ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2005 МАТЕМАТИКА № 4 (515)

УДК 517.977

Ю.А. КОНЯЕВ

КВАЗИРЕГУЛЯРНАЯ АСИМПТОТИКА РЕШЕНИЯ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННОЙ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ МАТРИЧНЫХ УРАВНЕНИЙ

Предлагается отличный от ранее известных метод построения квазирегулярной асимптотики решения (когда его сингулярности, отражающие структуру пограничного слоя, выписываются в замкнутой аналитической форме, а остальные компоненты асимптотики регулярно зависят от малого параметра) сингулярно возмущенных начальных задач для линейных систем дифференциальных матричных уравнений, возникающих при изучении некоторых прикладных задач.

Теорема 1. *Сингулярно возмущенная задача Коши в* R^n

$$\varepsilon\dot{Z} = A(t)Z + ZB(t), \quad Z(0,\varepsilon) = Z^0 \tag{1}$$

$(A(t), B(t) \in C^\infty[0,1]$, $A(t)$, $B(t)$, Z — $n\times n$-*матрицы*) *в случае, если спектры* $\{\lambda_{Aj}(t)\}_1^n$ *и* $\{\lambda_{Bj}(t)\}_1^n$ *матриц* $A(t)$ *и* $B(t)$ *удовлетворяют условиям*

$$\begin{aligned} &\sigma_{Ajk}(t) \equiv \lambda_{Aj}(t) - \lambda_{Ak}(t) \neq 0, \quad \operatorname{Re}\lambda_{Aj}(t) \le 0,\\ &\sigma_{Bjk}(t) \equiv \lambda_{Bj}(t) - \lambda_{Bk}(t) \neq 0, \quad \operatorname{Re}\lambda_{Bj}(t) \le 0 \end{aligned} \tag{2}$$

$(j \neq k,\ j,k = \overline{1,n},\ t\in[0,1])$, *имеет единственное и равномерно ограниченое на отрезке* $[0,1]$ *при* $\varepsilon \to +0$ *решение, представимое в квазирегулярной форме*

$$\begin{aligned} Z(t,\varepsilon) = S_A(t)\Big(E + \sum_{k=1}^N \overline{\overline{H}}_{Ak}(t)\varepsilon^k\Big)\exp\Big(\varepsilon^{-1}\int_0^t \sum_{k=0}^N \Lambda_{Ak}(s)\varepsilon^k ds\Big)Z^0 \times{}\\ \times\exp\Big(\varepsilon^{-1}\int_0^t \sum_{k=0}^N \Lambda_{Bk}(s)\varepsilon^k ds\Big)\Big(E + \sum_{k=1}^N \overline{\overline{H}}_{Bk}(t)\varepsilon^k\Big)S_B^T(t) + O(\varepsilon^{N+1}) = S_A(t)\Big(\sum_{k=0}^N P_{Ak}(t)\varepsilon^k\Big)\times{}\\ \times\exp\Big(\varepsilon^{-1}\int_0^t \Lambda_{A0}(s)ds\Big)Z^0\exp\Big(\varepsilon^{-1}\int_0^t \Lambda_{B0}(s)ds\Big)\Big(\sum_{k=0}^N P_{Bk}(t)\varepsilon^k\Big)S_B^T(t) + O(\varepsilon^{N+1}), \end{aligned} \tag{3}$$

$$\begin{aligned} S_A^{-1}(t)A(t)S_A(t) = \Lambda_{A0}(t) = \operatorname{diag}\{\lambda_{A10}(t),\dots,\lambda_{An0}(t)\},\\ S_B^{-1}(t)B^T(t)S_B(t) = \Lambda_{B0}(t) = \operatorname{diag}\{\lambda_{B10}(t),\dots,\lambda_{Bn0}(t)\}, \end{aligned}$$

где матричные функции $\overline{\overline{H}}_{Ak}(t)$, $\overline{\overline{H}}_{Bk}(t)$, $\Lambda_{Ak}(t)$, $\Lambda_{Bk}(t)$ *однозначно определяются в ходе доказательства.*

Доказательство. Решение задачи (1) с учетом [1] может быть представлено в виде

$$Z(t,\varepsilon) = X(t,\varepsilon)Y(t,\varepsilon), \tag{4}$$

где матричные функции $X(t,\varepsilon)$ и $Y(t,\varepsilon)$ являются решениями сингулярно возмущенных начальных задач

$$\varepsilon\dot{X} = A(t)X, \quad X(0,\varepsilon) = Z^0, \tag{5}$$

$$\varepsilon\dot{Y} = YB(t), \quad Y(0,\varepsilon) = E. \tag{6}$$

Для обоснования этого достаточно сослаться на глобальную теорему единственности после дифференцирования равенства (4)

$$\varepsilon\dot{Z} = \varepsilon\dot{X}Y + \varepsilon X\dot{Y} = A(t)XY + XYB(t) = A(t)Z + ZB(t).$$

Для удобства дальнейшего изложения для произвольной квадратной матрицы A введем обозначения

$$A = \{a_{jk}\}_1^n, \quad \overline{A} = \mathrm{diag}\{a_{11},\dots,a_{nn}\}, \quad \overline{\overline{A}} = A - \overline{A}.$$

После невырожденной при достаточно малых $|\varepsilon|$ замены

$$X = S_A(t)H_A(t,\varepsilon)Q_A \quad \Big(H_A(t,\varepsilon) = E + \sum_{k=1}^{N} \overline{\overline{H}}_{Ak}(t)\varepsilon^k \quad \forall N \geq 1\Big)$$

задача (5) может быть преобразована к виду

$$\varepsilon\dot{Q}_A = D_A(t,\varepsilon)Q_A, \quad Q_A(0,\varepsilon) = Q_A^0 = H_A^{-1}(0,\varepsilon)S_A^{-1}(0)Z^0, \tag{7}$$

где

$$D_A(t,\varepsilon) = \sum_{k=0}^{N} \Lambda_{Ak}(t)\varepsilon^k + \varepsilon^{N+1}V(t,\varepsilon) \quad (V(t,\varepsilon) = O(1)),$$

а матрицы $H_A(t,\varepsilon)$ и $D_A(t,\varepsilon)$ связаны соотношением

$$\varepsilon\dot{H}_A = L_A(t,\varepsilon)H_A - H_AD_A(t,\varepsilon) \tag{8}$$

$(L_A(t,\varepsilon) = \Lambda_{A0}(t) + \varepsilon L_{A1}(t)$, $L_{A1}(t) = -S_A^{-1}(t)\dot{S}_A(t))$.

Приравнивая в (8) коэффициенты при одинаковых степенях ε, получим набор простых линейных алгебраических матричных уравнений

$$\Lambda_{A0}(t)\overline{\overline{H}}_{Ak}(t) - \overline{\overline{H}}_{Ak}(t)\Lambda_{A0}(t) = \Lambda_{Ak}(t) - P_{Ak}(t), \quad P_{A1}(t) = L_{A1}(t),$$

$$P_{Ak}(t) = L_{A1}(t)\overline{\overline{H}}_{A(k-1)}(t) - \sum_{j=1}^{k-1} \overline{\overline{H}}_{k-j}(t)\Lambda_{Aj}(t) - \dot{\overline{\overline{H}}}_{k-1} = \{p_{ijk}(t)\} \quad (k \geq 2),$$

откуда все "диагональные" $\Lambda_{Ak}(t)$ и "бездиагональные" $\overline{\overline{H}}_{Ak}(t)$ матрицы определяются единственным образом

$$\Lambda_{Ak}(t) = \overline{P}_{Ak}(t), \quad \overline{\overline{H}}_{Ak}(t) = \{h_{ijk}(t)\}, \quad h_{ijk}(t) = \sigma_{ij}^{-1}(t)p_{ijk}(t).$$

Преобразованная задача (7) эквивалентна интегральному уравнению

$$Q_A = \Phi(t,\varepsilon)\Big(Q_A^0 + \varepsilon^N \int_0^t \Phi^{-1}(s,\varepsilon)V(s,\varepsilon)Q_A(s,\varepsilon)ds\Big), \quad \Phi(t,\varepsilon) = \exp\Big(\varepsilon^{-1}\sum_{k=0}^{N} \Lambda_{Ak}(s)\varepsilon^k ds\Big). \tag{9}$$

При этом в условиях теоремы справедлива оценка

$$\|Q_A\| \leq c_1 + \varepsilon^N c_2\|Q_A\|, \quad \|Q_A\| \leq \frac{c_1}{1 - \varepsilon^N c_2} \leq c_3,$$

что и доказывает существование равномерно ограниченного на отрезке $[0,1]$ при $\varepsilon \to +0$ решения уравнения (9) и эквивалентных ему задач (7) и (5). Для решения задачи (7) имеет место асимптотическая оценка

$$Q_A(t,\varepsilon) = \Phi(t,\varepsilon)Q_A^0 + \varepsilon^{N+1}R_A(t,\varepsilon),$$

т. к. функция $R_A(t,\varepsilon)$ удовлетворяет задаче

$$\varepsilon\dot{R}_A = D_A(t,\varepsilon)R_A + O(1), \quad R_A(0,\varepsilon) = R_A^0,$$

аналогичной задаче (7) и имеющей в силу этого равномерно ограниченное на отрезке $[0,1]$ при $\varepsilon \to +0$ решение.

Аналогичные оценки и представления (полученные с помощью алгоритма, частично изложенного в работах [2]–[6]) справедливы и для транспонированной сингулярно возмущенной задачи (6)

$$\varepsilon\dot{Y}^T = B^T(t)Y^T, \quad Y^T(0,\varepsilon) = E,$$

позволяя с учетом проделанных преобразований получить соотношение (3). □

Теорема 2. *Решение сингулярно возмущенной неоднородной задачи Коши*

$$\varepsilon\dot{Z} = A(t)Z + ZB(t) + F(t), \quad Z(0,\varepsilon) = Z^0 \tag{10}$$

$(A(t), B(t), F(t) \in C^\infty[0,1])$ *может быть представлено в виде*

$$Z(t,\varepsilon) = X(t,\varepsilon)\Big[Z^0 + \varepsilon^{-1}\int_0^t X^{-1}(s,\varepsilon)F(s)\Phi^{-1}(s,\varepsilon)ds\Big]\Phi(t,\varepsilon), \tag{11}$$

где матричные функции $X(t,\varepsilon)$ *и* $\Phi(t,\varepsilon)$ *удовлетворяют задачам*

$$\varepsilon\dot{X} = A(t)X, \quad X(0,\varepsilon) = E, \quad \varepsilon\dot{\Phi} = \Phi B(t), \quad \Phi(0,\varepsilon) = E.$$

Доказательство. Запишем решение задачи (9) в виде

$$Z(t,\varepsilon) = X(t,\varepsilon)Y(t,\varepsilon),$$

где матричные функции $X(t,\varepsilon)$ и $Y(t,\varepsilon)$ являются решениями задач

$$\varepsilon\dot{X} = A(t)X, \quad X(0,\varepsilon) = E, \quad \varepsilon\dot{Y} = YB(t) + Q(t,\varepsilon), \quad Y(0,\varepsilon) = Z^0,$$

если $Q(t,\varepsilon) = X^{-1}(t,\varepsilon)F(t)$. Это утверждение проверяется непосредственным дифференцированием. Для решения транспонированной задачи

$$\varepsilon\dot{Y}^T = B^T(t)Y^T + Q^T(t,\varepsilon), \quad Y^T(0,\varepsilon) = E,$$

справедливо интегральное представление

$$Y^T = \Phi^T(t,\varepsilon)\Big[Z^{0T} + \varepsilon^{-1}\int_0^t (\Phi^T(s,\varepsilon))^{-1}Q^T(s,\varepsilon)ds\Big] \quad (\varepsilon\dot{\Phi}^T = B^T(t)\Phi^T, \ \ \Phi^T(0,\varepsilon) = E),$$

что и позволяет с учетом

$$Y = \Big[Z^0 + \varepsilon^{-1}\int_0^t X^{-1}(s,\varepsilon)F(s)\Phi^{-1}(s,\varepsilon)ds\Big]\Phi(t,\varepsilon)$$

получить требуемый результат (11). □

Следствие. Представление (11) может быть полезно при итерационном методе построения асимптотики [6] сингулярно возмущенной задачи Коши со слабой нелинейностью

$$\varepsilon\dot{Z} = A(t)Z + ZB(t) + \varepsilon F(Z,t), \quad Z(0,\varepsilon) = Z^0$$

после перехода к эквивалентному нелинейному интегральному уравнению

$$Z(t,\varepsilon) = X(t,\varepsilon)\Big[Z^0 + \int_0^t X^{-1}(s,\varepsilon)F(Z,\varepsilon)\Phi^{-1}(s,\varepsilon)ds\Big]\Phi(t,\varepsilon).$$

2. При выполнении условий (2) с учетом представления решения задач (5) и (6), используемых в формуле (3) из теоремы 1, решение (11) задачи (10) равномерно ограничено на отрезке $[0,1]$ при $\varepsilon \to +0$.

Теорема 3. *При выполнении условий* (2) *и несовпадении на отрезке* $[0,1]$ *спектров* $\{\lambda_{Aj}(t)\}_1^n$ *и* $\{\lambda_{Bj}(t)\}_1^n$ *матриц* $A(t)$ *и* $B(t)$ *решение задачи* (10) *может быть записано в квазирегулярной форме (матричные функции* $\overline{\overline{H}}_{Ak}(t)$, $\overline{\overline{H}}_{Bk}(t)$, $\Lambda_{Ak}(t)$, $\Lambda_{Bk}(t)$, $U_k(t)$ *однозначно определяются в ходе доказательства)*

$$Z(t,\varepsilon)=S_A(t)\Bigl(E+\sum_{k=1}^{N}\overline{\overline{H}}_{Ak}(t)\varepsilon^k\Bigr)\exp\Bigl(\varepsilon^{-1}\int_0^t\sum_{k=0}^{N}\Lambda_{Ak}(s)\varepsilon^k ds\Bigr)W^0(\varepsilon)\exp\Bigl(\varepsilon^{-1}\int_0^t\sum_{k=0}^{N}\Lambda_{Bk}(s)\varepsilon^k ds\Bigr)\times$$
$$\times\Bigl(E+\sum_{k=1}^{N}\overline{\overline{H}}_{Bk}(t)\varepsilon^k\Bigr)S_B^T(t)+\sum_{k=0}^{N}U_k(t)\varepsilon^k+O(\varepsilon^{N+1})=S_A(t)\Bigl(\sum_{k=0}^{N}P_{Ak}(t)\varepsilon^k\Bigr)\times$$
$$\times\exp\Bigl(\varepsilon^{-1}\int_0^t\Lambda_{A0}(s)ds\Bigr)W^0(\varepsilon)\exp\Bigl(\varepsilon^{-1}\int_0^t\Lambda_{B0}(s)ds\Bigr)\Bigl(\sum_{k=0}^{N}P_{Bk}(t)\varepsilon^k\Bigr)S_B^T(t)+\sum_{k=0}^{N}U_k(t)\varepsilon^k+O(\varepsilon^{N+1}).\tag{12}$$

Доказательство. Представим решение задачи (10) в виде $Z(t,\varepsilon)=W(t,\varepsilon)+\sum\limits_{k=0}^{N}U_k(t)\varepsilon^k$, где матричные функции $U_k(t)$ $(k=\overline{0,N})$ с учетом [7] однозначно определяются из системы алгебраических матричных уравнений

$$A(t)U_0+U_0B(t)+F(t)=0,\quad A(t)U_k+U_kB(t)=\dot U_{k-1}\quad (k=\overline{2,N}).$$

При этом функция $W(t,\varepsilon)$ является решением почти однородной задачи Коши

$$\varepsilon\dot W=A(t)W+WB(t)+O(\varepsilon^{N+1}),\quad W(0,\varepsilon)=Z^0-\sum_{k=0}^{N}U_k(0)\varepsilon^k=W^0(\varepsilon),$$

что позволяет воспользоваться теоремами 1 и 2 и с учетом (3) получить нужные представления (12) и (11). □

Литература

1. Беллман Р. *Введение в теорию матриц.* – М.: Наука, 1969. – 368 с.
2. Коняев Ю.А. *Общий подход к асимптотическому интегрированию сингулярно возмущенных начальных и краевых задач для систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений* // Дифференц. уравнения. – 1984. – Т. 20. – № 11. – С. 1999–2003.
3. Коняев Ю.А. *Об одном методе исследования некоторых задач теории возмущений* // Матем. сб. – 1993. – Т. 184. – № 12. – С. 133–144.
4. Коняев Ю.А., Федоров Ю.С. *Асимптотический анализ некоторых классов сингулярно возмущенных задач на полуоси* // Матем. заметки. – 1997. – Т. 62. – Вып. 1. – С. 111–117.
5. Коняев Ю.А. *Структура решений сингулярно возмущенной начально краевой задачи с неограниченным спектром предельного оператора* // Матем. заметки. – 1999. – Т. 65. – Вып. 6. – С. 831–835.
6. Коняев Ю.А. *Итерационный метод анализа нелинейных сингулярно возмущенных начальных и краевых задач* // Изв. вузов. Математика. – 1999. – № 3. – С. 38–45.
7. Вазов В. *Асимптотические разложения решений обыкновенных дифференциальных уравнений.* – М.: Мир, 1968. – 464 с.

Российский университет дружбы народов

Поступила 06.12.2002