числом ненулевых строк (см. [2]), но и изоморфизм подколец матриц с конечным числом ненулевых элементов.

Доказательство теоремы 2. Покажем сначала, что условия теоремы 2 влекут выполнение соотношений $\mathfrak{R}e \subseteq \mathfrak{R}'$,$\mathfrak{R}\tau(f) \subseteq \mathfrak{R}'$, $\mathfrak{K}f \subseteq \mathfrak{K}'$,$\mathfrak{K}\sigma(e) \subseteq \mathfrak{K}'$, из которых в свою очередь следуют условия существования Морита-контекста. Так как $\tau(f) \in \mathfrak{R}'e\mathfrak{R}'$, то $\mathfrak{R}\tau(f) \subseteq \mathfrak{R}\mathfrak{R}'e\mathfrak{R}' \subseteq (\mathfrak{R}e)\mathfrak{R}' \subseteq \mathfrak{R}'\mathfrak{R}' \subseteq \mathfrak{R}'$, и аналогично $\mathfrak{K}\sigma(e) \subseteq \mathfrak{K}'$. Отсюда выводим

$$\begin{aligned}
\mathfrak{R}e \subseteq \mathfrak{R}' &\Rightarrow (\mathfrak{R}e)e \subseteq \mathfrak{R}'e \Rightarrow e(\mathfrak{R}e) \subseteq e(\mathfrak{R}'e), \\
\mathfrak{R}\tau(f) \subseteq \mathfrak{R}' &\Rightarrow (\mathfrak{R}\tau(f))\tau(f) \subseteq \mathfrak{R}'\tau(f), \quad \tau(f)(\mathfrak{R}\tau(f)) \subseteq \tau(f)(\mathfrak{R}'\tau(f)), \\
\mathfrak{R}e \subseteq \mathfrak{R}'e &\Rightarrow \tau(f)\mathfrak{R}e \subseteq \tau(f)\mathfrak{R}'e, \\
\mathfrak{R}\tau(f) \subseteq \mathfrak{R}'\tau(f) &\Rightarrow e\mathfrak{R}\tau(f) \subseteq e\mathfrak{R}'\tau(f).
\end{aligned}$$

Точно так же получается все остальное. Теперь покажем, что из соотношений $\mathfrak{R}e \subseteq \mathfrak{R}'$, $\mathfrak{K}f \subseteq \mathfrak{K}'$, $\sigma(\mathfrak{R}'e\mathfrak{R}') = \mathfrak{K}'f\mathfrak{K}'$ следуют условия эквивалентности. Прежде всего, заметим, что $\mathfrak{R}'e\mathfrak{R}' = \tau(\mathfrak{K}'f\mathfrak{K}') = \tau(\sigma(\mathfrak{R}')f\sigma(\mathfrak{R}')) = \mathfrak{R}'\tau(f)\mathfrak{R}'$, и аналогично $\mathfrak{K}'f\mathfrak{K}' = \mathfrak{K}'\sigma(e)\mathfrak{K}'$. Отсюда

$$e \in \mathfrak{R}'e\mathfrak{R}' \ \Rightarrow \ e \in e\mathfrak{R}'\tau(f)\mathfrak{R}'e = e\mathfrak{R}\tau(f)\mathfrak{R}e \ \Rightarrow e\mathfrak{R}e \subseteq e\mathfrak{R}\tau(f)\mathfrak{R}e.$$

Вторая часть условий эквивалентности выводится точно так же. $\square$

Следствие 2. Пусть выполнены базовые условия.Тогда для Морита-эквивалентности R и K достаточно, чтобы выполнялся следующий набор соотношений:

$$\begin{aligned}
e\mathfrak{R}e &= e\mathfrak{R}'e, & f\mathfrak{K}f &= f\mathfrak{K}'f, \\
\tau(f)\mathfrak{R}e &= \tau(f)\mathfrak{R}'e, & \sigma(e)\mathfrak{K}f &= \sigma(e)\mathfrak{K}'f, \\
\sigma(e) &\in \sigma(e)\mathfrak{K}'f\mathfrak{K}'\sigma(e), & \tau(f) &\in \tau(f)\mathfrak{R}'e\mathfrak{R}'\tau(f).
\end{aligned}$$

Доказательство. Рассмотрим кольца

$$\widetilde{\mathfrak{R}} = \begin{pmatrix} e\mathfrak{R}e & e\mathfrak{R}\tau(f) \\ \tau(f)\mathfrak{R}e & \tau(f)\mathfrak{R}\tau(f) \end{pmatrix} \supseteq \widetilde{\mathfrak{R}}' = \begin{pmatrix} e\mathfrak{R}'e & e\mathfrak{R}'\tau(f) \\ \tau(f)\mathfrak{R}'e & \tau(f)\mathfrak{R}'\tau(f) \end{pmatrix},$$

$$\widetilde{\mathfrak{K}} = \begin{pmatrix} \sigma(e)\mathfrak{K}\sigma(e) & \sigma(e)\mathfrak{K}f \\ f\mathfrak{K}\sigma(e) & f\mathfrak{K}f \end{pmatrix} \supseteq \widetilde{\mathfrak{K}}' = \begin{pmatrix} \sigma(e)\mathfrak{K}'\sigma(e) & \sigma(e)\mathfrak{K}'f \\ f\mathfrak{K}'\sigma(e) & f\mathfrak{K}'f \end{pmatrix}.$$

Ясно, что σ индуцирует изоморфизм $\widetilde{\sigma} : \widetilde{\mathfrak{R}}' \xrightarrow{\cong} \widetilde{\mathfrak{K}}'$. Для модулей

$$\widetilde{U} = \begin{pmatrix} e\mathfrak{R}e \\ \tau(f)\mathfrak{R}e \end{pmatrix}, \qquad \widetilde{V} = \begin{pmatrix} \sigma(e)\mathfrak{K}f \\ f\mathfrak{K}f \end{pmatrix}$$

из леммы 3 следует $\mathrm{End}(\widetilde{U}_R) \cong \widetilde{\mathfrak{R}}$, $\mathrm{End}(\widetilde{V}_K) \cong \widetilde{\mathfrak{K}}$. Пусть

$$\widetilde{e} = \begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \widetilde{f} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & f \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$\widetilde{e}\widetilde{\mathfrak{R}}\widetilde{e} = \begin{pmatrix} e\mathfrak{R}e & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cong R, \qquad \widetilde{\mathfrak{R}}\widetilde{e} = \begin{pmatrix} e\mathfrak{R}e & 0 \\ \tau(f)\mathfrak{R}e & 0 \end{pmatrix} \cong \widetilde{U},$$

и аналогично

$$\widetilde{f}\widetilde{\mathfrak{K}}\widetilde{f} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & f\mathfrak{K}f \end{pmatrix} \cong K, \qquad \widetilde{\mathfrak{K}}\widetilde{f} = \begin{pmatrix} 0 & \sigma(e)\mathfrak{K}f \\ 0 & f\mathfrak{K}f \end{pmatrix} \cong \widetilde{V}.$$

Равенства в условиях следствия означают $\widetilde{\mathfrak{R}}\widetilde{e} \subseteq \widetilde{\mathfrak{R}}'$, $\widetilde{\mathfrak{K}}\widetilde{e} \subseteq \widetilde{\mathfrak{K}}'$. Осталось заметить,что

$$\widetilde{\mathfrak{K}}'\widetilde{f}\widetilde{\mathfrak{K}}' = \begin{pmatrix} \sigma(e)\mathfrak{K}'f\mathfrak{K}'\sigma(e) & * \\ * & * \end{pmatrix}, \qquad \widetilde{\mathfrak{R}}'\widetilde{e}\widetilde{\mathfrak{R}}' = \begin{pmatrix} * & * \\ * & \tau(f)\mathfrak{R}'e\mathfrak{R}'\tau(f) \end{pmatrix},$$

и тогда из остальных условий следствия получим

$$\widetilde{\sigma}(\widetilde{e}) \in \widetilde{\mathfrak{K}}'\widetilde{f}\widetilde{\mathfrak{K}}', \quad \widetilde{\tau}(\widetilde{f}) \in \widetilde{\mathfrak{R}}'\widetilde{e}\widetilde{\mathfrak{R}}'.$$

Остается применить теорему 2. $\square$

Теорема 3. *Пусть выполнены базовые условия и условия существования Морита-контекста. Для того чтобы кольца R и K были Морита-эквивалентными, достаточно, чтобы $\mathfrak{R}' \subseteq \mathfrak{R}e\mathfrak{R}$, $\mathfrak{K}' \subseteq \mathfrak{K}f\mathfrak{K}$.*

Доказательство. Используем тот же метод, что и в следствии предыдущей теоремы. Сохраним сделанные при его доказательстве обозначения. Тогда условия существования Морита-контекста равносильны равенствам

$$\widetilde{\mathfrak{R}} = \widetilde{\mathfrak{R}}', \quad \widetilde{\mathfrak{K}} = \widetilde{\mathfrak{K}}'.$$

Покажем, что будут Морита-эквивалентными кольца $\widetilde{\mathfrak{R}}$ и R, $\widetilde{\mathfrak{K}}$ и K. Проделаем это подробно для первой пары колец. Строим Морита-контекст

$$\begin{pmatrix} e\mathfrak{R}e & e\mathfrak{R}\tau(f) \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} e\mathfrak{R}e \\ \tau(f)\mathfrak{R}e \end{pmatrix} \longrightarrow e\mathfrak{R}e, \qquad \begin{pmatrix} e\mathfrak{R}e \\ \tau(f)\mathfrak{R}e \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} e\mathfrak{R}e & e\mathfrak{R}\tau(f) \end{pmatrix} \longrightarrow \widetilde{\mathfrak{R}},$$

определяя гомоморфизмы как матричные умножения. Тогда, очевидно, первый гомоморфизм автоматически сюръективен. Образ второго есть

$$\begin{pmatrix} e\mathfrak{R}e & e\mathfrak{R}e\mathfrak{R}\tau(f) \\ \tau(f)\mathfrak{R}e\mathfrak{R}e & \tau(f)\mathfrak{R}e\mathfrak{R}\tau(f) \end{pmatrix}.$$

Покажем, что сюръективность вытекает из условия $\mathfrak{R}' \subseteq \mathfrak{R}e\mathfrak{R}$.

$$e\mathfrak{R}\tau(f) = e\mathfrak{R}'\tau(f) \subseteq e\mathfrak{R}e\mathfrak{R}\tau(f) \subseteq e\mathfrak{R}\tau(f),$$
$$\tau(f)\mathfrak{R}e = \tau(f)\mathfrak{R}'e \subseteq \tau(f)\mathfrak{R}e\mathfrak{R}e \subseteq \tau(f)\mathfrak{R}e,$$
$$\tau(f)\mathfrak{R}\tau(f) = \tau(f)\mathfrak{R}'\tau(f) \subseteq \tau(f)\mathfrak{R}e\mathfrak{R}\tau(f) \subseteq \tau(f)\mathfrak{R}\tau(f).$$

Симметричным образом можно установить эквивалентность другой пары колец. Итак, кольца R и K Морита-эквивалентны изоморфным кольцам. □

Литература

1. Camillo V. *Morita equivalence and infinite matrix rings* // Proc. Amer. Math. Soc. – 1984. – V. 90. – № 2. – P. 186–188.
2. Abrams G. *Infinite matrix types which determine Morita equivalence* // Arch. Math. – 1986. – Bd. 46. – № 1. – S. 33–37.
3. Михалев А.В. *Изоморфизмы колец эндоморфизмов модулей, близких к свободным* // Вестн. Моск. ун-та. Сер. матем., механ. – 1989. – № 2. – С. 20-27.
4. Tronin S.N. *The Morita-contexts arising from isomorphisms between rings of endomorphisms* // Алгебра и анализ. Тезисы докл. междунар. научн. конфер., посвященной 100-летию со дня рожд. Н.Г. Чеботарева. (5–11 июня 1994 г., г. Казань). Часть 1. – Изд. Казанск. ун.-та. – 1994 г. – С. 151.
5. Басс Х. *Алгебраическая* K-*теория.* – М.: Мир, 1973. – 592 с.
6. Фейс К. *Алгебра: кольца, модули и категории.* 1. – М.: Мир, 1977. – 688 с.
7. Bolla M.L. *Isomorphism between endomorphism rings of progenerators* // J. Algebra. – 1984. – V. 87. – № 1. – P. 261–281.
8. Bolla M.L. *Isomorphism between infinite matrix ring* // Linear Algebra and Appl. – 1985. – V. 69. – P. 239-247.

Казанский государственный университет

Поступила
28.02.1995