ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2005 МАТЕМАТИКА № 3 (514)

УДК 512.647+512.817

В.А. КОЛМЫКОВ

СВОЙСТВА ПОЛОЖИТЕЛЬНОСТИ ФОРМ КАРТАНА–ТИТСА И КАЦА–МУДИ

В данной статье рассматриваются три класса форм: Картана–Титса, Каца–Муди и их обобщение. Изучается положительная определенность на всем пространстве и на его диагонали.

Формы и графы. *Форма Картана–Титса* — это квадратичная форма $B(x) = \sum b_{ij}x_ix_j$ с коэффициентами $b_{ij} = -\cos(\pi/m_{ij})$, где $m_{ij} = m_{ji} \in \overline{\mathbf{N}} = \{1, 2, \dots, \infty\}$, причем $m_{ij} = 1 \Leftrightarrow i = j$.

Форма Каца–Муди — это квадратичная форма $B(x) = \sum b_{ij}x_ix_j$ с коэффициентами b_{ij}, где $b_{ii} = 2$; $b_{ij} = 0 \Leftrightarrow b_{ji} = 0$; b_{ij} — неположительные целые числа при $i \neq j$.

Обобщающей формой назовем квадратичную форму $B(x) = \sum b_{ij}x_ix_j$ с коэффициентами b_{ij}, где $b_{ii} > 0$; $b_{ij} = 0 \Leftrightarrow b_{ji} = 0$; $b_{ij} + b_{ji} \leq -b_{ii}$ при $i \neq j$ и $b_{ij} + b_{ji} \neq 0$ (эти условия обобщают условия Картана–Титса и Каца–Муди).

Графы. Со всякой квадратичной формой можно связать граф, символизирующий наличие в ней членов вида βx_{ij}. Эта дискретная характеристика, вообще говоря, малоинформативна. Однако это не так для форм Картана–Титса, Каца–Муди и обобщающих. В этих случаях граф несет существенную, а иногда и полную информацию о некоторых геометрических или алгебраических свойствах.

Произвольной квадратичной форме $B(x) = \sum\limits_{i,j=1}^{n} b_{ij}x_ix_j$ поставим в соответствие граф G_B следующим образом: вершины G_B — это элементы множества $\{1, 2, \dots, n\}$, причем i и j смежны (обозначается $i \operatorname{ad} j$), если и только если $b_{ij}+b_{ji} \neq 0$. Форма B неразложима тогда и только тогда, когда граф G_B связен (квадратичная форма называется неразложимой, если ее матрицу нельзя перестановкой строк и такой же перестановкой столбцов привести к блочно-диагональному виду с квадратными блоками на диагонали).

Граф Кокстера, соответствующий форме Картана–Титса B, — это пара (G_B, p_B), где p_B — отображение, определенное на множестве ребер графа G_B следующим образом: ребру $\overline{ij}$ ставится в соответствие m_{ij} (порядок ребра). Если порядки всех ребер равны 3, то (G_B, p_B) принято отождествлять с G_B.

Пример. $B(x) = (x_1^2 + \dots + x_n^2) - (x_1 + x_2)x_3 - (x_3x_4 + x_4x_5 + \dots + x_{n-1}x_n)$, где $n \geq 4$. Граф Кокстера $(G_B, p_B) = G_B$ — это граф Дынкина D_n (определение простых и аффинных графов Дынкина см. в ([1], гл. VI, § 4). Если любые ненулевые коэффициенты этой формы заменить любыми ненулевыми, то для полученной формы B' имеем $G_{B'} = D_n$.

Весовым графом, соответствующим форме Каца–Муди B, назовем пару (G_B, μ_B), где μ_B — отображение, определенное на множестве ребер графа G_B следующим образом: ребру $\overline{ij}$ ставится в соответствие $|b_{ij} + b_{ji}|$ (вес ребра). Если веса всех ребер равны 2, то (G_B, μ_B) будем отождествлять с G_B.

О положительности. Неотрицательные невырожденные (т. е. положительные) и неотрицательные вырожденные формы Картана–Титса и Каца–Муди полностью описаны (напр., [1], гл. VI, § 4; [2], гл. 4). Обобщение было бы интересно с двух точек зрения. Во-первых, с целью найти единый источник двух результатов. Во-вторых, введенное автором понятие обобщающих форм и их оптимизация представляют интерес [3] с точки зрения квадратичного программирования, где случай положительности всегда является наиболее продвинутым.

При нахождении необходимых условий положительности форм Картана–Титса и Каца–Муди существенно используют свойство "монодиагональности" (коэффициенты при x_i^2 не зависят от i). Каждому ребру $l = \overline{\overline{ij}}$ графа G_B соответствует неупорядоченная пара чисел $P_l = (b_{ii}, b_{jj})$. Форму назовем моногенной, если P_l не зависит от l. Монодиагональность — частный случай моногенности.

Теорема 1. *Если неразложимая обобщающая моногенная форма положительна, то ее граф — один из следующих*: A_n, D_n, E_6, E_7, E_8 *(графы Дынкина).*

Доказательство. Морфизмом произвольных квадратичных форм $f : B \to B'$ назовем инъекцию $f : V(G_B) \to V(G_{B'})$ такую, что $b_{uv} + b_{vu} \geq b'_{f(u)f(v)} + b'_{f(v)f(u)}$. Если морфизм существует, то будем писать $B \succeq B'$. В случае обобщающих форм из этого следует, что G_B — подграф графа $G_{B'}$.

Квадратичную форму $B(x) = \sum b_{ij}x_ix_j$ назовем доминантной, если выполнены следующие равносильные условия:

1) после приведения подобных оказывается, что все коэффициенты при смешанных членах меньше или равны нулю;

2) $B(x) \geq B(|x|)$ для любого x (здесь $|x|$ означает вектор, получающийся из x заменой всех координат их модулями).

Для доминантных форм из $B \succeq B' \geq 0$ ($B \succeq B' > 0$) следует $B \geq 0$ (соответственно $B > 0$).

Действительно, для доминантных форм имеем: если $B(x) \geq 0$ (> 0) для всех x с неотрицательными координатами, то $B \geq 0$ (соответственно $B > 0$). Пусть f — морфизм произвольных форм, $\overline{f}$ — соответствующее вложение пространств, на которых эти формы определены (т. е. $\overline{f}$ приписывает вектору еще несколько координат, которые все равны нулю и соответствуют вершинам, не принадлежащим образу отображения f). Если все координаты вектора x неотрицательны, то $B(x) \geq B'(\overline{f}(x))$. Если формы доминантны, то $B(x) \geq B(|x|) \geq B'(\overline{f}|x|)$, а последнее выражение неотрицательно (соответственно положительно).

Для формы B положим $b = \max b_{ii}$. Если H — граф Кокстера, все порядки ребер которого равны 3 (можно сказать просто "граф", если учесть отождествление, принятое в начале статьи), то через K_H обозначим форму Картана–Титса, которой он соответствует. Если B — форма, удовлетворяющая условиям теоремы, и H — подграф графа G_B, то $bK_H \succeq B$. Поэтому в G_B нет подграфов $\widehat{A}$, $\widehat{D}$, $\widehat{E}$ (ведь формы, соответствующие аффинным графам Дынкина, неположительны). Первое (вместе с неразложимостью формы) означает, что G_B — дерево, второе — что это дерево либо A_n, либо трилистник (т. е. дерево, у которого ровно одна вершина степени 3 и от нее отходят три простых цепи длин $p \leq q \leq r$ соответственно). Поскольку $\widehat{E}_6$ отсутствует среди подграфов в этом трилистнике, то $p = 1$. Отсутствие $\widehat{E}_7$ влечет за собой $q \leq 2$. Если $q = 1$, то $G_B = D_n$. Если $q = 2$, то отсутствие $\widehat{E}_8$ означает $r \leq 4$, т. е. $G_B = E_i$ ($i = 6, 7, 8$). □

Положительность на диагонали пространства. В теории представлений колчанов значительный интерес ([4]) представляют зоны B^+ и B^- знакопостоянства и нулевой конус B^0 формы Картана–Титса B. В настоящее время почти ничего не известно о расположении этих зон в пространстве. В [5] найдены формулы, выражающие величину "отклонения" конуса B^0 от диагонали пространства, но только в случае, когда сужение формы B на диагональ положительно и порядки всех ребер равны трем. Сейчас мы полностью опишем неразложимые формы Картана–Титса и Каца–Муди, положительные на диагонали пространства. Выделение таких форм интересно еще и тем, что для любого множества M в M^n существует всего три канонических[1] подмножества: пустое множество, диагональ и само M^n.

Теорема 2. 1) *Пусть B — неразложимая форма Картана–Титса. Ее сужение на диагональ является положительно-определенной формой тогда и только тогда, когда соответствующий граф Кокстера является деревом, у которого либо одно ребро порядка $m \neq \infty$, а остальные ребра — порядка 3, либо два ребра порядка 4, а остальные — порядка 3.*

2) *Пусть B — неразложимая форма Каца–Муди. Ее сужение на диагональ является положительно-определенной формой тогда и только тогда, когда соответствующий весовой граф является деревом, у которого веса всех ребер равны 2, за исключением, быть может, одного, равного 3.*

3) *Пусть B — неразложимая обобщающая форма. Если ее сужение на диагональ является положительно-определенной формой, то граф G_B является деревом.*

Доказательство. Пусть χ — эйлерова характеристика графа G_B ([6], гл. VI, § 6).

1) Обозначим через r_i количество ребер графа Кокстера (G_B, p_B), имеющих порядок i. Положим $c_i = 2\cos\frac{\pi}{i} - 1$ и $e = (1, \ldots, 1)$. Тогда

$$B(e) = |V(G_B)| - \sum 2\cos\frac{\pi}{p(l)} = \chi - \sum c_i r_i.$$

Отметим три важных свойства коэффициентов c_i:

$$0 = c_3 < c_4 < \cdots < c_{+\infty} = 1, \tag{1}$$

$$c_4 + c_5 = (\sqrt{2} - 1) + (\sqrt{5} - 1)/2 > 1, \tag{2}$$

$$3c_4 > 1 > 2c_4, \quad 2c_i > 1 \ \text{ при } \ i \geq 5. \tag{3}$$

Для связного графа $\chi \leq 1$. Учитывая это и свойство (1), получаем $B(e) > 0$ тогда и только тогда, когда $\chi = 1$ и $\sum c_i r_i < 1$. А для связного графа $\chi = 1$, если и только если этот граф является деревом.

Решим неравенство $\sum c_i r_i < 1$. Из (1) следует, что r_3 произвольно, а $r_{+\infty} = 0$. Для остальных r_i из (1) и (2) следует, что все они равны нулю, кроме, быть может, одного. Отсюда и из (3) вытекает, что $r_4 \in \{0; 1; 2\}$ и $r_i \in \{0; 1\}$ при $4 < i < +\infty$. Итак, из рассматриваемого неравенства следует совокупность

$$\left[\begin{array}{l} r_4 \leq 2, \ (r_5, \ldots) = (0, \ldots, 0, 0, 0, \ldots), \ r_\infty = 0; \\ r_4 = 0, \ (r_5, \ldots) = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots), \ r_\infty = 0. \end{array}\right.$$

Обратное следствие тривиально.

2) Пусть (G_B, μ_B) имеет r ребер. Их массы соответственно равны $m_1, \ldots, m_r$. Тогда $B(e) = 2\chi - \sum\limits_{i=1}^{r}(m_i - 2)$. Поэтому $\chi > 0$, т. е. $\chi = 1$, а сумма равна 0 или 1.

[1]Неформально понятие *канонического* подмножества можно пояснить на языке передачи информации. Предположим, описание некоторого множества M мы послали получателю, и им оно адекватно воспринято. Может, однако, случиться так, что отдельные элементы множества восприняты неадекватно из-за смысловой или помеховой флуктуации. Это повлечет неправильное понимание и большинства подмножеств M^n, за исключением трех канонических подмножеств. Теперь сформулируем это формально. Всякое отображение $f : M \to M$ известным образом индуцирует отображение $f^{\times n} : M^n \to M^n$. Подмножество $K \subseteq M^n$ назовем каноническим, если для любой биекции $\phi : M \to M$ имеем $\phi^{\times n}(K) = K$.

3) Имеем

$$B(e)=\sum b_{ij}=\sum b_{ii}+\sum_{i\,\mathrm{ad}\,j}(b_{ij}+b_{ji})\le\sum b_{ii}-\sum_{i\,\mathrm{ad}\,j}\frac{b_{ii}+b_{jj}}{2}=$$
$$=\sum b_{ii}+\sum b_{ii}\frac{\deg i}{2}=\sum b_{ii}\frac{2-\deg i}{2}\le\min b_{ii}\sum\frac{2-\deg i}{2}=\chi\min b_{ii}.$$

Отсюда $\chi>0$, т.е. $\chi=1$. □

Литература

1. Бурбаки Н. *Элементы математики. Группы и алгебры Ли.* – М.: Мир, 1972. – 334 с.
2. Кац В. *Бесконечномерные алгебры Ли.* – М.: Мир, 1993. – 425 с.
3. Колмыков В.А. *Минимизация и максимизация квадратичных форм с сильным диагональным преобладанием. Сверхвогнутость и дискретные колебания* // Сиб. журн. индустр. матем. – 2001. – Т. IV. – № 1. – С. 102–115.
4. Бернштейн И.Н., Гельфанд И.М., Пономарев В.А. *Функторы Кокстера и теорема Габриэля* // УМН. – 1973. – Т. 28. – Вып. 2. – С. 19–33.
5. Колмыков В.А. *Нулевой конус формы Картана–Титса и графы Дынкина* // Сб. тр. семин. под рук. И.Р. Шафаревича. – М.: Фонд матем. образ. и просвещ., 2000. – Вып. 2. – С. 3–14.
6. Масси У., Столлингс Дж. *Алгебраическая топология. Введение.* – М.: Мир, 1977. – 344 с.

Воронежский государственный университет

Поступила 25.06.2002