ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2001 МАТЕМАТИКА № 9 (472)

УДК 512:519.4

В.Ю. ПОПОВ

О ПРОБЛЕМЕ ВЫВОДИМОСТИ ТОЖДЕСТВ В КОНЕЧНЫХ КОЛЬЦАХ

В [1] Л.А. Бокуть поставил вопрос о разрешимости общей проблемы выводимости тождеств для групп: "Существует ли алгоритм, который по любой системе групповых слов $f_1, \dots, f_m$ (от фиксированного множества переменных $x_1, x_2, \dots$) и отдельному слову f выяснял бы, следует ли тождество $f = 1$ из тождеств $f_1 = 1, \dots, f_m = 1$". Отрицательный ответ на этот вопрос получен в [2]. В [3] доказана неразрешимость общей проблемы выводимости тождеств для группоидов. Там же отмечено, что общая проблема выводимости тождеств неразрешима и для полугрупп. В [4] автором отмечено, что существует кольцевое тождество, для которого не существует алгоритма, определяющего по произвольному конечно базируемому многообразию колец, выполняется в нем это тождество или нет. Естественно рассматривать указанный вопрос и для классов конечных полугрупп, групп и колец. Решение общей проблемы выводимости тождества в случае конечных полугрупп и групп пока неизвестно. Итог данной статьи — отрицательный ответ по этой проблеме для конечных колец.

Теорема. *Не существует алгоритма, определяющего по произвольному конечно базируемому многообразию колец, удовлетворяет ли класс всех конечных колец из этого многообразия тождеству* $(xy)(zt) = 0$.

Прежде чем доказывать теорему, получим некоторые вспомогательные утверждения. Доказательство теоремы будет основано на интерпретации работы двухленточной машины Минского [5]. Впервые этот метод был использован Ю.Ш. Гуревичем [6] при доказательстве неразрешимости квазиэквациональной теории классов конечных полугрупп и ассоциативных колец. Подробное изложение методов интерпретации машин Минского, а также обзор результатов, связанных с интерпретацией машин Минского, можно найти в [7].

Пусть P — некоторое рекурсивно-перечислимое нерекурсивное множество натуральных чисел, $\mathfrak{p}$ — частичная характеристическая функция множества P [5]. Обозначим через М двухленточную машину Минского, вычисляющую функцию $\mathfrak{p}$ [8]. В дальнейшем будем полагать, что $q_0, q_1, q_2, \dots, q_m$ — внутренние состояния машины М, причем q_1 — начальное, q_0 — заключительное состояния. Если машина находится в состоянии q_i и j-я лента сдвинута на ξ_j ячеек влево, то будем говорить, что М находится в конфигурации $q_i\xi_1\xi_2$.

Прежде чем перейти непосредственно к доказательству теоремы, введем ряд обозначений. Пусть $\mathcal{K}$ — некоторое, не обязательно ассоциативное кольцо, $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n \in \mathcal{K}$. Определим левонормированное произведение $a_1a_2\dots a_{n-1}a_n$ индукцией по n, полагая $a_1a_2\dots a_n = (a_1a_2\dots a_{n-1})a_n$ при $n > 1$. При $n = 1$ имеем просто a_1. Далее полагаем $a_1\underbrace{a_2\dots a_2}_{m \text{ раз}} = a_1a_2^m$, b^0 — пустой символ для любого символа b. Пусть $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$ — некоторое счетное множество, Γ — свободный группоид с множеством свободных образующих X. Определим отображения A, B, C, D, E, F, G, H, K, переводящие элементы декартова произведения $\Gamma \times \Gamma$ в элементы группоида Γ, полагая

$$A(y,x) = (x(x(yx)x^7)x), \quad E(y,x) = (x(x(yx)x^{11})x),$$
$$B(y,x) = (x(x(yx)x^8)x), \quad F(y,x) = (x(x(yx)x^{12})x),$$
$$C(y,x) = (x(x(yx)x^9)x), \quad G(y,x) = (x(x(yx)x^{13})x),$$
$$D(y,x) = (x(x(yx)x^{10})x), \quad H(y,x) = (x(x(yx)x^{14})x),$$
$$K(y,x) = (x(x(yx)x^{15})x).$$

Для любого $i \in \{0,1,\ldots,m\}$ будем считать, что $Q_i(y,x) = (x(x(yx)x^{17+i})x)$. Обозначим через F свободное кольцо, базисом которого, как $\mathbb{Z}$-модуля, является множество Γ. Линейно распространим отображения A, B, C, D, E, F, G, H, K, Q_i, где $i \in \{0,1,\ldots,m\}$, на элементы кольца F. Обозначим через W множество $\{A(y,x)$, $B(y,x)$, $C(y,x)$, $D(y,x)$, $E(y,x)$, $F(y,x)$, $G(y,x)$, $H(y,x)$, $K(y,x)$, $Q_i(y,x) \mid i \in \{0,1,\ldots,m\}\}$. Если $Y_1 = Y_1(x,y)$, $Y_2 = Y_2(x,y),\ldots,Y_{n-1} = Y_{n-1}(x,y)$, $Y_n = Y_n(x,y)$ — некоторые отображения из множества W, то суперпозицию этих отображений вида $Y_2(Y_1(z_1,z_2),z_3)$ будем обозначать через $Y_1(z_1,z_2)Y_2(z_3)$ (распространяя это обозначение индукцией по n), полагая

$$Y_n(Y_1(z_1,z_2)Y_2(z_3)Y_{n-1}(z_n),z_{n+1}) = Y_1(z_1,z_2)Y_2(z_3)Y_{n-1}(z_n)Y_n(z_{n+1}).$$

Кроме того, считаем

$$X(z_1,z_2)Y^n(z_3) = X(z_1,z_2)\underbrace{Y(z_3)\ldots Y(z_3)}_{n \text{ раз}}.$$

Произвольной команде $q_i\delta_1\delta_2 \to q_j\varepsilon_1\varepsilon_2$ машины M сопоставим определенное тождество в соответствии с таблицей

δ_1	δ_2	Тождество с $Q_l = Q_l(x_1x_2x_3x,x)$
1	1	$Q_iC(x)D(x)F(x) = Q_jA^{\varepsilon_1}(x)B^{\varepsilon_2}(x)C(x)D(x)E(x)F^2(x)$
0	1	$Q_iA(x)D(x)F(x) = Q_jA^{\varepsilon_1+1}(x)B^{\varepsilon_2}(x)D(x)E(x)F^2(x)$
1	0	$Q_iB(x)C(x)F(x) = Q_jA^{\varepsilon_1}(x)B^{\varepsilon_2+1}(x)C(x)E(x)F^2(x)$
0	0	$Q_iA(x)B(x)F(x) = Q_jA^{\varepsilon_1+1}(x)B^{\varepsilon_2+1}(x)E(x)F^2(x)$

Пусть $\mathfrak{A}$ — многообразие колец, заданное тождествами, кодирующими команды машины M. Обозначим через $\mathfrak{B}_n$ многообразие колец, заданное тождествами

1) $A(y,x)B(x) = B(y,x)A(x)$, 2) $C(y,x)D(x) = D(y,x)C(x)$,
3) $A(y,x)D(x) = D(y,x)A(x)$, 4) $C(y,x)B(x) = B(y,x)C(x)$,
5) $A(y,x)E(x) = E(y,x)A(x)$, 6) $A(y,x)F(x) = F(y,x)A(x)$,
7) $A(y,x)H(x) = H(y,x)A(x)$, 8) $F(y,x)B(x) = B(y,x)F(x)$,
9) $H(y,x)B(x) = B(y,x)H(x)$, 10) $C(y,x)E(x) = E(y,x)C(x)$,
11) $C(y,x)F(x) = F(y,x)C(x)$, 12) $C(y,x)H(x) = H(y,x)C(x)$,
13) $D(y,x)E(x) = E(y,x)D(x)$, 14) $D(y,x)F(x) = F(y,x)D(x)$,
15) $H(y,x)D(x) = D(y,x)H(x)$, 16) $E(y,x)F(x) = F(y,x)E(x)$,
17) $E(y,x)H(x) = H(y,x)E(x)$, 18) $G(y,x)F(x) = F(y,x)G(x)$,
19) $E(y,x)B(x) = B(y,x)E(x)$, 20) $Q_i(y,x)F(x)G(x) = Q_i(y,x)K(x)$,
21) $Q_i(y,x)F(x) = Q_i(y,x)K(x)F(x)$, 22) $Q_i(y,x)K(x)H(x) = 0$,

$$i \in \{0,1,\ldots,m\},$$

23) $Q_1(x_1x_2x_3x,x)A^{2^n}(x)C(x)D(x)F(x)H(x) = (x_1x_2)(x_3x)$.

Пусть $\mathfrak{R}$ — многообразие всех колец характеристики два, $\mathfrak{X}_n = \mathfrak{A} \cap \mathfrak{B}_n \cap \mathfrak{R}$. Обозначим через $F\mathfrak{R}$ кольцо, свободное в многообразии $\mathfrak{R}$, имеющее счетное множество свободных образующих $\{e, e_1, e_2, \dots, e_n, \dots\}$. Пусть $\mathfrak{X}_n \cap \mathfrak{F}$ — класс всех конечных колец из многообразия $\mathfrak{X}_n$.

Далее для краткости вместо $Q_l(y, x)$, $A(x)$, $B(x)$, $C(x)$, $D(x)$, $E(x)$, $F(x)$, $G(x)$, $H(x)$, $K(x)$ будем писать Q_l, A, B, C, D, E, F, G, H, K соответственно.

Лемма 1. *Для любого кольца $\mathcal{K} \in \mathfrak{X}_n \cap \mathfrak{F}$ и произвольного натурального b имеет место тождество*

$$Q_i F^b G^b = Q_i K. \tag{1}$$

Доказательство. Применим индукцию по b. Пусть $b = 1$. Тогда тождество (1) выполняется по построению многообразия $\mathfrak{X}_n$. Допустим, что (1) справедливо для некоторого натурального числа p. Покажем, что оно верно и для $p + 1$. Действительно,

$$Q_i F^{p+1} G^{p+1} = Q_i F^p G^p F G = Q_i K F G = Q_i F G = Q_i K. \quad \square$$

Лемма 2. *Для любого кольца $\mathcal{K} \in \mathfrak{X}_n \cap \mathfrak{F}$ существует такое натуральное p, что в кольце $\mathcal{K}$ для каждого $i \in \{0, 1, \dots, m\}$ выполняется тождество $Q_i F^p = Q_i K$.*

Доказательство. Так как кольцо $\mathcal{K}$ конечно, то для любого элемента $x \in \mathcal{K}$ и любого $i \in \{0, 1, \dots, m\}$ существуют такие натуральные числа $a_i(x)$ и $b_i(x)$, что в кольце $\mathcal{K}$ выполняется равенство

$$Q_i F^{a_i(x)} = Q_i F^{b_i(x)} \tag{2}$$

и $a_i(x) > b_i(x)$. Покажем, что

$$Q_i F^{a_i(x)} G^{b_i(x)} = Q_i F^{a_i(x) - b_i(x)}. \tag{3}$$

Доказательство проведем индукцией по сумме $a_i(x) + b_i(x)$. Пусть $a_i(x) + b_i(x) = 3$. Тогда в силу соотношения $a_i(x) > b_i(x)$ имеем $a_i(x) = 2$ и $b_i(x) = 1$. Следовательно, необходимо доказать равенство $Q_i F^2 G = Q_i F$. В самом деле,

$$Q_i F^2 G = Q_i F G F = Q_i K F = Q_i F.$$

Допустим, что равенство доказано для $a_i(x) + b_i(x) = r$. Покажем, что оно верно и для $a_i(x) + b_i(x) = r + 1$. Действительно,

$$\begin{gathered} Q_i F^{a_i(x)+1} G^{b_i(x)} = Q_i F^{a_i(x)} G^{b_i(x)} F = Q_i F^{a_i(x)+1-b_i(x)}, \\ Q_i F^{a_i(x)} G^{b_i(x)+1} = Q_i F^{a_i(x)-b_i(x)} G = Q_i F G F^{a_i(x)-b_i(x)-1} = \\ = Q_i K F^{a_i(x)-b_i(x)-1} = Q_i K F F^{a_i(x)-b_i(x)-2} = Q_i F^{a_i(x)-b_i(x)-1}. \end{gathered}$$

Следовательно, тождество (3) доказано.

В силу леммы 1 имеет место (1) при $b = b_i(x)$. Из равенства (2) вытекает $Q_i F^{a_i(x)} G^{b_i(x)} = Q_i F^{b_i(x)} G^{b_i(x)}$. Отсюда и из соотношений $Q_i F^{b_i(x)} G^{b_i(x)} = Q_i K$ и (3) получаем $Q_i F^{a_i(x) - b_i(x)} = Q_i K$. Так как $\mathcal{K}$ — конечное кольцо, то $\mathcal{K} = \{x_1, \dots, x_l\}$. Рассмотрим равенство

$$Q_i K = Q_i F^{(a_0(x_1) - b_0(x_1)) \dots (a_m(x_1) - b_m(x_1)) \dots (a_0(x_l) - b_0(x_l)) \dots (a_m(x_l) - b_m(x_l))}.$$

Очевидно, что данное равенство выполняется в кольце $\mathcal{K}$ для всех i и x. Следовательно, оно является искомым тождеством. $\square$

Лемма 3. *Если машина* M *через r тактов работы переходит из конфигурации $q_i \xi_1 \xi_2$ в конфигурацию $q_j \eta_1 \eta_2$, то в многообразии $\mathfrak{X}_n$ выполняется тождество*

$$Q_i A^{\xi_1} B^{\xi_2} C D F = Q_j A^{\eta_1} B^{\eta_2} C D E^r F^{r+1}. \tag{4}$$

Доказательство. При выполнении условия леммы 3 индукцией по r покажем, что в многообразии $\mathfrak{X}_n$ выполняется тождество (4).

Пусть $r = 0$. Тогда утверждение очевидно. Допустим, что утверждение справедливо для некоторого r. Покажем, что оно верно и для $r+1$. Пусть на $(r+1)$-м шаге машина М, выполняя команду $q_j\delta_1\delta_2 \to q_l\varepsilon_1\varepsilon_2$, переходит из конфигурации $q_j\eta_1\eta_2$ в конфигурацию $q_l(\eta_1+\varepsilon_1)(\eta_2+\varepsilon_2)$. Следует разобрать четыре случая в зависимости от значений δ_1 и δ_2. Обоснование их аналогично. Остановимся только на случае, когда $\delta_1 = 0$, $\delta_2 = 1$. Тогда $\eta_1 \neq 0$, $\eta_2 = 0$ и на $(r+1)$-м шаге выполняется команда $q_j01 \to q_l\varepsilon_1\varepsilon_2$. Следовательно, в многообразии $\mathfrak{X}_n$ выполняется тождество

$$Q_jADF = Q_lA^{\varepsilon_1+1}B^{\varepsilon_2}DEF^2.$$

Отсюда вытекает

$$\begin{aligned}
Q_iA^{\xi_1}B^{\xi_2}CDF &= Q_jA^{\eta_1}B^{\eta_2}CDE^rF^{r+1} = Q_jA^{\eta_1}B^{\eta_2}DCE^rF^{r+1} = \\
&= Q_jA_{\eta_1}B^{\eta_2}DCFE^rF^r = Q_jA^{\eta_1}B^{\eta_2}DFCE^rF^r = Q_jA^{\eta_1}DFCE^rF^r = \\
&= Q_jADA^{\eta_1-1}FCE^rF^r = Q_jADFA^{\eta_1-1}CE^rF^r = \\
&= Q_lA^{\varepsilon_1+1}B^{\varepsilon_2}DEF^2A^{\eta_1-1}CE^rF^r = Q_lA^{\varepsilon_1+1}B^{\varepsilon_2}DEA^{\eta_1-1}F^2CE^rF^r = \\
&= Q_lA^{\varepsilon_1+1}B^{\varepsilon_2}DEA^{\eta_1-1}CF^2E^rF^r = Q_lA^{\varepsilon_1+1}B^{\varepsilon_2}DEA^{\eta_1-1}CE^rF^{r+2} = \\
&= Q_lA^{\varepsilon_1+1}B^{\varepsilon_2}DA^{\eta_1-1}ECE^rF^{r+2} = Q_lA^{\varepsilon_1+\eta_1}B^{\varepsilon_2}DECE^rF^{r+2} = \\
&= Q_lA^{\varepsilon_1+\eta_1}B^{\varepsilon_2+\eta_2}DECE^rF^{r+2} = Q_lA^{\varepsilon_1+\eta_1}B^{\varepsilon_2+\eta_2}DCE^{r+1}F^{r+2} = \\
&= Q_lA^{\varepsilon_1+\eta_1}B^{\varepsilon_2+\eta_2}CDE^{r+1}F^{r+2}. \quad \square
\end{aligned}$$

Доказательство теоремы. Допустим $n \notin P$. Тогда по определению машины М она, начав работать в конфигурации q_12^n0, будет работать вечно, не переходя в заключительную конфигурацию. Следовательно, число тактов работы машины М можно считать сколь угодно большим. Пусть $\mathcal{K}$ — произвольное кольцо из класса $\mathfrak{X}_n \cap \mathfrak{F}$. Тогда, как показано выше, $\mathcal{K}$ для некоторого натурального числа p удовлетворяет тождеству $Q_iF^p = Q_iK$. В силу леммы 3 в многообразии $\mathfrak{X}_n$, а значит, и в кольце $\mathcal{K}$ выполняется тождество $Q_1A^{2^n}CDF = Q_iA^{\xi_1}B^{\xi_2}CDE^{p-1}F^p$. Отсюда очевидным образом вытекает тождество $Q_1A^{2^n}CDFH = Q_iA^{\xi_1}B^{\xi_2}CDE^{p-1}F^pH$. Таким образом, получаем

$$\begin{aligned}
Q_1A^{2^n}CDFH &= Q_iA^{\xi_1}B^{\xi_2}CDE^{p-1}F^pH = Q_iA^{\xi_1}B^{\xi_2}CDF^pE^{p-1}H = \\
&= Q_iA^{\xi_1}B^{\xi_2}CF^pDE^{p-1}H = Q_iA^{\xi_1}B^{\xi_2}F^pCDE^{p-1}H = \\
&= Q_iA^{\xi_1}F^pB^{\xi_2}CDE^{p-1}H = Q_iF^pA^{\xi_1}B^{\xi_2}CDE^{p-1}H = \\
&= Q_iKA^{\xi_1}B^{\xi_2}CDE^{p-1}H = Q_iKA^{\xi_1}B^{\xi_2}CDHE^{p-1} = \\
&= Q_iKA^{\xi_1}B^{\xi_2}CHDE^{p-1} = Q_iKA^{\xi_1}B^{\xi_2}HCDE^{p-1} = \\
&= Q_iKA^{\xi_1}HB^{\xi_2}CDE^{p-1} = Q_iKHA^{\xi_1}B^{\xi_2}CDE^{p-1} = 0.
\end{aligned}$$

Отсюда вытекает $\mathfrak{X}_n \cap \mathfrak{F} \vDash Q_1A^{2^n}CDFH = 0$.

Пусть теперь $n \in P$. Покажем, что существует такое кольцо $\mathcal{K} \in \mathfrak{X}_n \cap \mathfrak{F}$, что тождество $Q_1A^{2^n}CDFH = 0$ ложно на этом кольце. Прежде всего отметим, что т. к. $n \in P$, то машина М, начав работать в конфигурации q_12^n0, через конечное число тактов работы r перейдет в заключительную конфигурацию q_010.

Приступим к построению кольца $\mathcal{K}$. Пусть $\mathbb{S}$ — множество слов, полученных из слов вида $Q_i(e_1e_2e_3e, e)A^{\xi_1}B^{\xi_2}C(e)D(e)E^p(e)F^k(e)H(e)$, где $i \in \{0, 1, \ldots, m\}$, $\xi_1, \xi_2, p, k, \in \mathbb{N}$, при помощи преобразований

$$
\begin{array}{rlrl}
\{1\} & A(e)B(e) \leftrightarrow B(e)A(e), & \{2\} & C(e)D(e) \leftrightarrow D(e)C(e), \\
\{3\} & A(e)D(e) \leftrightarrow D(e)A(e), & \{4\} & C(e)B(e) \leftrightarrow B(e)C(e), \\
\{5\} & A(e)E(e) \leftrightarrow E(e)A(e), & \{6\} & A(e)F(e) \leftrightarrow F(e)A(e), \\
\{7\} & A(e)H(e) \leftrightarrow H(e)A(e), & \{8\} & F(e)B(e) \leftrightarrow B(e)F(e), \\
\{9\} & H(e)B(e) \leftrightarrow B(e)H(e), & \{10\} & C(e)E(e) \leftrightarrow E(e)C(e), \\
\{11\} & C(e)F(e) \leftrightarrow F(e)C(e), & \{12\} & C(e)H(e) \leftrightarrow H(e)C(e), \\
\{13\} & D(e)E(e) \leftrightarrow E(e)D(e), & \{14\} & D(e)F(e) \leftrightarrow F(e)D(e), \\
\{15\} & H(e)D(e) \leftrightarrow D(e)H(e), & \{16\} & E(e)F(e) \leftrightarrow F(e)E(e), \\
\{17\} & E(e)H(e) \leftrightarrow H(e)E(e), & \{18\} & G(e)F(e) \leftrightarrow F(e)G(e),
\end{array}
$$

$$
\begin{gathered}
\{19\} \;\; E(e)B(e) \leftrightarrow B(e)E(e), \\
\{20\} \;\; Q_i(e_1e_2e_3e,e)F(e)G(e) \leftrightarrow Q_i(e_1e_2e_3e,e)K(e), \\
\{21\} \;\; Q_i(e_1e_2e_3e,e)F(e) \leftrightarrow Q_i(e_1e_2e_3e,e)K(e)F(e), \quad i \in \{0,1,\ldots,m\}.
\end{gathered}
$$

Обозначим через $\mathfrak{f}(w)$ и $\mathfrak{g}(w)$ число подслов $F(e)$ в w и число подслов $G(e)$ в w соответственно. Пусть $t = 2^{nm}1000r$. Обозначим далее через $\mathbb{S}_1$ множество всевозможных подслов слов из множества $\mathbb{S}$, через $\mathbb{S}_2$ — подмножество множества $\mathbb{S}_1$ такое, что для любого w из $\mathbb{S}_2$ имеем

$$\mathfrak{l}(w) - \min(\mathfrak{f}(w),\mathfrak{g}(w))(\mathfrak{l}(F(e)) + \mathfrak{l}(G(e))) \geq t,$$

где $\mathfrak{l}(x)$ — длина слова x, и, наконец, через $\mathbb{S}_3$ — множество всевозможных слов w, удовлетворяющих следующим двум условиям: $\mathfrak{l}(w) \geq t$, $w \notin \mathbb{S}_1$. Пусть $\mathbb{T} = \{w = 0 \mid w \in \mathbb{S}_2 \cup \mathbb{S}_3\}$. Обозначим через $\mathcal{K}$ кольцо, порожденное элементами e, e_1, e_2, e_3, заданное в многообразии $\mathfrak{X}_n$ системой определяющих соотношений $\mathbb{T}$.

Покажем, что кольцо $\mathcal{K}$ конечно. Для этого в силу тождества $2x = 0$ достаточно показать, что произвольное слово в кольце $\mathcal{K}$ равно нулю или равно слову, длина которого не превосходит p, где p — фиксированное натуральное число. В самом деле, возьмем $p = t$. Тогда для любого слова w либо $\mathfrak{l}(w) \leq t$, либо $w \in \mathbb{S}_2$, либо $w \in \mathbb{S}_3$, либо $w \in \mathbb{S}_1 \setminus \mathbb{S}_2$. В первом случае $\mathfrak{l}(w) \leq p$, если имеет место второй или третий случай, то $w = 0$ в силу соотношений $\mathbb{T}$. Поэтому нужно рассмотреть только случай $w \in \mathbb{S}_1 \setminus \mathbb{S}_2$. Пусть $\mathfrak{l}(w) \leq t$. Тогда доказывать нечего. Пусть теперь $\mathfrak{l}(w) > t$. Слово w содержит подслова вида $F(e)$ и $G(e)$, т.к. в противном случае имело бы место соотношение $w \in \mathbb{S}_2$. По определению множества $\mathbb{S}_1$, используя тождества 6), 8), 11), 14), 16) и 18), в слове w очевидным образом можно выделить подслово вида $Q_j(e_1e_2e_3e,e)F^s(e)G^s(e)$, содержащее все вхождения подслов $F(e)$ или все вхождения подслов $G(e)$ в слово w. В силу тождества $Q_j(x_1x_2x_3x,x)F^s(x)G^s(x) = Q_j(x_1x_2x_3x,x)K(x)$, выполняющегося согласно лемме 1, подслово $Q_j(e_1e_2e_3e,e)F^s(e)G^s(e)$ в слове w можно заменить на подслово $Q_j(e)K(e)$. Получим слово w_1 такое, что

$$\mathfrak{l}(w_1) = \mathfrak{l}(w) + \mathfrak{l}(K(e)) - \min\{\mathfrak{f}(w),\mathfrak{g}(w)\}(\mathfrak{l}(F(e)) + \mathfrak{l}(G(e))).$$

Так как $w \notin \mathbb{S}_2$, то $\mathfrak{l}(w_1) < t + \mathfrak{l}(K(e))$. Таким образом, в качестве p можно взять $t + \mathfrak{l}(K(e))$.

Итак, мы убедились, что кольцо $\mathcal{K}$ принадлежит классу $\mathfrak{X}_n \cap \mathfrak{F}$. Покажем, что кольцо $\mathcal{K}$ не удовлетворяет тождеству

$$Q_1(x_1x_2x_3x,x)A^{2^n}(x)C(x)D(x)F(x)H(x) = 0.$$

Для этого достаточно показать, что в кольце $\mathcal{K}$ не выполняется соотношение

$$Q_1(e_1e_2e_3e,e)A^{2^n}(e)C(e)D(e)F(e)H(e) = 0. \tag{5}$$

Допустим, что кольцо $\mathcal{K}$ удовлетворяет соотношению (5). Обозначим через U_1 множество многочленов $f(e)$ таких, что $f(e)=0$ — соотношение в кольце $\mathcal{K}$, полученное из одного из тождеств, задающих многообразие $\mathfrak{A}\cap\mathfrak{B}_n$, подстановкой конкретных элементов кольца $F\mathfrak{R}$ вместо переменных, U_2 — множество одночленов w таких, что $w=0\in\mathbb{T}$, $U=U_1\cup U_2$. Пусть J — идеал, порожденный в кольце $F\mathfrak{R}$ множеством U. Тогда соотношение (5) выполняется в кольце $\mathcal{K}$ тогда и только тогда, когда многочлен из (5) принадлежит идеалу J. Следовательно, в кольце $F\mathfrak{R}$ выполняется равенство

$$Q_1(e_1e_2e_3e,e)A^{2^n}(e)C(e)D(e)F(e)H(e)=\sum_{i,j}t_{i1}h_jt_{i2},$$

где $h_j\in U$, $t_{i1}h_jt_{i2}$ — некоторое произведение многочленов, одним из сомножителей в котором является многочлен h_j.

Покажем, что сумма $\sum\limits_{i,j}u_{i1}h_ju_{i2}$ представима в виде f_1+f_2, где $f_1=\sum\limits_{i,j}v_{i1}h_jv_{i1}$, и каждый одночлен многочлена f_1 имеет вид $w_1(e)w_2(e)\dots w_n(e)$ $(w_i\in W)$, а f_2 — многочлен, ни один одночлен которого не равен $Q_j(e_1e_2e_3e,e)w_2(e)\dots w_n(e)$ ни для каких j и w_i из $W\setminus\{Q_i : i\in\{0,1,\dots,m\}\}$, причем в многочлене f_1 для некоторого j $w_1=Q_j$ и для любых l_1, l_2 $w_{l_1}\neq Q_{l_2}$ при условии $l_1>1$. Сделаем это индукцией по числу одночленов в сумме $\sum\limits_{i,j}u_{i1}h_ju_{i2}$.

Допустим, что число d одночленов в сумме $\sum\limits_{i,j}u_{i1}h_ju_{i2}$ равно нулю. Тогда утверждение очевидно. Допустим, что утверждение справедливо для некоторого числа одночленов d. Покажем, что оно верно и для $d+1$. Пусть число одночленов в сумме $\sum\limits_{i,j}u_{i1}h_ju_{i2}$ не больше $d+1$. Тогда $\sum\limits_{i,j}u_{i1}h_ju_{i2}=\sum\limits_{i>1,j}u_{i1}h_ju_{i2}+u_{11}h_1u_{12}$. Так как число одночленов в сумме $\sum\limits_{i>1,j}u_{i1}h_ju_{i2}$ не превосходит d, то по предположению индукции имеем $\sum\limits_{i>1,j}u_{i1}h_ju_{i2}=f_1+f_2$. Рассмотрим многочлен $u_{11}h_1u_{12}$. В зависимости от того, получен ли многочлен h_1 из тождества многообразия $\mathfrak{A}$ или из тождества многообразия $\mathfrak{B}_n$, или из соотношения из $\mathbb{T}$, следует рассмотреть три случая.

Допустим, что h_1 получен из тождества многообразия $\mathfrak{A}$. Тогда

$$h_1=\sum w_{i_1}(x)\dots w_{i_r}(x).$$

Если x не содержит одночлена e, то аналогично тому, как это сделано в лемме 1 из [9], можно показать, что $f_2=u_{11}h_1u_{12}$. Если $x=e+x^\star$, то

$$f_1=u_{11}\Big(\sum w_{i_1}(e)\dots w_{i_r}(e)\Big)u_{12},\quad f_2=u_{11}\Big(\sum w_{i_1}(e,x^\star)\dots w_{i_r}(e,x^\star)\Big)u_{12}$$

в случае, когда $u_{11}w(e)u_{12}=w_{j_1}(e)\dots w_{j_p}(e)$, и $f_1=0$, $f_2=u_{11}h_1u_{12}$ в противном случае. Случаи многообразия $\mathfrak{B}_n$ и множества $\mathbb{T}$ рассматриваются совершенно аналогично. Таким образом, сумма $\sum\limits_{i,j}u_{i1}h_ju_{i2}$ действительно представима в виде f_1+f_2.

Очевидно, из равенства

$$Q_i(e)A^{\xi_1}(e)B^{\xi_2}(e)C(e)D(e)+Q_j(e)A^{\eta_1}(e)B^{\eta_2}(e)C(e)D(e)=f_1+f_2$$

вытекает $f_2=0$. Следовательно,

$$Q_i(e)A^{\xi_1}(e)B^{\xi_2}(e)C(e)D(e)+Q_j(e)A^{\eta_1}(e)B^{\eta_2}(e)C(e)D(e)=f_1.$$

Допустим, что в f_1 найдется такой многочлен $s_{i1}h_js_{i2}$, что длина некоторых его одночленов не меньше t, а длина остальных одночленов меньше t. Тогда покажем индукцией по числу одночленов в f_1, что в кольце $F\mathfrak{R}$ выполняется равенство вида $f=f_1$, где f — одночлен, полученный из одночлена

$$Q_1(e)A^{\xi_1}(e)B^{\xi_2}(e)C(e)D(e)E^k(e)F^{k+1}(e)H(e)$$

при помощи преобразований $\{1\}$–$\{21\}$, в многочлене f_1 все подмногочлены вида $s_{i1}h_js_{i2}$ таковы, что либо все их одночлены имеют степень не меньше t, либо степень меньше t; и, кроме того, существует вычисление на машине M длины k, при помощи которого она переходит из конфигурации $q_1 2^n 0$ в конфигурацию $q_i\xi_1\xi_2$. Допустим, что число одночленов в f_1 равно единице. Тогда утверждение очевидно. Пусть данное утверждение доказано для некоторого числа одночленов l. Покажем, что оно верно и для $l+1$. В самом деле, пусть в кольце $F\mathfrak{R}$ выполняется равенство $f = \sum\limits_{i,j} s_{i1}h_js_{i2}$, и число одночленов в сумме $\sum\limits_{i,j} s_{i1}h_js_{i2}$ не превосходит $l+1$. Тогда в силу свободы кольца $F\mathfrak{R}$ получаем, что найдется такой многочлен $s_{i1}h_js_{i2}$, что f — одночлен данного многочлена. Пусть, например, это $s_{11}h_1s_{12}$. Обозначим одночлены многочлена h_1 через h_{11} и h_{12}. Пусть $f = s_{11}h_{11}s_{12}$. Следует рассмотреть несколько случаев в зависимости от того, какому тождеству соответствует многочлен h_1. Допустим, что многочлен h_1 соответствует тождеству многообразия $\mathfrak{B}_n$. Тогда очевидно, что $s_{11}h_{12}s_{12}$ — одночлен того же вида, что и f. Поэтому к равенству $s_{11}h_{12}s_{12} = \sum\limits_{i>1,j} s_{i1}h_js_{i2}$ можно применить предположение индукции. Остальные случаи рассматриваются аналогично.

Заметим, что если степени одночленов в многочлене $s_{i1}h_js_{i2}$ меньше t, то число одночленов в правой части равенства $f = \sum\limits_{i,j} s_{i1}h_js_{i2}$ четно, а в левой нечетно, что невозможно в силу свободы кольца $F\mathfrak{R}$. Полученное противоречие доказывает, что длина f не меньше t. Так как $n \in P$, то не может быть вычисления между конфигурациями $q_1 2^n 0$ и $q_i\xi_1\xi_2$ длиннее, чем r. Следовательно, $\xi_1 < 2^n + r + 1$, $\xi_2 < r + 1$, $k < r + 1$. Заметим, что длина слова $w(e)$, где $w(x) \in W$, не превосходит $60 + m$. Отсюда вытекает, что длина слова f меньше, чем $(60+m)(2^n + 4r + 10) = 600 + 10m + 240r + 4mr + 60 \cdot 2^n + 2^n m$. С другой стороны, длина слова f не меньше, чем t. Поэтому $t = 2^{mn} \cdot 1000r \leq 600 + 10m + 240r + 4mr + 60 \cdot 2^n + 2^n m$, что невозможно. Полученное противоречие доказывает, что тождество

$$Q_1(x_1x_2x_3x, x)A^{2^n}(x)C(x)D(x)F(x)H(x) = 0$$

ложно на кольце $\mathcal{K}$. Таким образом,

$$\mathfrak{X}_n \cap \mathfrak{F} \models Q_1(x_1x_2x_3x, x)A^{2^n}(x)C(x)D(x)F(x)H(x) = 0 \ \Leftrightarrow\ n \notin P.$$

Отсюда в силу нерекурсивности P вытекает, что не существует алгоритма, определяющего по произвольному многообразию $\mathfrak{X}_n$, выполняется ли в классе $\mathfrak{X}_n \cap \mathfrak{F}$ тождество $(x_1x_2)(x_3x_4)=0$. $\square$

В заключение автор хотел бы выразить благодарность профессору Л.Н. Шеврину за полезные обсуждения, весьма способствовавшие улучшению изложения текста, и профессору Ю.М. Важенину за постоянное внимание к работе.

Литература

1. *Коуровская тетрадь.* – 7-е изд. – Новосибирск, 1980. – 35 с.
2. Клейман Ю.Г. *Тождества и некоторые алгоритмические проблемы в группах* // ДАН СССР. – 1979. – Т. 244. – № 4. – С. 814–818.
3. Мурский В.Л. *Нераспознаваемые свойства конечных систем тождественных соотношений* // ДАН СССР. – 1971. – Т. 196. – № 3. – С. 520–522.
4. Попов В.Ю. *О проблеме выводимости тождеств для колец* // III международн. конф. по алгебре: Тез. докл. – Красноярск, 1993. – С. 272.
5. Мальцев А.И. *Алгоритмы и рекурсивные функции.* – М.: Наука, 1965. – 391 с.
6. Гуревич Ю.Ш. *Проблема равенства слов для некоторых классов полугрупп* // Алгебра и логика. – Новосибирск, 1966. – Т. 5. – № 5. – С. 25–35.
7. Kharlampovich O.G., Sapir M.V. *Algorithmic problems in varieties* // Int. J. Algebra and Comput. – 1995. – № 5. – P. 3–210.

8. Minsky M.L. *Recursive unsolvability of Post's problem of TAG and other topics in theory of Turing machines* // Ann. Math. – 1961. – V. 74. – № 3. – P. 437–455.
9. Попов В.Ю. *Эквациональные теории многообразий метабелевых и коммутативных колец* // Алгебра и логика. – Новосибирск, 1995. – Т. 34. – № 3. – С. 347–361.

Уральский государственный технический университет

Поступила 26.04.1999