И З В Е С Т И Я   В Ы С Ш И Х   У Ч Е Б Н Ы Х   З А В Е Д Е Н И Й

2002 МАТЕМАТИКА № 1 (476)

УДК 514.755

Т.Б. ЖОГОВА

О СУЩЕСТВОВАНИИ СЕМЕЙСТВ R^m_{2n-1}, ДОПУСКАЮЩИХ ПРОЕКТИВНОЕ ИЗГИБАНИЕ ВТОРОГО ПОРЯДКА

В данной работе, являющейся продолжением [1], изучаем проективное изгибание семейств L^m_{2n-1} в смысле Фубини–Картана ([2], гл. 5, п. 55, с. 102).

В первой части работы исследуется особое решение системы, определяющей проективное изгибание 2-го порядка семейств L^m_{2n-1}. Доказано существование классов проективно изгибаемых семейств L^m_{2n-1} в особом случае. Вторая часть посвящена изучению геометрического смысла особого решения. Оказалось, что в особом случае только семейства R^m_{2n-1} допускают непрерывное проективное изгибание 2-го порядка с одним произвольным параметром. В заключительной части доказано, что при $n \geq 5$ любое семейство R^m_{2n-1} также допускает в особом случае непрерывное проективное изгибание 2-го порядка с одним произвольным параметром.

Условимся, что по индексам i, j, k, l суммирования нет и если они находятся в одном и том же математическом выражении, то не принимают равные значения (т. е., напр., $i \neq j$). По индексам p, q, r всегда проводится суммирование. Все индексы принимают значения от 1 до n включительно.

1. Особое решение задачи изгибания семейств L^m_{2n-1}

В проективном пространстве P_{2n-1} введем проективный репер $\{A_i, A_{n+i}\}$ с инфинитезимальными перемещениями

$$dA_i = \omega_i^p A_p + \omega_i^{n+p} A_{n+p}, \quad dA_{n+i} = \omega_{n+i}^p A_p + \omega_{n+i}^{n+p} A_{n+p}.$$

Как и в [1], рассмотрим семейство L^m_{2n-1}, которое описывается $(n-1)$-плоскостью

$$L_{n-1} = (A_1 \dots A_n),$$

где A_i — фокусы $(n-1)$-плоскости L_{n-1}. Обозначим $\omega_i^{n+i} = \omega_i$, и фокальное направление фокуса A_i определим уравнением $\omega_i = 0$. За независимые формы семейства L^m_{2n-1} примем формы ω_k, $k = \overline{1, m}$, $2 \leq m \leq n$. Отнеся семейство L^m_{2n-1} к реперу 1-го порядка, получим

$$\omega_i^{n+j} = 0. \tag{1}$$

Отсюда внешним дифференцированием находим

$$\omega_i^j \wedge \omega_j - \omega_{n+i}^{n+j} \wedge \omega_i = 0. \tag{2}$$

Аналогично, семейство $\overline{L}^m_{2n-1}$, которое изгибанием 2-го порядка наложимо на семейство L^m_{2n-1}, отнесем к реперу 1-го порядка $\{B_i, B_{n+i}\}$ с инфинитезимальными перемещениями

$$dB_i = \Omega_i^p B_p + \Omega_i^{n+p} B_{n+p}, \quad dB_{n+i} = \Omega_{n+i}^p B_p + \Omega_{n+i}^{n+p} B_{n+p}.$$

Тогда будут иметь место уравнения

$$\Omega_i^{n+j} = 0. \tag{3}$$

Для дальнейшего исследования необходимо иметь замкнутую систему уравнений, определяющую семейство L^m_{2n-1} вместе с семейством $\overline{L}^m_{2n-1}$ ([1], с. 14). Запишем эту *систему уравнений*, обозначив ее через I. Она содержит, кроме уравнений (1)–(3), уравнения

$$\widetilde{\omega}_i = 0, \ \ \widetilde{\omega}^i_i - \widetilde{\omega}^{n+i}_{n+i} = 0, \ \ \widetilde{\omega}^j_i = 0, \ \ \widetilde{\omega}^{n+j}_{n+i} = 0, \tag{4}$$

$$\widetilde{\omega}^i_{n+i} \wedge \omega_i = 0, \tag{5}$$

$$(\widetilde{\omega}^i_i - \widetilde{\omega}^j_j) \wedge \omega^j_i - \widetilde{\omega}^j_{n+i} \wedge \omega_i = 0, \ \ (\widetilde{\omega}^i_i - \widetilde{\omega}^j_j) \wedge \omega^{n+j}_{n+i} + \widetilde{\omega}^j_{n+i} \wedge \omega_j = 0, \tag{6}$$

где введены обозначения

$$\Omega^{n+i}_i = \Omega_i, \ \ \Omega^\beta_\alpha - \omega^\beta_\alpha = \widetilde{\omega}^\beta_\alpha, \ \ \alpha, \beta = \overline{1, 2n}.$$

При $m = 2$ эта система находится в инволюции. На втором интегральном элементе значения форм $\widetilde{\omega}^i_i - \widetilde{\omega}^1_1$, ω_k, $k = \overline{3, n}$, можно считать произвольными, а значения форм ω^j_i, ω^{n+j}_{n+i}, $\widetilde{\omega}^j_{n+i}$ определяются полярной системой системы уравнений (2), (6). Если зафиксировать i, j, то ранг s_{ij} этой системы равен трем при условии, что

$$\omega_i \omega_j (\widetilde{\omega}^i_i - \widetilde{\omega}^j_j) \neq 0$$

на первом интегральном элементе. Но ранг этой системы падает, если

$$\widetilde{\omega}^i_i - \widetilde{\omega}^j_j = 0, \tag{7}$$

что соответствует особому интегральному элементу. Если уравнения (7) имеют место для всех интегральных элементов, то получим особое интегральное многообразие. Заметим, что обращение в нуль одной из форм ω_i приводит к вырождению семейства L^2_{2n-1}.

Если $m = n$ и $n > 2$, то система I не в инволюции. Как известно ([1], с. 15), в этом случае замкнутая система уравнений состоит из уравнений системы I, к которой добавляются уравнения

$$\widetilde{\omega}^i_i - \widetilde{\omega}^1_1 = a_i \omega_i - a_1 \omega_1, \quad \Delta a_j \wedge \omega_j = 0,$$

где

$$\Delta a_j = d a_j + a_j (\omega^j_j - \omega^{n+j}_{n+j}).$$

Теперь ранг s^{ij}_1 полярной системы уравнений (2), (6) при фиксированных i, j равен трем не только при $m = n$, но и при $m \neq n$, если

$$\omega_i \omega_j (a_i \omega_i - a_j \omega_j) \neq 0.$$

Ранг этой полярной системы понижается когда $a_i = 0$, и приходим к уравнениям (7).

Таким образом, присоединяя к системе I уравнения (7), будем исследовать особое решение системы I.

Из уравнений (6) в силу (7) получим

$$\widetilde{\omega}^j_{n+i} = 0. \tag{8}$$

Внешнее дифференцирование уравнений (7) приводит к тождествам, а уравнений (8) — к уравнениям

$$\widetilde{\omega}^i_{n+i} \wedge \omega^j_i - \widetilde{\omega}^j_{n+j} \wedge \omega^{n+j}_{n+i} = 0. \tag{9}$$

Таким образом, в особом случае имеем замкнутую систему уравнений (1), (3), (4), (7), (8); (2), (5), (9) (*система* II). В следующих теоремах под проективным изгибанием понимается проективное изгибание 2-го порядка.

Если $m = 2$, $n > 2$, то система II будет содержать $q = 2(n^2 - 1)$ искомых форм: ω^j_i, ω^{n+j}_{n+i}, $\widetilde{\omega}^i_{n+i}$, ω_k, $k = \overline{3, n}$. Применяя к уравнениям (2) лемму Картана, получим

$$\omega^j_i = a^j_i \omega_j + c^j_i \omega_i, \ \ \omega^{n+j}_{n+i} = b^j_i \omega_i - c^j_i \omega_j. \tag{10}$$

Из уравнений (5) следует, что
$$\widetilde{\omega}^i_{n+i} = \alpha_i \omega_i. \tag{11}$$
В силу (10), (11) из уравнений (9) получим
$$\alpha_i a^j_i + \alpha_j b^j_i = 0. \tag{12}$$
Полагая
$$\omega_k = \Lambda^r_k \omega_r, \tag{13}$$
где $r = 1, 2$, получим $N = 2n^2 + n - 4$, а т. к. $s_1 = 2n^2 - n$, $s_2 = n - 2$, $N = Q$, то система II — в инволюции и справедлива

Теорема 1. *В особом случае при $n > 2$ класс проективно изгибаемых семейств L^2_{2n-1} зависит от $n - 2$ произвольных функций двух аргументов.*

Если $m = n$, то $q = n(2n-1)$, $N = s_1 = n(2n-1)$ и, следовательно, система II — в инволюции, т. е. имеет место

Теорема 2. *В особом случае класс проективно изгибаемых семейств L^n_{2n-1} зависит от $n(2n - 1)$ произвольных функций одного аргумента.*

Если m отлично от 2 и n, то система II не в инволюции и ее нужно продолжать. Сделаем частичное продолжение этой системы, присоединяя к ней уравнения (13), в которых $r = \overline{1, m}$. Дифференцируя эти уравнения внешним образом, получим
$$\Delta\Lambda^r_k \wedge \omega_r = 0, \quad r = \overline{1, m}, \quad k = \overline{m+1, n}, \tag{14}$$
где
$$\Delta\Lambda^j_k = d\Lambda^j_k + \Lambda^j_k(\omega^j_j - \omega^k_k - \omega^{n+j}_{n+j} + \omega^{n+k}_{n+k}), \quad j = \overline{1, m}.$$
Сделанное частичное продолжение системы II корректно, что следует из теоремы 2.2 [3]. Вновь полученная замкнутая система находится в инволюции с характерами
$$s_1 = 2n^2 - m, \quad s_2 = \dots = s_m = n - m. \tag{15}$$
Таким образом, доказана

Теорема 3. *В особом случае класс проективно изгибаемых семейств L^m_{2n-1} существует с произволом, определяемом характерами* (15).

Отметим, что эта теорема справедлива при любых допустимых значениях m и n: $m > 1$, $n > 2$, $m \le n$.

При $m = n = 2$ имеем утверждение о проективном изгибании гиперболической конгруэнции в P_3 в особом случае ([4], гл. 13, п. 272, с. 495).

2. Геометрический смысл особого решения

Известно [5], что семейство L^m_{2n-1} существует с произволом, определяемым характерами
$$s_1 = s_2 = n(n-1) + n - m, \quad s_3 = \dots = s_m = n - m.$$
Отсюда следует, что произвол существования семейств L^2_{2n-1} и L^n_{2n-1} больше произвола решений, указанных в теоремах 1 и 2. Таким образом, изгибаемое семейство L^m_{2n-1} в особом случае не может быть произвольным и, следовательно, нужно найти те ограничения на семейство L^m_{2n-1}, при которых оно допускало бы проективное изгибание 2-го порядка.

Для этого рассмотрим систему II и продолжим ее. Изгибаемое семейство L^m_{2n-1} определяется замкнутой системой уравнений (1), (2), из которых следуют уравнения (10). Из уравнений

(5) следуют уравнения (11). В силу (10) и (11) уравнения (9) приводят к конечным соотношениям (12), которые связывают компоненты 2-го фундаментального объекта семейства L^m_{2n-1} с компонентами 3-го фундаментального объекта семейства $\overline{L}^m_{2n-1}$.

Делая в уравнении (12) замену индексов $i \leftrightarrow j$, считая их фиксированными, получим однородную систему двух линейных уравнений. Определитель этой системы

$$a_i^j a_j^i - b_i^j b_j^i = 0. \tag{16}$$

Действительно, в противном случае $\alpha_k = 0$, и все формы $\widetilde{\omega}$ обращаются в нуль, т. к. без ограничения общности можно считать, что

$$\sum_{r=1}^{n}(\widetilde{\omega}_r^r + \widetilde{\omega}_{n+r}^{n+r}) = 0.$$

Делая в уравнении (12) циклическую замену индексов $i \to j \to k \to i$, получим систему трех линейных однородных уравнений относительно функций α_i, α_j, α_k. Отбрасывая тривиальное решение, получим

$$a_i^j a_j^k a_k^i + b_i^j b_j^k b_k^i = 0. \tag{17}$$

Уравнения (16), (17) дают ограничение на второй фундаментальный объект семейства L^m_{2n-1} и, следовательно, система уравнений (1), (2) не в инволюции и ее необходимо продолжать. Продифференцировав внешним образом уравнения (10), получим

$$a_i^j \Delta a_i^j \wedge \omega_j + \Delta c_i^j \wedge \omega_i = 0, \quad b_i^j \Delta b_i^j \wedge \omega_i - \Delta c_i^j \wedge \omega_j = 0,$$

где

$$\begin{aligned}\Delta a_i^j &= d\ln a_i^j + 2\omega_j^j - \omega_i^i - \omega_{n+j}^{n+j} - (a_p^j/a_i^j)\omega_i^p,\\ \Delta b_i^j &= d\ln b_i^j + \omega_i^i - 2\omega_{n+i}^{n+i} + \omega_{n+j}^{n+j} + (b_i^p/b_i^j)\omega_{n+p}^{n+j},\\ \Delta c_i^j &= dc_i^j + c_i^j(\omega_j^j - \omega_{n+i}^{n+i}) + c_i^p c_p^j \omega_p + \omega_{n+i}^j, \quad p \neq i, j.\end{aligned}$$

Отсюда следует, что функции c_i^j приводятся к нулю за счет вторичных форм ω_{n+i}^j. Тогда уравнения (10) принимают вид

$$\omega_i^j = a_i^j \omega_j, \quad \omega_{n+i}^{n+j} = b_i^j \omega_i. \tag{18}$$

Репер с компонентами (1), (18) — репер 2-го порядка семейства L^m_{2n-1}.

Уравнения (16), (17) можно разрешить, полагая

$$b_i^j = t_i^j a_i^j. \tag{18_α}$$

Тогда

$$t_i^j t_j^i = 1, \quad t_i^j t_j^k t_k^i = -1, \tag{19}$$

и уравнения (18) принимают вид

$$\omega_i^j = a_i^j \omega_j, \quad \omega_{n+i}^{n+j} = t_i^j a_i^j \omega_i. \tag{20}$$

Продолжая эту систему уравнений, получим

$$\begin{gathered}\Delta a_i^j = a_{ij}^j \omega_j + a_{ii}^j \omega_i, \quad \omega_{n+i}^j = a_i^j a_{ii}^j \omega_j + t_i^j a_i^j b_{ij}^j \omega_i,\\ \Delta t_i^j = b_{ii}^j \omega_i - (a_{ij}^j + b_{ij}^j)\omega_j,\end{gathered} \tag{21}$$

где

$$\Delta t_i^j = d\ln t_i^j + 2(\omega_i^i - \omega_j^j - \omega_{n+i}^{n+i} + \omega_{n+j}^{n+j}).$$

Продифференцировав обычным образом уравнения (19), в силу (21) получим $b_{ii}^j = a_{ji}^i + b_{ji}^i$, $b_{ii}^j = b_{ki}^i + a_{ki}^i$. Последняя серия уравнений справедлива при любых значениях индексов j и k, отличных от i, и, следовательно, можно ввести новые функции, полагая $b^j_{ii} = b^i_{ki} + a^i_{ki} = b_i$. Тогда уравнения (21) примут вид

$$\begin{gathered} \Delta a^j_i = a^j_{ij}\omega_j + a^j_{ii}\omega_i, \quad \omega^j_{n+i} = a^j_i(a^j_{ii}\omega_j + t^j_i(b_j - a^j_{ij})\omega_i), \\ \Delta t^j_i = b_i\omega_i - b_j\omega_j. \end{gathered} \tag{22}$$

Продифференцировав внешним образом последнюю серию уравнений (22), получим

$$\Delta b_i \wedge \omega_i - \Delta b_j \wedge \omega_j = 0.$$

Наиболее общее алгебраическое решение этой системы имеет вид $\Delta b_k = c_k\omega_k$ и, следовательно,

$$\Delta b_i \wedge \omega_i = 0, \tag{23}$$

где

$$\Delta b_i = db_i + b_i(\omega^i_i - \omega^{n+i}_{n+i}) + 4(\omega^i_{n+i} - a^i_p\omega^p_i), \quad p \neq i.$$

Внешним дифференцированием первых двух серий уравнений (22) находим

$$\Delta a^j_{ij} \wedge \omega_j + \Delta a^j_{ii} \wedge \omega_i = 0, \quad \Delta a^j_{ii} \wedge \omega_j - t^j_i \Delta a^j_{ij} \wedge \omega_i = 0, \tag{24}$$

где

$$\begin{aligned} \Delta a^j_{ij} &= da^j_{ij} + a^j_{ij}(\omega^j_j - \omega^{n+j}_{n+j}) + 3\omega^j_{n+j} - 3a^j_q\omega^q_j - t^q_j a^q_j \omega^{n+j}_{n+q} + \\ &\quad + (a^j_p/a^j_i)(a^j_{ij} - a^j_{pj})\omega^p_i + (b_j - a^j_{ij})^2\omega_j - \Delta b_j, \\ \Delta a^j_{ii} &= da^j_{ii} + a^j_{ii}(\omega^i_i - \omega^{n+i}_{n+i} + a^j_{ii}\omega_i) - \omega^i_{n+i} + \\ &\quad + (a^j_p/a^j_i)(a^j_{ii}\omega^p_i - a^j_{pp}\omega^{n+p}_{n+i} - \omega^p_{n+i}), \quad q \neq j, \quad p \neq i, j. \end{aligned}$$

Заметим, что уравнения (12) не дают больше никаких ограничений на фундаментальный объект 2-го порядка семейства L^m_{2n-1}. Действительно, из уравнений (19) следует, что

$$t^i_1 = 1/t^1_i, \quad t^j_i = -t^1_i/t^1_j, \tag{25}$$

т. е. среди функций t^j_i независимыми являются только $n-1$ функций t^1_i, и если, например, $n > 3$, то из уравнений (12) следуют уравнения

$$a^j_i a^k_j a^l_k a^i_l - b^j_i b^k_j b^l_k b^i_l = 0,$$

которые в силу уравнений (18_α), (25) обращаются в тождества.

В силу уравнений (18_α) из уравнений (12) следует $\alpha_i = -\alpha_j t^j_i$, т. е. $\alpha_i = -\alpha_1 t^1_i$, и система (11) принимает вид

$$\widetilde{\omega}^1_{n+1} = \alpha_1\omega_1, \quad \widetilde{\omega}^i_{n+i} = -\alpha_1 t^1_i \omega_i. \tag{26}$$

Отсюда внешним дифференцированием находим

$$\Delta\alpha_1 \wedge \omega_1 = 0, \quad \Delta\alpha_1 \wedge \omega_i = 0,$$

где

$$\Delta\alpha_1 = d\ln\alpha_1 + 2(\omega^1_1 - \omega^{n+1}_{n+1}) - b_1\omega_1,$$

и, следовательно, в силу $\omega_1 \wedge \omega_i \neq 0$ получим

$$d\ln\alpha_1 = b_1\omega_1 - 2(\omega^1_1 - \omega^{n+1}_{n+1}). \tag{27}$$

Внешнее дифференцирование этого уравнения приводит к тождеству. Таким образом, имеем замкнутую систему уравнений (1), (3), (4), (7), (8), (13), (19), (20), (22), (26), (27); (14), (23), (24), назовем ее *большой системой*, которая является продолженной системой системы II.

В [6] семейство L^m_{2n-1} при $n > 2$ названо семейством R^m_{2n-1}, если

$$J_{ij} = a^j_i a^i_j / b^j_i b^i_j = 1, \quad J_{ijk} = a^j_i a^k_j a^i_k / b^j_i b^k_j b^i_k = -1.$$

Эти уравнения тождественно совпадают с уравнениями (16), (17). Таким образом, в особом случае изгибаемое семейство L_{2n-1}^m является семейством R_{2n-1}^m.

Далее, из уравнений (4) следует, что фундаментальный объект 2-го порядка семейства $\overline{L}_{2n-1}^m$ совпадает с фундаментальным объектом 2-го порядка семейства L_{2n-1}^m, т. е. в особом случае на изгибаемое семейство R_{2n-1}^m может налагаться проективным изгибанием 2-го порядка только семейство $\overline{R}_{2n-1}^m$.

Рассмотрим большую систему. Эта система находится в инволюции как продолженная система инволютивной системы II, и она определяет семейства R_{2n-1}^m и $\overline{R}_{2n-1}^m$. Заметим, что при $m = n$ уравнения (13), (14) аннулируются.

Подсистему большой системы (1), (13), (19), (20), (22); (14), (23), (24) будем называть *малой системой*. Легко проверить, что малая система является замкнутой, она находится в инволюции с характерами (15) при любых допустимых m и n. Отметим, что малую систему можно рассматривать как самостоятельную, определяющую некоторое семейство R_{2n-1}^m, независимо от большой системы. Действительно, ее можно получить, если на 2-й фундаментальный объект семейства L_{2n-1}^m наложить условия (16), (17), характеризующие семейства R_{2n-1}^m.

Зададим решение малой системы, т. е. зададим семейство R_{2n-1}^m, определяемое малой системой, и подставим это решение в большую систему. Тогда уравнения малой системы обратятся в тождества, а оставшаяся замкнутая система уравнений (3), (4), (7), (8), (26), (27), являясь вполне интегрируемой, будет определять семейство $\overline{R}_{2n-1}^m$ с произволом в $4n^2$ постоянных. Заметим, что при интегрировании этой системы существенной постоянной является только одна постоянная, а именно, та, которая получается при интегрировании уравнения (27).

Действительно, если $\alpha_1 = 0$, то все формы $\widetilde{\omega}$ приводятся к нулю и изгибание семейства R_{2n-1}^m становится тривиальным — семейства R_{2n-1}^m и $\overline{R}_{2n-1}^m$ проективно эквивалентны. Таким образом, доказано, что в особом случае семейство R_{2n-1}^m допускает изгибание с одним произвольным параметром, т. е. справедлива

Теорема 4. *При $n \geq 2$ семейством L_{2n-1}^m, допускающим в особом случае непрерывное проективное изгибание 2-го порядка с одним произвольным параметром, может быть только семейство R_{2n-1}^m.*

Заметим, что при $n = 2$ геометрический смысл особого решения указан в ([4], гл. 13, п. 273, с. 496).

3. Проективное изгибание семейств R_{2n-1}^m

Выше было доказано, что в особом случае изгибаются только семейства R_{2n-1}^m. Для произвольно заданного семейства R_{2n-1}^m поставим теперь вопрос о возможности проективного изгибания 2-го порядка, зависящего от одного произвольного параметра.

Отнесем семейство R_{2n-1}^m к реперу $\{A_i, A_{n+i}\}$ и в репере 2-го порядка определим семейство R_{2n-1}^m малой системой уравнений. Семейство $\overline{L}_{2n-1}^m$, которое изгибанием 2-го порядка наложимо на семейство R_{2n-1}^m, отнесем к реперу 1-го порядка $\{B_i, B_{n+i}\}$. Тогда условия наложимости семейства $\overline{L}_{2n-1}^m$ на семейство R_{2n-1}^m определятся замкнутой системой уравнений (3)–(6). Из уравнений (4) следует, что семейство $\overline{L}_{2n-1}^m$ будет являться семейством $\overline{R}_{2n-1}^m$, т. е. на семейство R_{2n-1}^m проективным изгибанием 2-го порядка может налагаться только семейство класса R_{2n-1}^m.

Замкнутая система уравнений: малая система, уравнения (3)–(6) (*система* III) определяет семейства R_{2n-1}^m и $\overline{R}_{2n-1}^m$, находящиеся в соответствии проективного изгибания 2-го порядка. Зададим семейство R_{2n-1}^m, определяемое малой системой уравнений, т. е. зададим решение малой системы и подставим это решение в систему III. Тогда уравнения малой системы обратятся в тождества, останутся уравнения (3)–(5), а уравнения (6) в силу (20) примут вид

$$a_i^j(\widetilde{\omega}_j^j - \widetilde{\omega}_i^i) \wedge \omega_j + \widetilde{\omega}_{n+i}^j \wedge \omega_i = 0,$$
$$t_i^j a_i^j(\widetilde{\omega}_i^i - \widetilde{\omega}_j^j) \wedge \omega_i + \widetilde{\omega}_{n+i}^j \wedge \omega_j = 0,$$

и их наиболее общее алгебраическое решение имеет вид

$$\widetilde{\omega}^j_j - \widetilde{\omega}^1_1 = x_j\omega_j - x_1\omega_1, \quad \widetilde{\omega}^j_{n+i} = -a^j_i(t^j_i x_j\omega_i + x_i\omega_j). \tag{28}$$

Отсюда внешним дифференцированием находим

$$\begin{gathered}\Delta x_j \wedge \omega_j - \Delta x_1 \wedge \omega_1 = 0,\\ (\widetilde{\omega}^i_i - \widetilde{\omega}^j_j - \Delta a^j_i) \wedge \widetilde{\omega}^j_{n+i} + t^j_i a^j_i(\Delta x_j + x_j \Delta t^j_i - \widetilde{\omega}^j_{n+j}) \wedge \omega_i + \\ +(\widetilde{\omega}^i_i - \widetilde{\omega}^j_j) \wedge \omega^j_{n+i} + a^j_i(\Delta x_i + \widetilde{\omega}^i_{n+i}) \wedge \omega_j - 2t^p_i a^p_i a^j_p x_p \omega_i \wedge \omega_j = 0, \ \ p \neq i, j,\end{gathered} \tag{29}$$

где

$$\Delta x_i = dx_i + x_i(\omega^i_i - \omega^{n+i}_{n+i}).$$

Наиболее общее алгебраическое решение первой серии уравнений (29) имеет вид

$$\Delta x_i = y_i\omega_i,$$

а из уравнений (5) следуют уравнения (11). Тогда вторая серия уравнений (29) с учетом (22) после сокращения на $a^j_i \neq 0$ приводит к уравнениям

$$2a^j_{ii}x_i + 2t^j_i(b_j - a^j_{ij})x_j - 2t^p_i a^p_i a^j_p x_p / a^j_i + y_i - t^j_i y_j + \alpha_i + t^j_i\alpha_j - x^2_i - t^j_i x^2_j = 0, \ \ p \neq i, j. \tag{30}$$

Эти уравнения связывают третьи фундаментальные объекты семейств R^m_{2n-1} и $\overline{R}^m_{2n-1}$. Так как семейство R^m_{2n-1} задано, то уравнения (30) не должны давать ограничений на семейство R^m_{2n-1}. Симметрируем уравнения (30). Считая индексы i и j фиксированными, сделаем замену индексов $i \leftrightarrow j$ и полученное уравнение умножим на t^j_i. Подсчитывая полуразность исходного и найденного уравнений и учитывая (19), получим

$$y_i - t^j_i y_j = (b_i - a^i_{ji} - a^j_{ii})x_i - t^j_i(b_j - a^j_{ij} - a^i_{jj})x_j + t^p_i(a^p_i a^j_p/a^j_i + a^p_j a^i_p/a^i_j)x_p, \ \ p \neq i, j. \tag{31}$$

Обозначая через A_{ij} правую часть уравнения (31) и делая циклическую замену индексов $i \to j \to k \to i$, получим

$$y_i - t^j_i y_j = A_{ij}, \quad y_j - t^k_j y_k = A_{jk}, \quad y_k - t^i_k y_i = A_{ki}.$$

Отсюда, учитывая (19), находим

$$2y_i = A_{ij} + t^j_i A_{jk} - t^k_i A_{ki}, \quad 2y_j = A_{jk} + t^k_j A_{ki} - t^i_j A_{ij}, \quad 2y_k = A_{ki} + t^i_k A_{ij} - t^j_k A_{jk}.$$

Полагая $i = 1$, $j = 2$, $k = 3$, а затем в последней серии уравнений $i = 1$, $j = 2$, получим

$$\begin{aligned}&2y_1 = A_{12} + t^2_1 A_{23} - t^3_1 A_{31}, \quad 2y_2 = A_{23} + t^3_2 A_{31} - t^1_2 A_{12},\\ &2y_3 = A_{31} + t^1_3 A_{12} - t^2_3 A_{23}, \quad 2y_k = A_{k1} + t^1_k A_{12} - t^2_k A_{2k}, \ \ k = \overline{6, n}.\end{aligned} \tag{32}$$

Обозначим уравнение (31) символом $[i, j]$. Тогда из уравнений $[4, 1]$, $[5, 2]$, учитывая (32), находим

$$\begin{aligned}&2y_4 = 2A_{41} + t^1_4 A_{12} - t^2_4 A_{23} + t^3_4 A_{31},\\ &2y_5 = 2A_{52} + t^2_5 A_{23} - t^3_5 A_{31} + t^1_5 A_{12}.\end{aligned} \tag{33}$$

Уравнения (32), (33) определяют функции y_i через переменные x_i, причем линейно.

Исключив в уравнениях (31) функции y_i при помощи уравнений (32), (33) и перенеся все слагаемые влево, получим однородную линейную систему уравнений на переменные x_i, которую обозначим через (α). Члены каждого уравнения системы (α) расположим по убывающим номерам переменных x_i.

Важно заметить, что в уравнении $[i, j]$ системы (α) в коэффициенте при переменной x_i имеется функция a^j_{ii}, которой нет ни в каком другом из уравнений системы (α), и нет в уравнениях (32), (33). Покажем, что система (α) имеет только тривиальное решение при $n \geq 5$.

Действительно, имеем $n(n-1)/2$ независимых уравнений (31), из которых нужно взять n уравнений для определения функций (32), (33). После этого в системе (α) должно остаться

$n(n-1)/2 - n \geq n$ уравнений. Отсюда следует, что $n \geq 5$. Будем считать, что это требование выполнено. Из системы (α) возьмем следующие n уравнений, записав их в порядке

$$[n, n-1], \ldots, [i, i-1], \ldots, [4,3], [5,3], [4,2], [5,1]. \tag{34}$$

Эта система является линейной однородной системой, которая содержит n уравнений на n переменных x_i. Рассмотрим матрицу Δ_n этой системы и ее элементы, расположенные по главной диагонали.

Учитывая специфическую запись системы (34), нумерацию строк и столбцов Δ_n удобно считать снизу вверх и справа налево. Тогда на пересечении i-й строки и i-го столбца Δ_n будет находиться функция a_{ii}^{i-1} при $i > 3$. В первой, второй и третьей строках главной диагонали находятся соответственно функции a_{11}^5, a_{22}^4, a_{33}^5. Таким образом, определитель матрицы Δ_n имеет с точностью до знака единственный член

$$a_{11}^5 a_{22}^4 a_{33}^5 \prod_{i=4}^{n} a_{ii}^{i-1},$$

не имеющий себе подобных членов и, следовательно, $\Delta_n \neq 0$. Отсюда следует, что система (α) имеет только тривиальное решение $x_i = 0$. Если потребовать $\Delta_n = 0$, то получим ограничение на семейство R_{2n-1}^m.

Итак, теперь из уравнений (28) следуют уравнения (7) и (8), т. е. приходим к особому решению и, следовательно, справедлива

Теорема 5. *При $n \geq 5$ любое семейство R_{2n-1}^m допускает в особом случае непрерывное проективное изгибание 2-го порядка, зависящее от одного произвольного параметра.*

Вопрос о справедливости утверждения теоремы 5 при $n \leq 4$ остается открытым. Тем не менее, из теорем 4 и 5 следует новое определение семейств R_{2n-1}^m: при $n \geq 5$ семейства R_{2n-1}^m суть семейства L_{2n-1}^m, которые изгибаются в особом случае.

Литература

1. Жогова Т.Б. *Проективное изгибание второго порядка семейств L_{2n-1}^m* // Изв. вузов. Математика. – 1997. – № 9. – С. 13–16.
2. Фиников С.П. *Теория пар конгруэнций.* – М.: Гостехиздат, 1956. – 443 с.
3. Макеев Г.Н. *К вопросу об инволютивности систем уравнений Пфаффа* // Изв. вузов. Математика. – 1980. – № 1. – С. 39–44.
4. Фиников С.П. *Теория конгруэнций.* – М.–Л.: ГИТТЛ, 1950. – 528 с.
5. Макеев Г.Н. *О некотором обобщении преобразований Лапласа* // Изв. вузов. Математика. – 1975. – № 2. – С. 123–125.
6. Макеев Г.Н. *Семейства R_{2n-1}^m и Φ_{2n-1}^n* // Изв. вузов. Математика. – 1990. – № 1. – С. 84-86.

Нижегородский государственный
педагогический университет

Поступили
первый вариант 10.12.1999
окончательный вариант 09.08.2001