ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2006 МАТЕМАТИКА № 2 (525)

УДК 517.983

Г.Г. СКОРИК

ОЦЕНКА ПОГРЕШНОСТИ МЕТОДА СРЕДНИХ ФУНКЦИЙ В ЗАДАЧЕ ЧИСЛЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ ЗАШУМЛЕННОЙ ФУНКЦИИ

1. Постановка задачи

Изучается задача устойчивой аппроксимации производной

$$(Ty)(t) \equiv \frac{d^m y(t)}{dt^m} = x(t), \quad m \geq 1, \tag{1}$$

действующей из пространства $L_p(-\infty,\infty)$ в $L_r(-\infty,\infty)$, $1 \leq p, r \leq \infty$, когда функция y задана своим δ-приближением y_δ, $\|y - y_\delta\|_{L_p} \leq \delta$ (здесь и далее в случае L_∞ будет подразумеваться C). Регуляризующее семейство операторов R_α конструируется на основе метода средних функций [1], [2]

$$R_\alpha y_\delta(t) = \int_{|t-s|\leq\alpha} \frac{d^m \omega_\alpha(t,s)}{dt^m} y_\delta(s)\,ds, \tag{2}$$

где $\omega_\alpha(t,s)$ — семейство усредняющих функций, m раз, $m \leq \infty$, непрерывно дифференцируемых по t и s, удовлетворяющих некоторым условиям (см. п. 2).

В качестве множества равномерной регуляризации используется следующий класс функций:

$$M_k^n = \{y : y \in L_p(-\infty,\infty),\ y^{(m+n)} \in L_q(-\infty,\infty),\ \|y^{(m+n)}\|_{L_q} \leq k\},$$

где $1 \leq q \leq \infty$. Погрешность метода аппроксимации (регуляризации) R на классе M_k^n для задачи дифференцирования (1) характеризуется величиной

$$\gamma_\delta(T; R; M_k^n) = \sup\{\|Ry_\delta - Ty\|_{L_r} : \|y - y_\delta\|_{L_p} \leq \delta,\ y \in M_k^n,\ y_\delta \in L_p(-\infty,\infty)\}. \tag{3}$$

Метод средних функций в задаче дифференцирования был предложен в [1], где при $m = 1$, $n = 1$, $p = q = r = \infty$ для функции Соболева $\omega_\alpha(t,s)$ была вычислена мажорантная оценка величины $\gamma_\delta(T; R_\alpha; M_k^n)$ и доказана оптимальность метода по порядку. В [3] изучен случай $m = 1$, $p = 2$ и также получена оценка сверху величины γ_δ.

В п. 2 дается оценка сверху погрешности метода средних функций, т. е. величины (3), и устанавливается его оптимальность по порядку при некоторой связи $\alpha = \alpha(\delta)$ и $r \geq p, q$. В п. 3 доказывается, что при $r = \infty$ полученная в п. 2 мажорантная оценка является точной, т. е. получена точная формула для величины максимальной погрешности метода средних функций на классе M_k^n. В частном случае ($p = q = r = \infty$) аналогичный результат для метода средних функций был получен ранее в [4].

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 03-01-00099).

2. Оценка погрешности метода сверху

Пусть $\{\omega_\alpha(t,s)\}$ — параметризованное семейство функций, обладающее свойствами:

1. $\omega_\alpha(t,s)$ непрерывно дифференцируема по совокупности переменных до m-го порядка включительно (в частности, бесконечно дифференцируема);
2. носителем функции $\omega_\alpha(t,s)$ является множество $|t-s| \le \alpha$;
3. $\forall t, s \in \mathbb{R} \quad \int\limits_{|t-s|\le\alpha} \omega_\alpha(t,s)\, ds = \int\limits_{|t-s|\le\alpha} \omega_\alpha(t,s)\, dt = 1.$

При этих условиях функция

$$y_\alpha(t) = \int_{|t-s|\le\alpha} \omega_\alpha(t,s) y(s)\, ds \tag{4}$$

непрерывно дифференцируема m раз и аппроксимирует y при $\alpha \to 0$ в пространстве L_p ([5], с. 18–19).

Функция (4) называется средней функцией от y. Нетрудно проверить, что

$$\frac{d^m y_\alpha(t)}{dt^m} = \int_{|t-s|\le\alpha} \frac{d^m \omega_\alpha(t,s)}{dt^m} y(s)\, ds.$$

Это соотношение вместе с упомянутым свойством аппроксимации средней функции дает основание конструировать регуляризатор для задачи (1) в форме (2).

Пусть $\omega_\alpha(t,s) = c_\alpha \omega(\frac{t-s}{\alpha})$, где функция $\omega(x)$ m раз непрерывно дифференцируема и имеет своим носителем отрезок $[-1,1]$, т. е. $\omega(x) = 0$ при $x \notin [-1,1]$.

Величина c_α определяется из условия, что

$$\int_{|t-s|\le\alpha} \omega_\alpha(t,s)\, ds = 1 \Leftrightarrow \int_{|t-s|\le\alpha} c_\alpha \omega\left(\frac{t-s}{\alpha}\right) ds = 1 \Leftrightarrow \int_{-1}^{1} \alpha c_\alpha \omega(x)\, dx = 1 \Leftrightarrow c_\alpha = \frac{1}{\alpha h},$$

где $h = \int\limits_{-1}^{1} \omega(x)\, dx$.

При этих условиях регуляризатор (2) принимает вид

$$R_\alpha y(t) = c_\alpha \int_{t-\alpha}^{t+\alpha} \frac{d^m}{dt^m} \omega\left(\frac{t-s}{\alpha}\right) y(s)\, ds = \frac{1}{\alpha^{m+1} h} \int_{t-\alpha}^{t+\alpha} \omega^{(m)}\left(\frac{t-s}{\alpha}\right) y(s)\, ds.$$

Введем обозначения $h_i = \int\limits_{-1}^{1} \omega(x) x^i\, dx$, $\nu_m = \|\omega^{(m)}\|_{L_{\frac{1}{1-p^{-1}+q^{-1}}}}$, $\mu_n = \|\Omega\|_{L_{\frac{1}{1-p^{-1}+r^{-1}}}}$, где

$$\Omega(x) = \begin{cases} 0, & |x| > 1; \\ \int\limits_{x}^{\operatorname{sgn} x} (x-y)^{n-1} \omega(y)\, dy, & |x| \le 1. \end{cases}$$

Теорема 1. *Пусть функция $\omega \in C^{(m)}(-\infty,\infty)$ имеет своим носителем отрезок $[-1,1]$ и (в случае $n > 1$) $h_i = 0$ для любого i, $1 \le i \le n-1$. Пусть $r \ge p$, $r \ge q$. Тогда справедлива оценка*

$$\gamma_\delta(T; R_\alpha; M_k^n) \le \frac{\delta \nu_m}{h \alpha^{m+p^{-1}-r^{-1}}} + \frac{k \mu_n \alpha^{n+r^{-1}-q^{-1}}}{h(n-1)!}. \tag{5}$$

Доказательство. В неравенстве

$$\|R_\alpha y_\delta - Ty\| \le \|R_\alpha y_\delta - R_\alpha y\| + \|R_\alpha y - Ty\|$$

оценим каждое слагаемое в правой части. При фиксированном t для первой разности имеем

$$R_\alpha y_\delta(t) - R_\alpha y(t) = \frac{1}{\alpha^{m+1} h} \int_{t-\alpha}^{t+\alpha} \omega^{(m)}\left(\frac{t-s}{\alpha}\right) (y_\delta(s) - y(s))\, ds, \tag{6}$$

а для второй

$$R_\alpha y(t) - Ty(t) = \frac{1}{\alpha h}\int_{t-\alpha}^{t+\alpha}\omega\Big(\frac{t-s}{\alpha}\Big)\Big(\sum_{i=1}^{n-1}\frac{y^{(m+i)}(t)}{i!}(s-t)^i + F_n(s)\Big)\,ds,$$

где $F_n(s) = \frac{1}{(n-1)!}\int\limits_t^s y^{(m+n)}(x)(s-x)^{n-1}\,dx$ — остаточный член разложения функции $y^{(m)}$ в ряд Тейлора. Далее

$$R_\alpha y(t) - Ty(t) = \frac{1}{\alpha h}\sum_{i=1}^{n-1}\Big(\frac{y^{(m+i)}(t)}{i!}\int_{t-\alpha}^{t+\alpha}\omega\Big(\frac{t-s}{\alpha}\Big)(s-t)^i\,ds\Big) + \int_{t-\alpha}^{t+\alpha}\omega\Big(\frac{t-s}{\alpha}\Big)F_n(s)\,ds =$$

$$= \frac{1}{\alpha h}\sum_{i=1}^{n-1}\Big(\frac{y^{(m+i)}(t)\alpha^{i+1}(-1)^{i+1}}{i!}h_i\Big) + \int_{t-\alpha}^{t+\alpha}\omega\Big(\frac{t-s}{\alpha}\Big)F_n(s)\,ds.$$

По условию теоремы $h_i = 0$, поэтому

$$R_\alpha y(t) - Ty(t) = \frac{1}{\alpha h}\int_{t-\alpha}^{t+\alpha}\omega\Big(\frac{t-s}{\alpha}\Big)F_n(s)\,ds =$$

$$= \frac{1}{\alpha h(n-1)!}\int_{t-\alpha}^{t+\alpha}\omega\Big(\frac{t-s}{\alpha}\Big)\int_t^s y^{(m+n)}(x)(s-x)^{n-1}\,dx\,ds.$$

После замены переменных

$$s = t-\alpha s_1,\quad ds = -\alpha ds_1;\qquad x = t-\alpha x_1,\quad dx = -\alpha dx_1$$

приходим к формуле

$$A_n(R_\alpha y(t) - Ty(t)) = \int_0^1\int_0^{s_1}\omega(s_1)y^{(m+n)}(t-\alpha x_1)(x_1-s_1)^{n-1}\,dx_1\,ds_1 -$$

$$-\int_{-1}^0\int_{s_1}^0\omega(s_1)y^{(m+n)}(t-\alpha x_1)(x_1-s_1)^{n-1}\,dx_1\,ds_1 = \int_0^1 y^{(m+n)}(t-\alpha x_1)\int_{x_1}^1\omega(s_1)(x_1-s_1)^{n-1}\,ds_1\,dx_1 -$$

$$-\int_{-1}^0 y^{(m+n)}(t-\alpha x_1)\int_{-1}^{x_1}\omega(s_1)(x_1-s_1)^{n-1}\,ds_1\,dx_1 = \int_{-1}^1 y^{(m+n)}(t-\alpha x_1)\Omega(x_1)\,dx,$$

$$\frac{1}{A_n} = \frac{\alpha^n}{h(n-1)!}.$$

Окончательно получаем представление

$$R_\alpha y(t) - Ty(t) = \frac{\alpha^{n-1}}{h(n-1)!}\int_{t-\alpha}^{t+\alpha}\Omega\Big(\frac{t-x}{\alpha}\Big)y^{(m+n)}(x)\,dx. \tag{7}$$

В соотношениях (6) и (7) обе разности являются свертками некоторых функций. Следовательно, для оценки норм разностей можно использовать одинаковый подход.

Пусть $\mathcal{F} : L_p \to L_q$ — оператор свертки, действующий по правилу

$$\mathcal{F}f(t) \equiv g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} W(t-s)f(s)\,ds.$$

Тогда

$$\|g\|_{L_q} \le \|\mathcal{F}\|_{L_p\to L_q}\|f\|_{L_p}.$$

Для завершения доказательства теоремы понадобится известная импликация при $p \le q \le \infty$

$$W \in L_{(1-p^{-1}+q^{-1})^{-1}} \Rightarrow \|\mathcal{F}\|_{L_p\to L_q} \le \|W\|_{(1-p^{-1}+q^{-1})^{-1}} \quad (\|\mathcal{F}\|_{L_p\to C} = \|W\|_L \ \text{ при } \ q=\infty). \tag{8}$$

Из соотношений (6)–(8) получаем неравенства

$$\|R_\alpha y_\delta(t)-R_\alpha y(t)\|_{L_r}\le\frac{1}{\alpha^{m+1}h}\|\omega^{(m)}(s/\alpha)\|_{L_{\frac{1}{1-p^{-1}+r^{-1}}}}\|y-y_\delta\|_{L_p}\le\frac{\delta\nu_m}{h\alpha^{m+p^{-1}-r^{-1}}},$$

$$\|R_\alpha y(t)-Ty(t)\|_{L_r}\le\frac{\alpha^{n-1}}{h(n-1)!}\|\Omega(s/\alpha)\|_{L_{\frac{1}{1-q^{-1}+r^{-1}}}}\|y^{(m+n)}\|_{L_q}\le\frac{k\mu_n\alpha^{m-q^{-1}+r^{-1}}}{h(n-1)!}.$$

Их объединение дает оценку

$$\|R_\alpha y_\delta(t)-Ty(t)\|_{L_r}\le\frac{\delta\nu_m}{h\alpha^{m+p^{-1}-r^{-1}}}+\frac{k\mu_n\alpha^{m-q^{-1}+r^{-1}}}{h(n-1)!}$$

для любых $y\in M_k^n,\ y_\delta\in L_p:\|y-y_\delta\|_{L_p}\le\delta$. Поэтому

$$\gamma_\delta(T;R_\alpha;M_k^n)\le\frac{\delta\nu_m}{h\alpha^{m+p^{-1}-r^{-1}}}+\frac{k\mu_n\alpha^{n+r^{-1}-q^{-1}}}{h(n-1)!}.\quad\square$$

3. Исследование точности мажорантной оценки

Покажем, что при $r=\infty$ в мажорантной оценке (5) реализуется равенство, т.е. оценка является точной.

Теорема 2. *Пусть функция $\omega\in C^{(m)}(-\infty,\infty)$ имеет своим носителем отрезок $[-1,1]$ и (в случае $n>1$) $h_i=0$ для $1\le i\le n-1$. Пусть $1\le p\le\infty$, $1<q\le\infty$, $r=\infty$.*

Тогда для оператора $T:L_p\to C$ из (1) и регуляризующего алгоритма (2) справедливо

$$\gamma_\delta(T;R_\alpha;M_k^n)=\frac{\delta\nu_m}{h\alpha^{m+p^{-1}}}+\frac{k\mu_n\alpha^{n-q^{-1}}}{h(n-1)!}.$$

Доказательство. Зафиксируем $t\in\mathbb{R}$ и введем обозначения

$$A=\frac{\nu_m}{h\alpha^{m+p^{-1}}},\qquad B=\frac{\mu_n\alpha^{m-q^{-1}}}{h(n-1)!}.$$

Достаточно доказать, что

$$\forall\varepsilon>0\ \exists y^\varepsilon\in M_k^n,\ y_\delta^\varepsilon\in L_p:(R_\alpha y_\delta^\varepsilon)(t)-(Ty^\varepsilon)(t)>A\delta+Bk-\varepsilon.$$

Действительно, тогда неравенство $\|(R_\alpha y_\delta^\varepsilon)(t)-(Ty^\varepsilon)(t)\|_C>A\delta+Bk-\varepsilon$ выполняется для любого ε, следовательно,

$$\gamma_\delta(T;R_\alpha;M_k^n)=\sup\{\|(R_\alpha y_\delta^\varepsilon)(t)-(Ty^\varepsilon)(t)\|_C:y\in M_k^n,\ y_\delta\in L_p\}\ge A\delta+Bk,$$

а поскольку по теореме 1 $\gamma_\delta(T;R_\alpha;M_k^n)\le A\delta+Bk$, то теорема 2 будет доказана.

Распишем разность

$$(R_\alpha y_\delta)(t)-(Ty)(t)=\big((R_\alpha y_\delta)(t)-(R_\alpha y)(t)\big)+\big((R_\alpha y)(t)-(Ty)(t)\big).$$

Используем формулы (6) и (7) для этих разностей. Согласно (8) существует такая функция $\overline{y}$, что $\|\overline{y}^{(m+n)}\|_{L_q}\le k$ и

$$\frac{\alpha^{n-1}}{h(n-1)!}\int_{t-\alpha}^{t+\alpha}\Omega\Big(\frac{t-x}{\alpha}\Big)\overline{y}^{(m+n)}(x)\,dx\ge\Big\|\frac{\alpha^{n-1}}{h(n-1)!}\Omega(x/\alpha)\Big\|_{L_{\frac{1}{1-q^{-1}}}}\|\overline{y}^{(m+n)}\|_{L_q}-\varepsilon/4\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow(R_\alpha\overline{y})(t)-(T\overline{y})(t)\ge Bk-\varepsilon/4.$$

Покажем, что можно взять функцию $y\in M_k^n$ с $(m+n)$-й производной, сколь угодно близкой к $\overline{y}^{(m+n)}$ по норме L_q. Для этого достаточно построить функцию y с конечным носителем. Тогда она автоматически будет принадлежать L_p.

Обозначим $y_0 = \overline{y}$ и построим последовательность функций $\{y_i\}_{i=1}^{m+n}$ таких, что $\|y_i^{(m+n)} - y_{i-1}^{(m+n)}\|_{L_q} \leq \varepsilon$ и носителем $y_i^{(m+n-i)}$ является конечный отрезок. У функции $y_0^{(m+n)} = \overline{y}^{(m+n)}$ носителем является конечный отрезок $[t-\alpha,\ t+\alpha]$. Пусть построена функция y_i с носителем $[a,\ b]$ у $(m+n-i)$-й производной. Можно записать

$$y_i^{(m+n-i-1)}(x) = \frac{1}{i!}\int_a^x y_i^{(m+n)}(s)(x-s)^i\,ds.$$

Обозначим $z(x) = y_i^{(m+n-i-1)}(\frac{x-a}{N}+a)$, тогда $z^{(i+1)}(x) = \frac{1}{N^{i+1}} y_i^{(m+n)}(\frac{x-a}{N}+a)$ и

$$\|z^{(i+1)}\|_{L_q} = \frac{1}{N^{i+1}}\left(\int_a^{N(b-a)+a}\left|y_i^{(m+n)}\left(\frac{x-a}{N}+a\right)\right|^q dx\right)^{\frac{1}{q}} = \\ = \frac{1}{N^{i+1-q^{-1}}}\left(\int_a^b |y_i^{(m+n)}(x)|^q\,dx\right)^{\frac{1}{q}} = \frac{1}{N^{i+1-q^{-1}}}\|y_i^{(m+n)}\|_{L_q}.$$

Поскольку $q>1$, то можно выбрать такое N, что $\|z^{(i+1)}\|_{L_q} \leq \varepsilon$. Тогда возьмем $y_{i+1}^{(m+n-i-1)}(x) = y_i^{(m+n-i-1)}(x) - z(x)$. При $x \geq N(b-a)+a$ $\ y_{i+1}^{(m+n-i)}(x) = 0$ и $y_{i+1}^{(m+n-i-1)}(N(b-a)+a) = 0$ по построению. Следовательно, носителем $y_{i+1}^{(m+n-i-1)}$ будет отрезок $[a, N(b-a)+a]$.

Продолжая такие построения до $i = m+n$, получим функцию y_{m+n}, имеющую конечный носитель и, следовательно, принадлежащую L_p, при этом $\|y_{m+n}^{(m+n)} - \overline{y}^{(m+n)}\|_{L_q} \leq (m+n)\varepsilon$. Если $\|y_{m+n}^{(m+n)}\|_{L_q} \leq k$, то $y_{m+n} \in M_k^n$. В противном случае возьмем функцию $y = y_{m+n}k/\|y_{m+n}^{(m+n)}\|_{L_q}$, для которой выполняется неравенство

$$\|y^{(m+n)} - \overline{y}^{(m+n)}\|_{L_q} \leq \|y^{(m+n)} - y_{m+n}^{(m+n)}\|_{L_q} + \|y_{m+n}^{(m+n)} - \overline{y}^{(m+n)}\|_{L_q} \leq \\ \leq (\|y_{m+n}^{(m+n)}\|_{L_q} - k) + (m+n)\varepsilon \leq 2(m+n)\varepsilon.$$

В любом случае, взяв сколь угодно малое ε, получим сколь угодно близкие производные в пространстве L_p.

Следовательно, существует такая функция $y \in M_k^n$, что $\|\overline{y}^{(m+n)} - y^{(m+n)}\|_{L_q} \leq \varepsilon/(4B)$. Тогда для этой функции выполняется соотношение

$$(R_\alpha y)(t) - (Ty)(t) = \frac{\alpha^{n-1}}{h(n-1)!}\int_{t-\alpha}^{t+\alpha}\Omega\left(\frac{t-x}{\alpha}\right)\left(\overline{y}^{(m+n)}(x) - (\overline{y}^{(m+n)}(x) - y^{(m+n)}(x))\right)dx \geq \\ \geq Bk - \varepsilon/4 - (B\varepsilon/(4B)) = Bk - \varepsilon/2. \quad (9)$$

В силу (8) существует такая функция $y_\delta \in L_p$, что $\|y_\delta - y\|_{L_p} \leq \delta$ и

$$\frac{1}{\alpha^{m+1}h}\int_{t-\alpha}^{t+\alpha}\omega^{(m)}\left(\frac{t-s}{\alpha}\right)(y_\delta(s) - y(s))\,ds \geq \left\|\frac{1}{\alpha^{m+1}h}\omega^{(m)}(x/\alpha)\right\|_{L_{\frac{1}{1-p^{-1}}}}\|y_\delta - y\|_{L_p} - \varepsilon/2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (R_\alpha y_\delta)(t) - (R_\alpha y)(t) \geq A\delta - \varepsilon/2. \quad (10)$$

Объединяя неравенства (9) и (10), получаем

$$(R_\alpha y_\delta)(t) - (Ty)(t) \geq A\delta + Bk - \varepsilon. \quad \square$$

4. Оптимальность по порядку

Выберем параметр α регуляризатора (2) так, чтобы правая часть неравенства (5) была наименьшей. Для этого надо взять

$$\alpha = \alpha(\delta) = \left(\frac{\delta\,\nu_m(m+p^{-1}-r^{-1})(n-1)!}{k\mu_n(n+r^{-1}-q^{-1})}\right)^{\frac{1}{n+m+p^{-1}-q^{-1}}}.$$

При этом значении параметра α

$$\gamma_\delta(T; R_{\alpha(\delta)}; M_k^n) \leq C_{m,n}^{p,q,r}(\omega)\delta^{n_1} k^{m_1}, \tag{11}$$

где $n_1 = \frac{n+r^{-1}-q^{-1}}{m+n+p^{-1}-q^{-1}}$, $m_1 = \frac{m+p^{-1}-r^{-1}}{m+n+p^{-1}-q^{-1}}$

$$C_{m,n}^{p,q,r}(\omega) = \nu_m^{n_1} \mu_n^{m_1} \frac{(n_1/m_1)^{m_1} + (m_1/n_1)^{n_1}}{((n-1)!)^{m_1} h}.$$

Напомним определения оптимального и оптимального по порядку регуляризаторов [6].

Регуляризующий оператор R_δ задачи (1) называется оптимальным регуляризатором на множестве M_k^n, если на нем реализуется нижняя грань

$$\inf_{R \in B(Y \to X)} \gamma_\delta(T; R; M_k^n) = \Omega_\delta(T; M_k^n),$$

где $B(Y \to X)$ — пространство линейных ограниченных операторов из Y в X.

Величина $\Omega_\delta(T; M_k^n)$ — погрешность оптимального метода для задачи (1) на классе M_k^n при заданном уровне погрешности δ. Можно сказать, что R_δ — наилучший из всевозможных линейных регуляризаторов.

Регуляризующее семейство операторов $\{R_\delta\}$ называется оптимальным по порядку на множестве M_k^n, если

$$\frac{\gamma_\delta(T; R_\delta; M_k^n)}{\Omega_\delta(T; M_k^n)} \leq D < \infty,$$

где $D \geq 1$, $D = 1$ соответствует оптимальному алгоритму.

Известно, что из обобщенного неравенства Колмогорова (напр., [7]) вытекает соотношение для оптимального регуляризатора R_δ^* задачи (1)

$$\Omega_\delta(T; M_k^n) = K_{m,n}^{p,q,r} \delta^{n_1} k^{m_1}, \tag{12}$$

где константа $K_{m,n}^{p,q,r}$ зависит как от m, n, так и от p, q, r. В [7] приведена таблица значений величин m, n, p, q, r, для которых найдена константа $K_{m,n}^{p,q,r}$.

При сравнении (11) и (12) видно, что метод средних функций будет оптимальным по порядку при всех значениях параметров. Поскольку оптимальные регуляризаторы для (1) явно построены далеко не для всех значений параметров, то практическая ценность метода средних функций очевидна. Его можно использовать как универсальный регуляризующий алгоритм для производных любых степеней и в различных пространствах. При этом можно ожидать, что погрешность будет мало отличаться от оптимальной при любом уровне погрешности δ.

Приведем величину отношения $C_{m,n}^{p,q,r}(\omega)/K_{m,n}^{p,q,r}$ для некоторых входящих параметров и усредняющих ядер ω.

Для случая соболевского ядра [5] $\omega(x) = \exp\{x^2/(x^2-1)\}$, $p = q = r = \infty$, при $m = 1,\ 2$, $n = 1$ соответствующие константы принимают следующие значения:

$$\begin{aligned}
&C_{1,1}^{\infty,\infty,\infty}(\omega) \approx 1{,}4889, \quad K_{1,1}^{\infty,\infty,\infty} \approx 1{,}4142, \quad C_{1,1}^{\infty,\infty,\infty}(\omega)/K_{1,1}^{\infty,\infty,\infty} \approx 1{,}0528,\\
&C_{2,1}^{\infty,\infty,\infty}(\omega) \approx 1{,}7578, \quad K_{2,1}^{\infty,\infty,\infty} \approx 1{,}4422, \quad C_{2,1}^{\infty,\infty,\infty}(\omega)/K_{2,1}^{\infty,\infty,\infty} \approx 1{,}2188.
\end{aligned}$$

В случае $p = q = r = 2$ известен результат $K_{m,n}^{2,2,2} = 1$, $m, n \geq 1$. Приведем таблицу значений $C_{m,1}^{2,2,2}(\omega)$ для $1 \leq m \leq 10$ в случае, когда ядро ω близко к гауссовому

$$\omega(x) = e^{\frac{20\,x^2}{x^{20}-1}}.$$

m	1	2	3	4	5
$C^{2,2,2}_{m,1}$	1,5958	1,6082	1,6422	1,6917	1,7481
m	6	7	8	9	10
$C^{2,2,2}_{m,1}$	1,8071	1,8667	1,9263	1,9876	2,0671

Как видно из этих примеров, погрешность метода средних функций не сильно отличается от погрешности оптимального метода.

Литература

1. Васин В.В. *Регуляризация задачи численного дифференцирования* // Матем. зап. Уральский ун-т. – 1969. – Т. 7. – № 2. – С. 29–33.
2. Васин В.В. *Об устойчивом вычислении производной в пространстве* $C(-\infty,\infty)$ // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. – 1973. – Т. 13. – № 6. – С. 1383–1389.
3. Groetsch C.W. *Optimal order of accuracy in Vasin's method for differentiation of noisy functions* // J. Optimiz. Theory Appl. – 1992. – V. 74. – № 2. – P. 373–378.
4. Скорик Г.Г. *О наилучшей оценке погрешности метода усредняющих ядер в задаче дифференцирования зашумленной функции* // Изв. вузов. Математика. – 2004. – № 3. – С. 76–80.
5. Соболев С.Л. *Некоторые применения функционального анализа в математической физике.* – Новосибирск: Изд-во СО АН СССР, 1962. – 255 с.
6. Иванов В.К., Васин В.В., Танана В.П. *Теория линейных некорректных задач и ее приложения.* – М.: Наука, 1978. – 206 с.
7. Арестов В.В. *Приближение неограниченых операторов ограниченными и родственные экстремальные задачи* // УМН. – 1996. – Т. 51. – Вып. 6. – С. 89–124.

Уральский государственный университет

Поступила 27.09.2005