МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования

«Казанский (Приволжский) федеральный университет»

УТВЕРЖДАЮ

Проректор по образовательной деятельности

__________Д.А.Таюрский

«15» марта 2017г.

ПРОГРАММА ВСТУПИТЕЛЬНОГО ИСПЫТАНИЯ ПО СПЕЦИАЛЬНОСТИ

для поступающих на программы подготовки научно-педагогических кадров в аспирантуре

Направление 01.06.01 – Математика и механика

Направленность (профиль): 01.01.01 – Вещественный, комплексный и функциональный анализ

Казань 2017

1. Вопросы программы вступительного экзамена в аспирантуру по специальности 01.01.01 – Вещественный, комплексный и функциональный анализ

Раздел 1

Теоремы о существовании неявной функции. Равномерная сходимость функциональных последовательностей и рядов. Теорема о существовании интеграла Римана. Несобственные интегралы, признаки равномерной сходимости несобственных интегралов, зависящих от параметра. Интегрирование и дифференцирование интегралов по параметру.

Функции комплексного переменного. Условия Коши – Римана. Интеграл по контуру. Теорема Коши. Формула Коши. Интеграл типа Коши и его свойства. Формулы Сохоцкого. Принцип максимума, теорема Лиувилля. Ряды аналитических функций, теоремы Вейерштрасса. Степенные ряды, теорема единственности. Ряд Тейлора и ряд Лорана. Поведение функции в окрестности особой точки, теорема Сохоцкого. Вычеты и их свойства.

Метрические пространства. Теорема о пополнении. Топологические пространства. Сравнение топологий. Непрерывные отображения топологических пространств. Гемеоморфные отображения. Способы задания топологий. Индуцированная топология и фактор-топология. Сходимость в топологических пространствах. Компактные топологические пространства и их свойства. Теорема Гейне – Бореля о структуре компактных множеств в Rn.

Раздел 2

Декартово произведение топологических пространств. Теорема Тихонова о декартовом произведении компактных пространств. Локально компактные пространства и их свойства. Компактные расширения локально компактных пространств. Связные пространства и их свойства.

Раздел 3

Мера .Лебега и ее свойства. Борелевская алгебра на числовой прямой (числовой плоскости), измеримые функции. Измеримые по Борелю функции. Сходимость почти всюду. Теорема Егорова. Сходимость по мере и ее связь со сходимостью почти всюду, интеграл Лебега и его свойства. Предельный переход под знаком интеграла. Почленное интегрирование сходящихся рядов. Теорема Фату. Произведение мер. Теорема Фубини.

Заряды (обобщенные меры). Теорема Хана, Неопределенный интеграл Лебега. Теорема Радона – Никодима. Понятие σ-конечной меры. Определенный интеграл по σ-конечной мере.

Раздел 5

Теорема Бэра о категориях. Линейное нормированное пространство. Эквивалентность норм в конечномерном пространстве. Банахово пространство линейных ограниченных операторов L(E,F). Сопряженное пространство. Теорема Банаха – Хана для полунорм. Принцип равномерной ограниченности. Понятие топологического линейного пространства. Слабая топология в линейном нормировано м пространстве. Абстрактное гильбертово пространство. Теорема об ортогональном разложении. Теорема Рисса об общем виде линейного ограниченного функционала. 0ртонормированные системы. Ряды

Фурье. Существование полных ортонормированных систем. Изоморфизм сепарабельных гильбертовых пространств.

Обратимые линейные операторы в банаховых пространствах. Теорема Банаха об обратном операторе. Вполне непрерывные операторы и их свойства. Сопряженный оператор. Замкнутый оператор. Регулярные точки и спектр линейного ограниченного оператора. Классификация точек спектра. Ограниченность, замкнутость, непустота спектра. Свойства спектра вполне непрерывного оператора. Самосопряженные операторы в гильбертовом пространстве. Свойства спектра самосопряженных операторов. Существование ненулевых собственных значений у вполне непрерывного самосопряженного оператора.

Принцип сжатых отображений и его применение к доказательству существования и единственности решения дифференциального уравнения и интегрального уравнения Фредгольма с малым параметром. Относительно компактные множества, критерий Хаусдорфа и Фреше. Теорема Арчела.

Раздел 6

Теория Рисса-Шаудера. Нормальная разрешимость оператора Фредгольма. Теорема Фредгольма. Интегральные уравнения Фредгольма в пространствах L2(a,b) и C(a,b). Случай вырожденного ядра.

Уравнение Фредгольма в абстрактном гильбертовом пространстве. Теория Гильберта – Шмидта. Приложение к интегральным уравнениям с симметрическим ядром. Нелинейный анализ. Непрерывность и дифференцируемость оператора. Производная Фреше и ее свойства. Необходимое условие экстремума функционала. Простейшие задачи вариационного исчисления и уравнение Эйлера-Лагранжа.

Раздел 8

Разложение единиц (проекторные меры). Операторные интегралы Стилтьеса. Спектральное разложение самосопряженных операторов. Интегральное представление группы унитарных операторов. Функции от самосопряженного оператора. Оператор дифференцирования.

Раздел 9

Полиномы наилучшего равномерного приближения. Теоремы Чебышева и Бореля. Полиномы Чебышева первого рода. Прямые теоремы конструктивной теории функций. Теоремы Джексона и их обобщения (периодический и непериодический случаи). Обратные теоремы конструктивной теории функций. Теоремы Бернштейна и Зигмунда.

Суммы Фурье, Фейера, Валле-Пуссена, Бернштейна – Рогозинского и их важнейшие свойства. Наилучшие приближения в нормированных пространствах. Положительные операторы и функционалы. Приложения в конструктивной теории функций. Алгебраическое и тригонометрическое интерполирование. Положительные и отрицательные результаты. Аппроксимация в среднем интерполяционными полиномами. Аппроксимация и интерполяция сплайнами. Теоремы типа Джексона. Экстремальные свойства сплайнов. Квадратурные формулы. Экстремальные задачи теории квадратур. Теорема Банаха – Штейнгауза и ее приложения к конструктивной теории функций.

Раздел 9

Геометрический смысл дифференцируемости функции комплексного переменного. Понятие конформного отображения. Свойства дробно-линейной функции (единственность, однолистность, круговое сохранение симметричных точек). Геометрические свойства элементарных функций. Лемма Шварца и теорема Римана. Принцип соответствия границ. Аналитическое продолжение по непрерывности. Принцип симметрии. Ветви и точки ветвления. Общее понятия о римановых поверхностях.

Раздел 10

Связь ядер Коши и Шварца. Формула Гильберта. Регуляризующий множитель для задачи Гильберта. Задача Гильберта с разрывными коэффициентами в полуплоскости. Смешанная краевая задача. Задача Дирихле и ее видоизменения для плоскости со щелями. Задача Римана в односвязной и многосвязной областях. Постановка обратных краевых задач. Решение внутренней и внешней задачи. О числе решений внешней задачи. Особые точки контура. Однолистная разрешимость обратных краевых задач.

Примечание: в качестве вступительного экзамена предлагается сдать один из следующих вариантов (указаны разделы программы): 1-й вариант: разделы 1 – 5, 7, 2-й вариант: разделы 1, 3, 5, 6, 8, 3-й вариант: разделы 1, 3, 6, 9, 10.

2. Учебно-методическое и информационное обеспечение программы вступительного экзамена в аспирантуру по специальности

01.01.01 – Вещественный, комплексный и функциональный анализ

1. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. – М.: Физматлит, 2006. – 570 с.
2. Никольский С.М. Курс математического анализа. тт.1-2. – М.: Наука, 1990-1991. – 528 с., 544 с.
3. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного. – М.: Наука, 1987. – 688 с.
4. Дзядык В.К. Введение в теорию равномерного приближения полиномами. – М.: Наука, 1977. – 511 с.
5. Никольский С.М. Квадратурные формулы. – М.: Наука, 1979.—255с.
6. Стечкин С.Б., Субботин Ю.Н. Сплайны в вычислительной математике. – М.: Наука, 1975. – 248 с.
7. Гахов Ф.Д. Краевые задачи. 3-е изд. – М.: Наука, 1977. – 640 с.
8. Ахиезер Н.И. Лекции по теории аппроксимации. – М.: Наука, 1965. – 407 с.
9. Тумашев Г.Г., Нужин М.Т. Обратные краевые задачи и их приложения. – Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1965. – 332 с.
10. Ахиезер Н.И., Глазман И.М. Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве. – Харьков: Вища школа, 1978. – 288 с.
11. Тиман А.Ф. Теория приближения функций действительного переменного. – М.: Физматгиз, 1960. – 624 с.

12. Гончаров В.Л. Теория интерполирования и приближения функций. – М.-Л.: Гостехиздат, 1954. – 327 с.
13. Коровкин П.П. Линейные операторы и теория приближений. – М.: Физматгиз, 1959. – 211 с.
14. Натансон И.П. Конструктивная теория функций. – М.-Л.: Гостехиздат, 1949. – 688 с.
15. Бурбаки Н. Общая топология (основные структуры). – М.: Наука, 1968.—272 с.

Программа вступительного экзамена в аспирантуру составлена в соответствии с государственными образовательными стандартами высшего профессионального образования по специальности 01.01.01 – вещественный, комплексный и функциональный анализ.