ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2007 МАТЕМАТИКА № 9 (544)

УДК 514.764

А.В. СТОЛЯРОВ

ПРОСТРАНСТВО АФФИННО-МЕТРИЧЕСКОЙ СВЯЗНОСТИ

Двойственная теория оснащенных подмногообразий, вложенных в n-мерное пространство проективной связности $\mathrm{P}_{n,n}$ (в проективное пространство P_n), разработана достаточно полно (см., напр., [1]). Но до настоящего времени вопросы изучения двойственной геометрии оснащенных подмногообразий, погруженных в пространство аффинной связности $\mathrm{A}_{n,n}$ (аффинное пространство A_n), математиками не ставились и не рассматривались.

Следует также отметить, что в последнее время заметно оживились исследования геометрии оснащенных подмногообразий, погруженных в пространство проективно-метрической связности $\mathrm{K}_{n,n}$ (напр., [2]–[4]), но в математической литературе отсутствовали исследования пространства аффинно-метрической связности и геометрии подмногообразий, погруженных в это пространство.

Целью данной работы и является положить начало восполнению указанных выше пробелов в дифференциальной геометрии обобщенных пространств.

На протяжении всего изложения индексы пробегают следующие значения:

$$i,j,k,l,s,t=\overline{1,n};\quad \bar{i},\bar{j},\bar{k},\bar{l},\bar{s},\bar{t}=\overline{0,n};\quad a=1,2.$$

1. Предварительные сведения

Пусть задано пространство аффинной связности $\mathrm{A}_{n,n}$ системой $n(n+1)$ форм Пфаффа $\{\theta^i,\theta^i_j\}$, подчиненных структурным уравнениям [5]

$$D\theta^i=\theta^k\wedge\theta^i_k+\frac{1}{2}r^i_{st}\theta^s\wedge\theta^t,\quad D\theta^i_j=\theta^k_j\wedge\theta^i_k+\frac{1}{2}r^i_{jst}\theta^s\wedge\theta^t, \tag{1}$$

где

$$r^i_{(st)}=0,\quad r^i_{j(st)}=0,\quad \theta^1\wedge\theta^2\wedge\dots\wedge\theta^n\neq 0;$$

при этом n независимых первых интегралов вполне интегрируемой системы $\theta^i=0$ являются локальными координатами точки $\mathrm{A}(u)$ базы B_n. С каждой точкой $\mathrm{A}(u)\in B_n$ связывается локальное центроаффинное пространство A_n (слой), отнесенное к реперу $R=\{\mathrm{A}_0(u),\vec{e}_1(u),\dots,\vec{e}_n(u)\}$, вершина $\mathrm{A}_0(u)$ которого условно отождествляется с точкой $\mathrm{A}(u)$ базы B_n. Формы θ^i, θ^i_j инвариантным образом определяют главную часть инфинитезимального аффинного отображения соседнего локального пространства $\mathrm{A}_n(u+du)$ (слоя) на исходное $\mathrm{A}_n(u)$ при помощи отображения реперов:

$$\vec{\mathrm{A}}(u+du)\to\vec{\mathrm{A}}(u,du)\cong\vec{\mathrm{A}}(u)+d\vec{\mathrm{A}}(u)\cong\vec{\mathrm{A}}(u)+\theta^k\vec{e}_k(u),$$
$$\vec{e}_i(u+du)\to\vec{e}_i(u)+d\vec{e}_i(u)\cong\vec{e}_i(u)+\theta^k_i\vec{e}_k(u).$$

В уравнениях (1) каждая из систем функций $\{r^i_{st}\}$, $\{r^i_{jst}\}$ представляет собой тензор — соответственно тензор кручения и тензор кривизны пространства аффинной связности $\mathrm{A}_{n,n}$.

Известно [6], [7]: для того чтобы пространство аффинной связности $\mathrm{A}_{n,n}$ было аффинным (локально), необходимо и достаточно, чтобы оно обладало нулевой кривизной ($r^i_{jst}\equiv 0$) и нулевым кручением ($r^i_{st}\equiv 0$).

2. Двойственные пространства проективной связности

Возьмем систему из $(n+1)^2$ пфаффовых форм $\{\omega^{\bar{i}}_{\bar{j}}\}$, где

$$\omega^i_0 = \theta^i, \quad \omega^0_0 = -\frac{1}{n+1}\theta^k_k, \quad \omega^i_j = \theta^i_j - \frac{1}{n+1}\delta^i_j\theta^k_k, \quad \omega^0_j = 0; \tag{2}$$

формы этой системы в силу (1) удовлетворяют структурным уравнениям пространства проективной связности $\mathrm{P}_{n,n}$ ([8], с. 9)

$$D\omega^{\bar{i}}_{\bar{j}} = \omega^{\bar{k}}_{\bar{j}} \wedge \omega^{\bar{i}}_{\bar{k}} + \frac{1}{2}R^{\bar{i}}_{\bar{j}st}\omega^s_0 \wedge \omega^t_0, \quad \omega^{\bar{k}}_{\bar{k}} = 0, \quad R^{\bar{i}}_{\bar{j}(st)} = 0, \tag{3}$$

где тензор кривизны-кручения $R^{\bar{i}}_{\bar{j}st}$ пространства $\mathrm{P}_{n,n}$ имеет строение

$$R^i_{0st} = r^i_{st}, \quad R^0_{0st} = -\frac{1}{n+1}r^k_{kst}, \quad R^0_{jst} = 0, \quad R^i_{jst} = r^i_{jst} - \frac{1}{n+1}\delta^i_j r^k_{kst}. \tag{4}$$

Доказана

Теорема 1. *С пространством аффинной связности* $\mathrm{A}_{n,n}$ *ассоциируется пространство проективной связности* $\mathrm{P}_{n,n}$*, определяемое системой пфаффовых форм* $\omega^{\bar{i}}_{\bar{j}}$ *(см. (2)); тензор кривизны-кручения пространства* $\mathrm{P}_{n,n}$ *имеет строение (4).*

Следствие 1. Тензоры кручения r^i_{st} и R^i_{0st} пространств $\mathrm{A}_{n,n}$ и $\mathrm{P}_{n,n}$ совпадают.

Следствие 2. Пространство проективной связности $\mathrm{P}_{n,n}$ вырождается в проективное пространство P_n ($R^{\bar{i}}_{\bar{j}st} \equiv 0$) тогда и только тогда, когда исходное пространство аффинной связности $\mathrm{A}_{n,n}$ является аффинным A_n.

Следуя работе ([6], с. 210), пространство проективной связности $\mathrm{P}_{n,n}$, индуцируемое пространством аффинной связности $\mathrm{A}_{n,n}$, назовем нормализованным, если в нем задано поле гиперплоскостей $c^0_k x^k - x^0 = 0$, определяемое полем ковектора $c^0_{\bar{i}}(c^0_0 = -1)$:

$$dc^0_i + c^0_i\omega^0_0 - c^0_k\omega^k_i + \omega^0_i(\equiv 0) = c^0_{ij}\omega^j_0. \tag{5}$$

В силу (2), (5) нормализация пространства $\mathrm{P}_{n,n}$ равносильна нормализации соответствующего пространства аффинной связности $\mathrm{A}_{n,n}$ тем же полем ковектора $c^0_{\bar{i}}(c^0_0 = -1)$:

$$dc^0_i - c^0_j\theta^j_i = c^0_{ij}\theta^j; \tag{6}$$

поле ковектора $c^0_{\bar{i}}$ в пространстве $\mathrm{A}_{n,n}$ определяет поле нормализующих гиперплоскостей $c^0_k \mathrm{X}^k - 1 = 0$, где $\mathrm{X}^k = \frac{x^k}{x^0}$ — неоднородные координаты точек нормализующей гиперплоскости относительно репера $R = \{\mathrm{A}_0, \vec{e}_k\}$.

Продолжение уравнений (5) с использованием (2), (3) приводит к дифференциальным уравнениям

$$\nabla c^0_{ij} + c^0_{ij}\omega^0_0 = c^0_{ijk}\omega^k_0, \tag{7}$$

где

$$2c^0_{i[jk]} = c^0_s R^s_{ijk} - c^0_i R^0_{0jk} + c^0_{is}R^s_{0jk}. \tag{8}$$

Будем считать, что нормализация пространства $\mathrm{P}_{n,n}$ (а следовательно, и пространства $\mathrm{A}_{n,n}$) является невырожденным; это равносильно тому, что тензор

$$a^0_{ij} \overset{\mathrm{def}}{=} c^0_{ij} - c^0_i c^0_j, \quad \nabla a^0_{ij} + a^0_{ij}\omega^0_0 = a^0_{ijk}\omega^k_0, \tag{9}$$

невырожден: $b \stackrel{\text{def}}{=} |a^0_{ij}| \neq 0$. Отметим, что в уравнениях (9) с учетом (8) справедливо

$$2a^0_{i[jk]} = c^0_s R^s_{ijk} - c^0_i R^0_{0jk} + c^0_{is} R^s_{0jk} - 2c^0_i a^0_{[jk]} + 2a^0_{i[j} c^0_{k]}. \tag{10}$$

Нормализацию пространства $\mathrm{P}_{n,n}$ с полем симметричного тензора a^0_{ij} по аналогии с нормализованным P_n (см. [6]) назовем гармонической.

Продолжая уравнения (9), получим

$$\begin{gathered} \nabla a^0_{ijk} + 2a^0_{ijk}\omega^0_0 = a^0_{ijks}\omega^s_0, \\ 2a^0_{ij[ks]} = a^0_{il} R^l_{jks} + a^0_{lj} R^l_{iks} - 2a^0_{ij} R^0_{0ks} + a^0_{ijl} R^l_{0ks}. \end{gathered} \tag{11}$$

Существует поле взаимного тензора a^{jk}_0, компоненты которого определяются из соотношений

$$a^0_{ik} a^{kj}_0 = a^0_{ki} a^{jk}_0 = \delta^j_i \tag{12}$$

и удовлетворяют дифференциальным уравнениям

$$\nabla a^{ij}_0 - a^{ij}_0 \omega^0_0 = -a^{ik}_0 a^{sj}_0 a^0_{ksl} \omega^l_0. \tag{13}$$

Функция b есть относительный инвариант и в силу (3), (7), (9), (10) удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$d \ln b + 2(n+1)\omega^0_0 = b_k \omega^k_0, \quad b_k = a^{ji}_0 a^0_{ijk}. \tag{14}$$

Продолжая последнее уравнение, имеем

$$\nabla b_k + b_k \omega^0_0 = b_{ks}\omega^s_0, \tag{15}$$

где

$$2b_{[ks]} = -2(n+1) R^0_{0ks} + b_l R^l_{0ks}. \tag{16}$$

Следуя работе [1], возьмем систему форм $\{\overline{\omega}^{\bar{i}}_{\bar{j}}\}$:

$$\begin{gathered} \overline{\omega}^i_0 = \omega^i_0, \quad \overline{\omega}^0_0 = \omega^0_0 + \left(2c^0_k - \frac{1}{n+1} b_k\right)\omega^k_0, \\ \overline{\omega}^i_j = \omega^i_j + \left[a^{is}_0 (a^0_{sjk} - c^0_s a^0_{kj}) - \left(\delta^i_k c^0_j + \delta^i_j \frac{1}{n+1} b_k\right)\right]\omega^k_0, \\ \overline{\omega}^0_i = \omega^0_i (\equiv 0) + [-3c^0_i c^0_k + a^{sl}_0 c^0_s (a^0_{lik} - c_l a^0_{ki}) - 2a^0_{[ik]}]\omega^k_0. \end{gathered} \tag{17}$$

В силу соотношений (3), (5), (9)–(16) формы системы (17) удовлетворяют структурным уравнениям Картана–Лаптева [9], [10]

$$D\overline{\omega}^{\bar{i}}_{\bar{j}} = \overline{\omega}^{\bar{k}}_{\bar{j}} \wedge \overline{\omega}^{\bar{i}}_{\bar{k}} + \frac{1}{2}\overline{R}^{\bar{i}}_{\bar{j}st}\overline{\omega}^s_0 \wedge \overline{\omega}^t_0, \quad \overline{\omega}^{\bar{k}}_{\bar{k}} = 0. \tag{18}$$

Следовательно, $\overline{\omega}^{\bar{i}}_{\bar{j}}$ являются структурными формами пространства проективной связности $\overline{\mathrm{P}}_{n,n}$, компоненты тензора кривизны-кручения $\overline{R}^{\bar{i}}_{\bar{j}st}$ которого имеют следующее строение:

$$\begin{gathered} \overline{R}^i_{0st} = a^{ik}_0 (c^0_k R^0_{0st} - c^0_l R^l_{kst} - c^0_k c^0_l R^l_{0st}), \quad \overline{R}^0_{0st} = -R^0_{0st} + c^0_k (R^k_{0st} + \overline{R}^k_{0st}), \\ \overline{R}^i_{jst} = -c^0_j \overline{R}^i_{0st} - a^{ik}_0 a^0_{lj} (R^l_{kst} + c^0_k R^l_{0st}), \quad \overline{R}^0_{jst} = c^0_k \overline{R}^k_{jst} + a^0_{kj} R^k_{0st} + c^0_j (R^0_{0st} - c^0_k R^k_{0st}). \end{gathered} \tag{19}$$

Из выражений (19) следует, что если $\mathrm{P}_{n,n} \equiv \mathrm{P}_n$ (т. е. $R^{\bar{i}}_{\bar{j}st} \equiv 0$), то в силу $\overline{R}^{\bar{i}}_{\bar{j}st} \equiv 0$ имеем $\overline{\mathrm{P}}_{n,n} \equiv \overline{\mathrm{P}}_n$; справедливо и обратное. При этом образующим элементом тангенциального проективного пространства $\overline{\mathrm{P}}_n$ является нормализующая гиперплоскость.

Таким образом, справедлива

Теорема 2. *Невырожденная нормализация пространства аффинной связности* $\mathrm{A}_{n,n}$ $(b = |a^0_{ij}| \neq 0)$ *индуцирует тангенциальное пространство проективной связности* $\overline{\mathrm{P}}_{n,n}$, *определяемое системой структурных форм* $\{\overline{\omega}^{\bar{i}}_{\bar{j}}\}$ (*см.* (17)); *при этом пространства* $\mathrm{P}_{n,n}$ *и* $\overline{\mathrm{P}}_{n,n}$ *могут быть проективными лишь одновременно.*

Согласно (5), (17) поле ковектора $c^0_{\bar{i}}$ $(c^0_0 = -1)$ определено и в пространстве $\overline{\mathrm{P}}_{n,n}$

$$dc^0_i + c^0_i\overline{\omega}^0_0 - c^0_j\overline{\omega}^j_i + \overline{\omega}^0_i = \overline{c}_{ij}\overline{\omega}^j_0, \quad \overline{c}_{ij} = c^0_{ji}; \tag{20}$$

в силу (9), (20)

$$\overline{a}^0_{ij} = a^0_{ji}. \tag{21}$$

Из соотношений (21) в силу $|a^0_{ij}| \neq 0$ следует, что пространство $\overline{\mathrm{P}}_{n,n}$, как и $\mathrm{P}_{n,n}$, нормализовано невырожденным образом, причем гармоничность нормализации одного из них влечет гармоничность нормализации другого.

Согласно (17), (21) из дифференциальных уравнений (9) тензора a^0_{ij} находим

$$\nabla\overline{a}^0_{ij} + \overline{a}^0_{ij}\overline{\omega}^0_0 = \overline{a}^0_{ijk}\overline{\omega}^k_0,$$

где

$$\overline{a}^0_{ijk} = -a^0_{li}a^{ls}_0 a^0_{sjk} + a^0_{li}a^{ls}_0 a^0_{kj}c^0_s + 4a^0_{ji}c^0_k + 2a^0_{ki}c^0_j + a^0_{jk}c^0_i. \tag{22}$$

В силу соотношений (12), (14), (21), (22) справедливо равенство

$$\overline{b}_k = -b_k + 4(n+1)c^0_k. \tag{23}$$

Теперь согласно соотношениям (21)–(23) очевидно, что преобразование $J : \omega^{\bar{i}}_{\bar{j}} \to \overline{\omega}^{\bar{i}}_{\bar{j}}$ структурных форм пространства $\mathrm{P}_{n,n}$ по закону (17) является инволютивным, т. е. $J \equiv J^{-1}$, т. к.

$$\begin{gathered}
\omega^i_0 = \overline{\omega}^i_0, \quad \omega^0_0 = \overline{\omega}^0_0 + \left(2c^0_k - \frac{1}{n+1}\overline{b}_k\right)\overline{\omega}^k_0, \\
\omega^i_j = \overline{\omega}^i_j + \left[\overline{a}^{is}_0(\overline{a}^0_{sjk} - c^0_s\overline{a}^0_{kj}) - \left(\delta^i_k c^0_j + \delta^i_j\frac{1}{n+1}\overline{b}_k\right)\right]\overline{\omega}^k_0, \\
\omega^0_i(\equiv 0) = \overline{\omega}^0_i + [-3c^0_i c^0_k + \overline{a}^{sl}_0 c^0_s(\overline{a}^0_{lik} - c^0_l\overline{a}^0_{ki}) - 2\overline{a}^0_{[ik]}]\overline{\omega}^k_0.
\end{gathered} \tag{24}$$

Имея в виду инволютивность преобразования J форм связности (ср. (17) с (24)), будем говорить [5], что нормализованные пространства $\mathrm{P}_{n,n}$ и $\overline{\mathrm{P}}_{n,n}$ двойственны по отношению друг к другу. Доказана

Теорема 3. *Индуцируемое при невырожденной нормализации пространства аффинной связности* $\mathrm{A}_{n,n}$ *пространство проективной связности* $\overline{\mathrm{P}}_{n,n}$ *является двойственным по отношению к пространству* $\mathrm{P}_{n,n}$ *относительно инволютивного преобразования форм связности этих пространств по закону* (17).

3. Двойственные пространства аффинной связности

Возьмем две системы пфаффовых форм:

$$\overset{1}{\theta}{}^i_j \overset{\mathrm{def}}{=} \omega^i_j - \delta^i_j\omega^0_0 + \delta^i_j c^0_k\omega^k_0 + c^0_j\omega^i_0, \quad \overset{2}{\theta}{}^i_j \overset{\mathrm{def}}{=} \overline{\omega}^i_j - \delta^i_j\overline{\omega}^0_0 + \delta^i_j c^0_k\overline{\omega}^k_0 + c^0_j\overline{\omega}^i_0; \tag{25}$$

согласно уравнениям (3), (5), (18), (20) каждая из двух систем форм $\{\theta^i, \overset{a}{\theta}{}^i_j\}$, $a = 1, 2$, удовлетворяет структурным уравнениям Картана–Лаптева

$$D\theta^i = \theta^k \wedge \overset{a}{\theta}{}^i_k + \frac{1}{2}\overset{a}{r}{}^i_{st}\theta^s \wedge \theta^t, \quad D\overset{a}{\theta}{}^i_j = \overset{a}{\theta}{}^k_j \wedge \overset{a}{\theta}{}^i_k + \frac{1}{2}\overset{a}{r}{}^i_{jst}\theta^s \wedge \theta^t; \tag{26}$$

в (26) тензоры $\overset{a}{r}{}^i_{st}$ и $\overset{a}{r}{}^i_{jst}$ имеют строение

$$\begin{aligned}
&\overset{1}{r}{}^i_{st} = R^i_{0st}, \quad \overset{1}{r}{}^i_{jst} = R^i_{jst} - \delta^i_j(R^0_{0st} + 2a^0_{[st]} - c^0_k R^k_{0st}) + 2a^0_{j[s}\delta^i_{t]} + c^0_j R^i_{0st};\\
&\overset{2}{r}{}^i_{st} = \overline{R}^i_{0st}, \quad \overset{2}{r}{}^i_{jst} = \overline{R}^i_{jst} - \delta^i_j(\overline{R}^0_{0st} + 2\overline{a}^0_{[st]} - c^0_k \overline{R}^k_{0st}) + 2\overline{a}^0_{j[s}\delta^i_{t]} + c^0_j \overline{R}^i_{0st}.
\end{aligned} \tag{27}$$

Таким образом, каждая из систем форм $\{\theta^i, \overset{a}{\theta}{}^i_j\}$ определяет пространство с фундаментально-групповой аффинной связностью. Эти пространства назовем соответственно первым и вторым пространствами аффинной связности $\overset{1}{\mathrm{A}}_{n,n}$ и $\overset{2}{\mathrm{A}}_{n,n}$, индуцированными невырожденной нормализацией данного пространства аффинной связности $\mathrm{A}_{n,n}$; при этом тензор кручения $\overset{a}{r}{}^i_{st}$ пространства $\overset{a}{\mathrm{A}}_{n,n}$ совпадает с тензором кручения соответствующего пространства проективной связности $\mathrm{P}_{n,n}$ или $\overline{\mathrm{P}}_{n,n}$.

В силу двойственности нормализованных пространств $\mathrm{P}_{n,n}$ и $\overline{\mathrm{P}}_{n,n}$ соответствующие им пространства $\overset{1}{\mathrm{A}}_{n,n}$ и $\overset{2}{\mathrm{A}}_{n,n}$ также являются двойственными относительно инволютивного преобразования J.

С использованием соотношений (4), (19), (21), (27) компоненты тензоров кручения $\overset{a}{r}{}^i_{st}$ и кривизны $\overset{a}{r}{}^i_{jst}$ (см. (27)) пространств $\overset{a}{\mathrm{A}}_{n,n}$ можно записать в виде

$$\overset{1}{r}{}^i_{st} = r^i_{st}, \quad \overset{1}{r}{}^i_{jst} = r^i_{jst} - \delta^i_j(2a^0_{[st]} - c^0_k r^k_{st}) + 2a^0_{j[s}\delta^i_{t]} + c^0_j r^i_{st}; \tag{28}$$

$$\overset{2}{r}{}^i_{st} = -a^{ik}_0 c^0_l (r^l_{kst} + c^0_k r^l_{st}), \quad \overset{2}{r}{}^i_{jst} = -[a^{ik}_0 a^0_{lj}(r^l_{kst} + c^0_k r^l_{st}) + \overset{1}{r}{}^i_{jst} - r^i_{jst} - c^0_j r^i_{st}]. \tag{29}$$

Таким образом, справедлива

Теорема 4. *При невырожденной нормализации пространства аффинной связности* $\mathrm{A}_{n,n}$ *индуцируются два двойственных между собой пространства аффинной связности* $\overset{1}{\mathrm{A}}_{n,n}$ *и* $\overset{2}{\mathrm{A}}_{n,n}$, *слоевые формы которых имеют строение* (25); *при этом тензоры кривизны* $\overset{a}{r}{}^i_{st}$ *и кручения* $\overset{a}{r}{}^i_{jst}$ *этих пространств имеют вид* (28), (29).

Следствие. Если $\mathrm{A}_{n,n} \equiv \mathrm{A}_n$ (т. е. $r^i_{st} = r^i_{jst} \equiv 0$), то пространства $\overset{1}{\mathrm{A}}_{n,n}$ и $\overset{2}{\mathrm{A}}_{n,n}$ без кручения и компоненты тензоров кривизны их имеют строения

$$\overset{1}{r}{}^i_{jst} = -\overset{2}{r}{}^i_{jst} = 2(a^0_{j[s}\delta^i_{t]} - \delta^i_j a^0_{[st]}).$$

Замечание 1. В условиях данного следствия альтернированные тензоры Риччи $\overset{a}{r}_{[st]}$ пространств $\overset{a}{\mathrm{A}}_{n,n}$ имеют вид

$$\overset{1}{r}_{[st]} = -\overset{2}{r}_{[st]} = (n+1)a^0_{[st]};$$

следовательно, условием эквиаффинности как первого $\overset{1}{\mathrm{A}}_{n,n}$, так и второго $\overset{2}{\mathrm{A}}_{n,n}$ пространства является гармоничность нормализации исходного аффинного пространства A_n.

Из соотношений (17), (25) находим

$$\overset{1}{\theta}{}^i_j = \omega^i_j - \delta^i_j\omega^0_0 + \delta^i_j c^0_k \omega^k_0 + c^0_j\omega^i_0, \quad \overset{2}{\theta}{}^i_j = \overset{1}{\theta}{}^i_j + a^{il}_0(a^0_{ljk} - c^0_l a^0_{kj})\omega^k_0 - c^0_j\omega^i_0 - 2\delta^i_j c^0_k\omega^k_0. \tag{30}$$

В силу соотношений (30) дифференциальные уравнения (9) тензора a^0_{ij} запишутся в виде

$$da^0_{ij} - a^0_{ik}\overset{2}{\theta}{}^k_j - a^0_{kj}\overset{1}{\theta}{}^k_i = 0.$$

Из последнего вытекает

Теорема 5. *Двойственные аффинные связности пространств* $\overset{a}{\mathrm{A}}_{n,n}$, *индуцируемых невырожденной нормализацией пространства аффинной связности* $\mathrm{A}_{n,n}$, *являются обобщенно сопряженными* ([6], *с.* 214) *относительно поля тензора* a^0_{ij}.

Следствие. Аффинная связность, являющаяся средней ([6], с. 129) по отношению к связностям пространств $\overset{1}{\mathrm{A}}_{n,n}$ и $\overset{2}{\mathrm{A}}_{n,n}$, индуцируемых невырожденной гармонической нормализацией аффинного пространства A_n, является римановой с полем метрического тензора a^0_{ij}.

Справедливость этого следствия непосредственно вытекает из теоремы 5 с учетом замечания 1.

4. Пространство аффинно-метрической связности

Согласно [9], пространством проективно-метрической связности $\mathrm{K}_{n,n}$ называется пространство проективной связности $\mathrm{P}_{n,n}$, обладающее инвариантным полем локальных гиперквадрик Q_{n-1} (локальных абсолютов). Критерием того, что $\mathrm{P}_{n,n}$ есть пространство проективно-метрической связности $\mathrm{K}_{n,n}$ с полем локальных абсолютов

$$a_{ij}x^i x^j + \frac{1}{c}(g_{i0}x^i + cx^0)^2 = 0, \quad a_{ij} = a_{ji}, \quad g_{i0} = g_{0i}, \quad c = \mathrm{const} \neq 0, \tag{31}$$

отличных от сдвоенных гиперплоскостей, является выполнение уравнений [2]

$$\begin{aligned} dg_{i0} - g_{k0}\omega^k_i - c\omega^0_i &= a_{ik}\omega^k_0, \\ da_{ij} - a_{ik}\omega^k_j - a_{kj}\omega^k_i &= -\frac{1}{c}(a_{ik}g_{j0} + a_{jk}g_{i0})\omega^k_0; \end{aligned} \tag{32}$$

при этом форма

$$\omega^0_0 = -\frac{1}{c}g_{k0}\omega^k_0 \tag{33}$$

является главной.

Наличие инвариантного поля локальных гиперквадрик (31) приводит [2] к конечным соотношениям для компонент тензора кривизны-кручения пространства $\mathrm{K}_{n,n}$

$$\begin{aligned} R^0_{0st} + \frac{1}{c}g_{k0}R^k_{0st} = 0, \quad g_{k0}R^k_{ist} + a_{ik}R^k_{0st} + cR^0_{ist} = 0, \\ a_{ik}R^k_{jst} + a_{kj}R^k_{ist} - \frac{1}{c}(a_{ik}g_{j0} + a_{jk}g_{i0})R^k_{0st} = 0; \end{aligned} \tag{34}$$

одновременное выполнение этих соотношений есть условие полной интегрируемости объединенной системы дифференциальных уравнений (32), (33).

Определение. Если пространство проективной связности $\mathrm{P}_{n,n}$, ассоциированное с исходным пространством аффинной связности $\mathrm{A}_{n,n}$ по схеме (2), является пространством проективно-метрической связности $\mathrm{K}_{n,n}$, то будем говорить, что $\mathrm{A}_{n,n}$ есть пространство аффинно-метрической связности.

Ниже пространство аффинно-метрической связности обозначим через $\mathrm{M}_{n,n}$.

В неоднородных координатах $\mathrm{X}^i = x^i : x^0$ уравнение локального абсолюта Q_{n-1} пространства $\mathrm{M}_{n,n}$ согласно (31) имеет вид

$$a_{ij}\mathrm{X}^i\mathrm{X}^j + \frac{1}{c}(g_{i0}\mathrm{X}^i + c)^2 = 0; \tag{35}$$

в силу (2), (32), (33) функции a_{ij}, g_{i0} удовлетворяют дифференциальным уравнениям

$$\begin{aligned} dg_{i0} - g_{k0}\theta_i^k &= \left(a_{ik} - \frac{1}{c}g_{i0}g_{k0}\right)\theta^k, \\ da_{ij} - a_{ik}\theta_j^k - a_{kj}\theta_i^k &= -\frac{1}{c}(a_{ik}g_{j0} + a_{jk}g_{i0} + 2a_{ij}g_{k0})\theta^k. \end{aligned} \tag{36}$$

Согласно (4), (34) компоненты тензоров кривизны r^i_{jst} и кручения r^i_{st} пространства $\mathrm{M}_{n,n}$ удовлетворяют конечным соотношениям

$$\begin{aligned} &\frac{1}{n+1}r^k_{kst} = \frac{1}{c}g_{k0}r^k_{st}, \quad g_{k0}r^k_{ist} + a_{ik}r^k_{st} = \frac{1}{n+1}g_{i0}r^k_{kst}, \\ &a_{ik}r^k_{jst} + a_{kj}r^k_{ist} = \frac{2}{n+1}a_{ij}r^k_{kst} + \frac{1}{c}(a_{ik}g_{j0} + a_{jk}g_{i0})r^k_{st}. \end{aligned} \tag{37}$$

Замечание 2. Согласно уравнениям (35), (36) справедливо следующее: 1) обращение в нуль тензора g_{i0} приводит к $c = 0$, тогда как $c \neq 0$; 2) обращение в нуль тензора a_{ij} приводит к вырождению локального абсолюта (35) в сдвоенную гиперплоскость, но это противоречит тому, что локальный абсолют отличен [2] от сдвоенной гиперплоскости. В силу сказанного ниже предполагается, что в уравнении (35) тензоры g_{i0} и a_{ij} ненулевые.

Замечание 3. Пусть невырожденная нормализация пространства аффинно-метрической связности $\mathrm{M}_{n,n}$ полем ковектора c_i^0 является полярной относительно поля локального абсолюта (35), т. е. $c_i^0 = -\frac{1}{c}g_{i0}$; в этом случае в силу соотношений (5), (9), (32), (33) имеет место $a^0_{ij} = -\frac{1}{c}a_{ij}$, $a^0_{ijk} = \frac{1}{c^2}(a_{ik}g_{j0} + a_{jk}g_{i0} + 2a_{ij}g_{k0})$. Теперь из строения слоевых форм (30) следует, что *при невырожденной полярной нормализации пространства аффинно-метрической связности* $\mathrm{M}_{n,n}$ *связности пространств* $\overset{1}{\mathrm{A}}_{n,n}$, $\overset{2}{\mathrm{A}}_{n,n}$ *совпадают, т. е.* $\overset{1}{\theta}{}^i_j \equiv \overset{2}{\theta}{}^i_j$; *при этом нормализация пространства* $\mathrm{M}_{n,n}$ *является гармонической.*

Если пространство $\mathrm{M}_{n,n}$ без кручения ($r^i_{st} \equiv 0$), то из тождеств Риччи $r^i_{(jst)} \equiv 0$ непосредственно следует

$$r^k_{kst} = -2r_{[st]}, \tag{38}$$

где $r_{st} \overset{\mathrm{def}}{=} r^l_{stl}$ есть тензор Риччи пространства $\mathrm{M}_{n,n}$. Из соотношений (37_1) и (38) находим $r_{[st]} = 0$.

Теорема 6. *Пространство аффинно-метрической связности* $\mathrm{M}_{n,n}$ *без кручения является эквиаффинным.*

Уравнения (36_2) можно переписать в виде

$$da_{ij} - a_{ik}\Theta^k_j - a_{kj}\Theta^k_i = 0, \tag{39}$$

где

$$\Theta^i_j = \theta^i_j - \frac{1}{c}(\delta^i_j g_{k0}\theta^k + g_{j0}\theta^i). \tag{40}$$

Система форм $\{\theta^i, \Theta^i_j\}$ в силу (1), (36) удовлетворяет структурным уравнениям Картана–Лаптева [9], [10]

$$\begin{aligned} D\theta^i &= \theta^k \wedge \Theta^i_j + \frac{1}{2}\Re^i_{st}\theta^s \wedge \theta^t, \\ D\Theta^i_j &= \Theta^k_j \wedge \Theta^i_k + \frac{1}{2}\Re^i_{jst}\theta^s \wedge \theta^t, \end{aligned} \tag{41}$$

а следовательно, определяет новое пространство аффинной связности $\widetilde{\mathrm{A}}_{n,n}$. В структурных уравнениях (41) тензоры кручения $\Re^i_{st}$ и кривизны $\Re^i_{jst}$ этого пространства имеют соответственно вид

$$\Re^i_{st} = r^i_{st}, \quad \Re^i_{jst} = r^i_{jst} - \frac{1}{c}(\delta^i_j g_{k0} r^k_{st} + g_{j0} r^i_{st} + 2a_{j[s}\delta^i_{t]}). \tag{42}$$

Замечание 4. Строение форм Θ^i_j (см. (40)) говорит о том, что пространство $\widetilde{\mathrm{A}}_{n,n}$ индуцируется полярной относительно поля (35) нормализацией пространства аффинно-метрической связности $\mathrm{M}_{n,n}$; следовательно, согласно замечанию 3 $\widetilde{\mathrm{A}}_{n,n} \equiv \overset{1}{\mathrm{A}}_{n,n} \equiv \overset{2}{\mathrm{A}}_{n,n}$.

Замечание 5. С использованием определения пространства $\mathrm{M}_{n,n}$ (см. §4) и замечания 2 нетрудно показать, что $\widetilde{\mathrm{A}}_{n,n}$ не может быть пространством аффинно-метрической связности.

Из соотношений (42_1) следует, что тензоры кручения пространств $\widetilde{\mathrm{A}}_{n,n}$ и $\mathrm{M}_{n,n}$ совпадают. При этом уравнения (39) говорят о том, что связность пространства $\widetilde{\mathrm{A}}_{n,n}$ является метрической (вообще говоря, с кручением) с полем метрического тензора a_{ij}.

Для пространства $\widetilde{\mathrm{A}}_{n,n}$ без кручения согласно соотношениям (38), (42) и теореме 6 справедливо

$$2\Re_{[st]} = -\Re^k_{kst} = -r^k_{kst} = 2r_{[st]} = 0.$$

Доказана

Теорема 7. *Для пространства аффинно-метрической связности* $\mathrm{M}_{n,n}$ *с полем локальных абсолютов* (35) *система форм Пфаффа* $\{\theta^i, \Theta^i_j\}$ (*см.* (40)) *определяет пространство аффинной связности* $\widetilde{\mathrm{A}}_{n,n}$, *причем тензоры кручения пространств* $\widetilde{\mathrm{A}}_{n,n}$ *и* $\mathrm{M}_{n,n}$ *совпадают. Связность пространства* $\widetilde{\mathrm{A}}_{n,n}$ *является метрической* (*вообще говоря, с кручением*) *с полем метрического тензора* a_{ij}, *причем если* $\widetilde{\mathrm{A}}_{n,n}$ *имеет нулевое кручение, то оно есть пространство эквиаффинной связности.*

Следствие. Если $\mathrm{M}_{n,n}$ есть пространство аффинно-метрической связности без кручения, причем тензор a_{ij} невырожден, то пространство $\widetilde{\mathrm{A}}_{n,n}$ является римановым с полем метрического тензора a_{ij}.

В предположении невырожденности тензора a_{ij} справедлива

Теорема 8. *Пространство аффинно-метрической связности* $\mathrm{M}_{n,n}$ *плоское* $(r^i_{st} = r^i_{jst} \equiv 0)$ *тогда и только тогда, когда* $\widetilde{\mathrm{A}}_{n,n}$ *является римановым пространством постоянной кривизны* $\mathrm{K} = -\frac{1}{c}$.

Действительно, если пространство $\mathrm{M}_{n,n}$ плоское, то необходимость условия теоремы 8 непосредственно следует из соотношений (42) и следствия теоремы 7, т. к. при этом справедливо равенство

$$\Re^i_{jst} = -\frac{2}{c} a_{j[s}\delta^i_{t]}; \tag{43}$$

последнее согласно ([6], с. 171; [7], с. 593) характеризует риманово пространство постоянной кривизны $\mathrm{K} = -\frac{1}{c}$.

Обратно, если $\widetilde{\mathrm{A}}_{n,n}$ есть риманово пространство постоянной кривизны, то справедливы соотношения (43) и $\Re^i_{st} = r^i_{st} = 0$; поэтому из (42) следует $r^i_{jst} = 0$, т. е. $\mathrm{M}_{n,n}$ есть плоское пространство.

Так как в условиях теоремы 8 справедливо $\Re_{js} = -\frac{n-1}{c} a_{js}$, т. е. тензор Риччи риманова пространства $\widetilde{\mathrm{A}}_{n,n}$ постоянной кривизны пропорционален метрическому тензору с постоянным коэффициентом пропорциональности, то согласно ([11], с. 268) $\widetilde{\mathrm{A}}_{n,n}$ является пространством Эйнштейна.

5. Индуцированное пространство аффинно-метрической связности

Рассмотрим аффинно-метрическое пространство $\mathrm{M}_{n,n}$, нормализованное невырожденным образом полем ковектора $c^0_{\bar i}$ (см. (5), (6)); при этом согласно теореме 4 индуцируются два двойственных между собой пространства аффинной связности $\overset{a}{\mathrm{A}}_{n,n}$. Задача — при некоторых предположениях найти условие, при котором хотя бы одно из пространств $\overset{a}{\mathrm{A}}_{n,n}$ также является пространством аффинно-метрической связности. Здесь следует заметить, что ниже исключается из рассмотрения полярная нормализация пространства $\mathrm{M}_{n,n}$; в противном случае согласно замечаниям 4, 5 поставленная задача не имеет положительного решения.

Согласно теореме 1 заключаем, что с пространством аффинной связности $\overset{a}{\mathrm{A}}_{n,n}$ ассоциируется пространство проективной связности $\overset{a}{\mathrm{P}}_{n,n}$, определяемое системой пфаффовых форм $\overset{a}{\omega}{}^{\bar i}_{\bar j}$:

$$\overset{2}{\omega}{}^i_0 = \overset{a}{\theta}{}^i \equiv \theta^i, \quad \overset{a}{\omega}{}^0_0 = -\frac{1}{n+1}\overset{a}{\theta}{}^k_k, \quad \overset{a}{\omega}{}^i_j = \overset{a}{\theta}{}^i_j - \frac{1}{n+1}\delta^i_j\overset{a}{\theta}{}^k_k, \quad \overset{a}{\omega}{}^0_j = 0.$$

С использованием $\omega^{\bar k}_{\bar k} = 0$ (см. (3)), (14), (30) получим

$$\begin{gathered}
\overset{1}{\omega}{}^i_0 = \theta^i, \quad \overset{1}{\omega}{}^0_0 = \omega^0_0 - c^0_k\omega^k_0, \quad \overset{1}{\omega}{}^i_j = \omega^i_j + c^0_j\omega^i_0, \quad \overset{1}{\omega}{}^0_j = 0; \\
\overset{2}{\omega}{}^i_0 = \theta^i, \quad \overset{2}{\omega}{}^0_0 = \omega^0_0 + c^0_k\omega^k_0 - \frac{1}{n+1}b_k\omega^k_0, \quad \overset{2}{\omega}{}^0_j = 0, \\
\overset{2}{\omega}{}^i_j = \omega^i_j + a^{il}_0(a^0_{ljk} - c^0_l a^0_{kj})\omega^k_0 - \frac{1}{n+1}\delta^i_j b_k\omega^k_0.
\end{gathered} \tag{44}$$

Каждая из систем форм $\overset{a}{\omega}{}^{\bar i}_{\bar j}$ удовлетворяет структурным уравнениям пространства проективной связности $\overset{a}{\mathrm{P}}_{n,n}$:

$$D\overset{a}{\omega}{}^{\bar i}_{\bar j} = \overset{a}{\omega}{}^{\bar k}_{\bar j} \wedge \overset{a}{\omega}{}^{\bar i}_{\bar k} + \frac{1}{2}\overset{a}{R}{}^{\bar i}_{\bar j st}\overset{a}{\omega}{}^s_0 \wedge \overset{a}{\omega}{}^t_0, \tag{45}$$

где согласно (4) компоненты тензора кривизны-кручения $\overset{a}{R}{}^{\bar i}_{\bar j st}$ имеют строение

$$\overset{a}{R}{}^i_{0st} = \overset{a}{r}{}^i_{st}, \quad \overset{a}{R}{}^0_{0st} = -\frac{1}{n+1}\overset{a}{r}{}^k_{kst}, \quad \overset{a}{R}{}^0_{jst} = 0, \quad \overset{a}{R}{}^i_{jst} = \overset{a}{r}{}^i_{jst} - \frac{1}{n+1}\delta^i_j\overset{a}{r}{}^k_{kst}. \tag{46}$$

Заметим, что в (46) тензоры кручения $\overset{a}{r}{}^i_{st}$ и кривизны $\overset{a}{r}{}^i_{jst}$ пространства $\overset{a}{\mathrm{A}}_{n,n}$ имеют вид (28), (29).

Из (44) с использованием $\omega^i_0 = \theta^i$ (см. (2)), (33) находим

$$\overset{a}{\omega}{}^0_0 = -\frac{1}{c}\overset{a}{g}_{k0}\overset{a}{\omega}{}^k_0, \tag{47}$$

где

$$\overset{1}{g}_{k0} = g_{k0} + cc^0_k, \quad \overset{2}{g}_{k0} = g_{k0} - cc^0_k + \frac{c}{n+1}b_k. \tag{48}$$

Продифференцировав соотношения (48), с использованием (5), (15), уравнения (32_1) и (44) находим

$$d\overset{a}{g}_{k0} - \overset{a}{g}_{s0}\overset{a}{\omega}{}^s_k - c\overset{a}{\omega}{}^0_k(\equiv 0) = \overset{a}{a}_{ks}\overset{a}{\omega}{}^s_0, \tag{49}$$

где

$$\overset{1}{a}_{ks}=a_{ks}+2cc^0_kc^0_s+ca^0_{ks},$$

$$\overset{2}{a}_{ks}=-\overset{2}{g}_{i0}a^{ij}_0(a^0_{jks}-c^0_ja^0_{sk})+a_{ks}-c(a^0_{ks}+c^0_kc^0_s)-c^0_kg_{s0}+$$

$$+\frac{1}{n+1}(g_{k0}b_s+g_{s0}b_k)+\frac{c}{n+1}\left(b_{ks}-c^0_kb_s+\frac{1}{n+1}b_kb_s\right). \qquad (50)$$

Чтобы $\overset{a}{\mathrm{A}}_{n,n}$ было пространством аффинно-метрической связности $\overset{a}{\mathrm{M}}_{n,n}$, необходимо (но не достаточно), чтобы тензор $\overset{a}{a}_{ks}$ был симметричным. Найдем условие его симметричности.

С использованием соотношений (10), (16), (19), (27), (31), (50) находим

$$\overset{1}{a}_{[ks]}=ca^0_{[ks]},$$

$$\overset{2}{a}_{[ks]}=cc^0_i\overset{1}{r}{}^i_{ks}+\overset{2}{g}_{i0}\overset{2}{r}{}^i_{ks}-2ca^0_{[ks]}.$$

Теорема 9. 1) *Условием симметричности тензора* $\overset{1}{a}_{ks}$ *является гармоничность нормализации пространства аффинно-метрической связности* $\mathrm{M}_{n,n}$; 2) *в случае, когда нормализация пространства* $\mathrm{M}_{n,n}$ *индуцирует пространства аффинной связности* $\overset{a}{\mathrm{A}}_{n,n}$ *без кручения* ($\overset{1}{r}{}^i_{rs}=\overset{2}{r}{}^i_{ks}\equiv 0$), *условием симметричности тензора* $\overset{2}{a}_{ks}$ *является гармоничность данной нормализации.*

Ниже предполагается, что нормализация пространства аффинно-метрической связности $\mathrm{M}_{n,n}$ гармоническая и индуцируемые при этом оба пространства $\overset{a}{\mathrm{A}}_{n,n}$ имеют нулевое кручение; согласно соотношениям (28), (29), эти требования равносильны выполнению соотношений

$$r^i_{st}=0,\quad c^0_lr^l_{kst}=0,\quad a^0_{[st]}=0. \qquad (51)$$

При этом согласно теореме 9 оба тензора $\overset{a}{a}_{ks}$ являются симметричными.

Продолжая уравнения (49), с использованием (45), (47) находим

$$d\overset{a}{a}_{ks}-\overset{a}{a}_{kl}\overset{a}{\omega}{}^l_s-\overset{a}{a}_{ls}\overset{a}{\omega}{}^l_k=\overset{a}{a}_{ksl}\omega^l_0, \qquad (52)$$

где

$$2\overset{a}{a}_{k[sl]}=\frac{2}{c}\overset{a}{a}_{k[s}\overset{a}{g}_{l]0}+\overset{a}{g}_{t0}\overset{a}{R}{}^t_{ksl}; \qquad (53)$$

при этом из уравнений (52) следует

$$\overset{a}{a}_{[ks]l}=0. \qquad (54)$$

Симметричность тензора $\overset{a}{a}_{ks}$ равносильна тождеству

$$\overset{a}{a}_{ks}\omega^k_0\wedge\omega^s_0\equiv 0; \qquad (55)$$

замыкая тождества (55), с использованием уравнений (45), (52) получим

$$\overset{a}{a}_{ksl}\omega^l_0\wedge\omega^k_0\wedge\omega^s_0=-\frac{2}{c}\overset{a}{a}_{ls}\overset{a}{g}_{k0}\omega^l_0\wedge\omega^k_0\wedge\omega^s_0,$$

что приводит к соотношениям

$$\overset{a}{a}_{(ksl)}=-\frac{2}{c}\overset{a}{a}_{(ls}\overset{a}{g}_{k)0}. \qquad (56)$$

Из выражений (53), (54), (56) непосредственно следует

$$\overset{a}{a}_{skl}=-\frac{1}{c}(\overset{a}{a}_{kl}\overset{a}{g}_{s0}+\overset{a}{a}_{sl}\overset{a}{g}_{k0})+\frac{1}{3}\overset{a}{g}_{t0}(\overset{a}{R}{}^t_{ksl}+\overset{a}{R}{}^t_{skl}).$$

В силу последних равенств уравнения (52) запишутся в виде

$$d\overset{a}{a}_{ks} - \overset{a}{a}_{kl}\overset{a}{\omega}{}^l_s - \overset{a}{a}_{ls}\overset{a}{\omega}{}^l_k = -\frac{1}{c}(\overset{a}{a}_{kl}\overset{a}{g}_{s0} + \overset{a}{a}_{sl}\overset{a}{g}_{k0})\omega^l_0 + \frac{1}{3}\overset{a}{g}_{t0}(\overset{a}{R}{}^t_{ksl} + \overset{a}{R}{}^t_{skl})\omega^l_0. \tag{57}$$

Уравнения (49), (57) показывают (сравни с (32)), что каждое из двух двойственных между собой пространств аффинной связности $\overset{a}{\mathrm{A}}_{n,n}$, индуцируемое гармонической нормализацией пространства аффинно-метрической связности $\mathrm{M}_{n,n}$, отличной от полярной, в предположениях (51) (т. е. при $\overset{1}{r}{}^i_{st} = \overset{2}{r}{}^i_{st} \equiv 0$) является пространством аффинно-метрической связности тогда и только тогда, когда

$$\overset{a}{g}_{t0}(\overset{a}{R}{}^t_{ksl} + \overset{a}{R}{}^t_{skl}) = 0, \quad a = 1, 2. \tag{58}$$

Покажем, что при указанных предположениях $\overset{1}{\mathrm{A}}_{n,n}$ не может быть пространством аффинно-метрической связности. Действительно, условие (58) при a =1 с использованием (28), (37), (38), (46), (48), (51) и теоремы 6 запишется в виде

$$a^0_{k[s}g_{l]0} + a^0_{s[k}g_{l]0} + c(a^0_{k[s}c^0_{l]} + a^0_{s[k}c^0_{l]}) = 0.$$

Свернув последние соотношения с тензором a^{kl}_0, имеем $c^0_s = -\frac{1}{c}g_{s0}$, это противоречит тому, что нормализация пространства $\mathrm{M}_{n,n}$ отлична от полярной.

Условие (58) при a =2 в силу (28), (29), (46), (48), (51) эквивалентно соотношению

$$\left(g_{t0} - cc^0_t + \frac{c}{n+1}b_t\right)[a^{ti}_0(a^0_{jk}r^j_{isl} + a^0_{js}r^j_{ikl}) + 2(a^0_{k[s}\delta^t_{l]} + a^0_{s[k}\delta^t_{l]})] = 0. \tag{59}$$

Предполагая справедливость соотношений (59), свернем их с тензором a^{ks}_0. Имеем

$$\left(g_{t0} - cc^0_t + \frac{c}{n+1}b_t\right)[(n-1)\delta^t_l - a^{ti}_0 r_{il}] = 0, \tag{60}$$

где r_{il} — тензор Риччи исходного пространства $\mathrm{M}_{n,n}$.

В общем случае справедливо $\det\|(n-1)\delta^t_l - a^{ti}_0 r_{il}\| \neq 0$. Последнее очевидно, например, в случае, когда пространство $\mathrm{M}_{n,n}$ плоское. В силу этого из системы (60) следует

$$G_{t0} \overset{\text{def}}{=} g_{t0} - cc^0_t + \frac{c}{n+1}b_t = 0. \tag{61}$$

Обратно, если обращается в нуль тензор G_{t0} (см. (61)), то справедливо (59), т. е. $\overset{2}{\mathrm{A}}_{n,n}$ является пространством аффинно-метрической связности.

Доказана

Теорема 10. *Если каждое из двойственных между собой пространств $\overset{a}{\mathrm{A}}_{n,n}$, индуцируемых гармонической нормализацией пространства аффинно-метрической связности $\mathrm{M}_{n,n}$, отличной от полярной, имеет нулевое кручение, то*

1) $\overset{1}{\mathrm{A}}_{n,n}$ *не может быть пространством аффинно-метрической связности,*

2) $\overset{2}{\mathrm{A}}_{n,n}$ *является пространством аффинно-метрической связности тогда и только тогда, когда обращается в нуль тензор G_{t0} (см. (61)).*

Замечание 6. Если в условиях теоремы 10 $\overset{2}{\mathrm{A}}_{n,n}$ есть пространство аффинно-метрической связности, то оно остается двойственным пространству $\overset{1}{\mathrm{A}}_{n,n}$, не являющемуся пространством аффинно-метрической связности.

Литература

1. Столяров А.В. *Двойственная теория оснащенных многообразий.* – Чебоксары: Изд-во Чувашск. гос. пед. ин-та, 1994. – 290 с.
2. Столяров А.В. *Пространство проективно-метрической связности* // Изв. вузов. Математика. – 2003. – № 11. – С. 70–76.
3. Голубева Е.А. *Двойственные пространства проективно-метрической связности без кручения, ассоциированные с регулярной неголономной гиперповерхностью.* – Чувашск. гос. пед. ун-т. – 2005. – 17 с. – Деп. в ВИНИТИ 28.12.2005, № 1743-В2005.
4. Голубева Е.А. *Внутренняя геометрия нормализованного пространства проективно-метрической связности* // Изв. вузов. Математика. – 2006. – № 1. – С. 73–75.
5. Лаптев Г.Ф. *О выделении одного класса внутренних геометрий, индуцированных на поверхности пространства аффинной связности* // ДАН СССР. – 1943. – Т. 41. – № 8. – С. 329–331.
6. Норден А.П. *Пространства аффинной связности.* – М.: Наука, 1976. – 432 с.
7. Рашевский П.К. *Риманова геометрия и тензорный анализ.* – М.: Наука, 1967. – 664 с.
8. Cartan E. *Leçons sur la théorie des éspaces a connexion projective.* – Paris, 1937.
9. Лаптев Г.Ф. *Дифференциальная геометрия погруженных многообразий. Теоретико-групповой метод дифференциально-геометрических исследований* // Тр. Моск. матем. об-ва. – 1953. – № 2. – С. 275–382.
10. Евтушик Л.Е., Лумисте Ю.Г., Остиану Н.М., Широков А.П. *Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях* // Итоги науки и техн. Проблемы геометрии. – М.: ВИНИТИ, 1979. – Т. 9. – С. 5–246.
11. Кобаяси Ш., Номидзу К. *Основы дифференциальной геометрии.* Т. 1. – М.: Наука, 1981. – 344 с.

Чувашский государственный
педагогический университет

Поступила
28.03.2006