ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1998 МАТЕМАТИКА № 5 (432)

УДК 517.518

А.-Р. К. РАМАЗАНОВ

ЗНАКОЧУВСТВИТЕЛЬНЫЕ АППРОКСИМАЦИИ ОГРАНИЧЕННЫХ ФУНКЦИЙ ПОЛИНОМАМИ

Вопросы существования, единственности и устойчивости элемента наилучшего равномерного приближения для знакочувствительных аппроксимаций изучены в работах [1], [2] (см. также [3]–[6]). Ниже дается решение задачи Е.П. Долженко о критериях сколь угодно точного приближения полиномами ограниченной функции в равномерной метрике с ограниченным знакочувствительным весом (а также с полунепрерывным сверху и, в частности, с непрерывным весом); уточняется теорема об отделении полунепрерывных функций непрерывными ([7], с. 390), точнее, дается оценка модуля непрерывности функции, отделяющей две заданные полунепрерывные функции, причем приводимое нами доказательство самой теоремы об отделении существенно короче; полученная оценка применяется для выяснения скорости полиномиального приближения ограниченной функции в равномерной метрике со знакочувствительным весом.

Знакочувствительным весом на отрезке $\Delta = [a, b]$ называется упорядоченная пара $p = (p_-, p_+)$ определенных на Δ неотрицательных функций $p_-(x)$ и $p_+(x)$. Вес $p = (p_-, p_+)$ называется ограниченным на Δ, если функции $p_\mp(x)$ ограничены на Δ.

Для ограниченных на Δ функции $f(x)$ и веса $p = (p_-, p_+)$ будем придерживаться следующих обозначений:

$$\begin{aligned}
\|f\|_\Delta &= \sup\{|f(x)| : x \in \Delta\},\\
\|p\|_\Delta &= \max\{\|p_-\|_\Delta,\ \|p_+\|_\Delta\},\\
|(f,p)(x)| &= f^+(x)p_+(x) + f^-(x)p_-(x),\\
f^+(x) &= \max\{f(x),\ 0\}, \quad f^-(x) = (-f(x))^+,\\
|f|_{p,\Delta} &= \sup\{|(f,p)(x)| : x \in \Delta\},\\
\Delta(f \geq c) &= \{x \in \Delta : f(x) \geq c\}
\end{aligned}$$

(c — число; аналогично определяются $\Delta(f < c)$, $\Delta(f > c)$).

При $\varepsilon > 0$ пусть F_ε — пересечение множеств $\Delta(p_- \geq \varepsilon)$ и $\Delta(p_+ \geq \varepsilon)$, Δ_- и Δ_+ — их замыкания соответственно, Δ_ε — пересечение этих замыканий. Для $[\alpha, \beta] \subset \Delta$ положим

$$\begin{aligned}
M(\alpha,\beta) &= \sup\{f(x) : x \in [\alpha,\beta] \cap \Delta(p_+ \geq \varepsilon)\},\\
m(\alpha,\beta) &= \inf\{f(x) : x \in [\alpha,\beta] \cap \Delta(p_- \geq \varepsilon)\}
\end{aligned}$$

и определим функции

$$\begin{aligned}
M_+(x) = M_+(x,\varepsilon) &= \lim_{\delta\to+0} M(x-\delta, x+\delta), \quad x \in \Delta_+;\\
m_-(x) = m_-(x,\varepsilon) &= \lim_{\delta\to+0} m(x-\delta, x+\delta), \quad x \in \Delta_-.
\end{aligned}$$

Так как множества $\Delta(p_- \geq \varepsilon)$ и $\Delta(p_+ \geq \varepsilon)$ плотны в множестве Δ_ε, легко видеть, что функция $M_+(x)$ полунепрерывна сверху, а функция $m_-(x)$ полунепрерывна снизу на Δ_ε.

Для ограниченных на отрезке Δ функции $f(x)$ и веса $p = (p_-, p_+)$ имеет место

Теорема 1. *Для существования алгебраических полиномов $Q_n(x)$ таких, что $|f-Q_n|_{p,\Delta} \to 0$ при $n \to \infty$, необходимо и достаточно выполнения при всех достаточно малых $\varepsilon > 0$ неравенства*

$$M_+(x,\varepsilon) \le m_-(x,\varepsilon), \quad x \in \Delta_\varepsilon. \tag{1}$$

Замечание. В случае веса $p = (p_-, p_+)$ с полунепрерывными сверху (в частности, непрерывными) на Δ функциями $p_-(x)$ и $p_+(x)$ при всех $\varepsilon > 0$ множества $\Delta(p_\mp \ge \varepsilon)$ замкнуты, $\Delta_\varepsilon = F_\varepsilon$, причем $f(x) = M_+(x,\varepsilon) = m_-(x,\varepsilon)$, если $M_+(x,\varepsilon) \le m_-(x,\varepsilon)$.

Поэтому, как легко видеть из приводимого ниже доказательства теоремы 1, если на Δ заданы ограниченная функция $f(x)$ и вес $p = (p_-, p_+)$ с ограниченными и полунепрерывными сверху функциями $p_\mp(x)$, то справедлива теорема 1 с заменой в ней условия (1) на непрерывность $f(x)$ на F_ε.

Пусть $\mathcal{P}_n$ — множество всех алгебраических полиномов степени не выше n ($n = 0, 1, \dots$), и для ограниченных на Δ функции $f(x)$ и веса $p = (p_-, p_+)$ положим

$$E_n(f,p,\Delta) = \inf\{|f - Q_n|_{p,\Delta} : Q_n \in \mathcal{P}_n\}.$$

Вопрос о скорости стремления к нулю $E_n(f,p,\Delta)$ при $n \to \infty$ сводится к следующей задаче.

Пусть на отрезке Δ для ограниченной полунепрерывной сверху функции $u(x)$ и полунепрерывной снизу функции $v(x)$ выполняется неравенство $u(x) \le v(x)$. Оценить модуль непрерывности непрерывной функции $\varphi(x)$, для которой $u(x) \le \varphi(x) \le v(x)$, $x \in \Delta$.

Из известного доказательства ([7], с. 390) теоремы о существовании функции $\varphi(x)$ нельзя получить подобной оценки, поэтому приведем решение этой задачи.

При $\delta \in [0,\, b-a]$ положим

$$\Omega(\delta,u,v,\Delta) = \sup\{[u(x) - v(y)]^+ : |x-y| \le \delta,\ x,y \in \Delta\}.$$

Легко показать, что $\Omega(\delta) = \Omega(\delta,u,v,\Delta)$ не убывает и полунепрерывна сверху на $[0,\, b-a]$, $\Omega(\delta)$ непрерывна в нуле, $\Omega(0) = 0$. На отрезке $[0,\, b-a]$ определим непрерывную функцию $\Omega_1(\delta)$, положив $\Omega_1(\delta) = \Omega(\delta)$ при $\delta = 0,\, b-a$; $\Omega_1((b-a)/n) = \sup\{\Omega(\delta) : \delta \in ((b-a)/n,\ (b-a)/(n-1))\}$ при $n = 2, 3, \dots$; $\Omega_1(\delta)$ линейна на отрезках вида $[(b-a)/n,\ (b-a)/(n-1)]$ ($n = 2, 3, \dots$). Возьмем теперь модуль непрерывности $\omega(\Omega_1, \delta)$ функции $\Omega_1(\delta)$ в равномерной метрике и при $x \in \Delta$ рассмотрим функции

$$\varphi_u(x) = \sup\{u(y) - \omega(\Omega_1,\, |x-y|) : y \in \Delta\},$$
$$\varphi_v(x) = \inf\{v(y) + \omega(\Omega_1,\, |x-y|) : y \in \Delta\}.$$

Теорема 2. *Если на отрезке Δ для ограниченных полунепрерывной сверху функции $u(x)$ и полунепрерывной снизу функции $v(x)$ выполняется неравенство $u(x) \le v(x)$, то для $\varphi(x)$ ($x \in \Delta$), равной любой из функций $\varphi_u(x)$ и $\varphi_v(x)$, имеем*

$$u(x) \le \varphi(x) \le v(x),$$
$$|\varphi(x) - \varphi(y)| \le \omega(\Omega_1,\, |x-y|), \quad x,y \in \Delta.$$

Заметим, что теорема 2, как видно из построений, остается справедливой, если в ней вместо отрезка Δ взять любой компакт из Δ.

Чтобы оценить $E_n(f,p,\Delta)$ для заданных на $\Delta = [a,b]$ функции $f(x)$ и веса $p = (p_-, p_+)$, определим при $\varepsilon > 0$, как и выше, полунепрерывную сверху на множестве Δ_+ функцию $M_+(x) = M_+(x,\varepsilon)$ и полунепрерывную снизу на множестве Δ_- функцию $m_-(x) = m_-(x,\varepsilon)$ и для $\delta \ge 0$ рассмотрим величину

$$\omega_\varepsilon(f,p,\delta) = \sup[M_+(x) - m_-(y)]^+,$$

где супремум берется по $x \in \Delta_+$, $y \in \Delta_-$, $|x-y| \le \delta$. Легко видеть, что $\omega_\varepsilon(f,p,\delta)$ не убывает и полунепрерывна сверху для $\delta \ge 0$; непрерывна в точке $\delta = 0$ и $\omega_\varepsilon(f,p,0) = 0$, если $M_+(x) \le$

$m_-(x)$ при $x \in \Delta_\varepsilon \neq \emptyset$; при $p_-(x) \equiv p_+(x) \equiv 1$ и непрерывной на отрезке Δ функции $f(x)$ для всех $\varepsilon \in (0,1]$ величина $\omega_\varepsilon(f,p,\delta)$ совпадает с обычным равномерным модулем непрерывности $\omega(f,\delta)$ функции $f(x)$ на Δ.

Если $\operatorname{dist}(\Delta_-,\Delta_+) = d > 0$, то доопределим величину $\omega_\varepsilon(f,p,\delta)$ нулем для $\delta \in [0,d)$.

Для $\varepsilon > 0$ рассмотрим семейство $\omega = \{\omega_\varepsilon(\delta)\}$ функций типа модуля непрерывности, именно, при каждом $\varepsilon > 0$ функция $\omega_\varepsilon(\delta)$ непрерывна и не убывает на $[0,+\infty)$, $\omega_\varepsilon(0) = 0$, $\omega_\varepsilon(\delta+h) \le \omega_\varepsilon(\delta) + \omega_\varepsilon(h)$ $(\delta, h \ge 0)$. Далее при $x \in \Delta$ функции

$$\varphi_+(x,f) = \sup\{M_+(y) - \omega_\varepsilon(|x-y|) : y \in \Delta_+\},$$
$$\varphi_-(x,f) = \inf\{m_-(y) + \omega_\varepsilon|(x-y|) : y \in \Delta_-\}$$

играют роль операторов "сглаживания" функций $f(x)$ $(x \in \Delta)$ в p-норме $|\cdot|_{p,\Delta}$.

Ниже для чисел A и $\varepsilon > 0$ через $J(\varepsilon) = \{(\alpha,\beta)\}$ обозначим множество всех дополнительных интервалов компакта Δ_ε и интервалов $(a, \min \Delta_\varepsilon)$, $(\max \Delta_\varepsilon, b)$ и положим

$$E_\pm(A) = \Delta(p_\pm \ge \varepsilon) \cap \Delta(\pm f > \pm A + \varepsilon),$$
$$E(A) = E_-(A) \cup E_+(A).$$

Для непрерывной на Δ_ε функции $\varphi(x)$ будем пользоваться также более кратким обозначением

$$E_\gamma = E(\varphi(\gamma)) \cap (\alpha,\beta); \quad \gamma = \alpha,\beta; \quad (\alpha,\beta) \in J(\varepsilon).$$

Для ограниченного на $\Delta = [a,b]$ веса $p = (p_-,p_+)$ по заданному числу $L > 0$ и семейству $\omega = \{\omega_\varepsilon(\delta)\}$ с $\omega_\varepsilon(b-a) \le 2L$ определим класс $K(L,p,\omega)$ функций $f(x)$ $(x \in \Delta)$ с $\|f\|_\Delta \le L$ таких, что при $\delta > 0$ и всех достаточно малых $\varepsilon > 0$ выполняется неравенство $\omega_\varepsilon(f,p,\delta) \le \omega_\varepsilon(\delta)$.

Теорема 3. *Если на отрезке $\Delta = [a,b]$ функция $f \in K(L,p,\omega)$, то при $n = 1,2,\ldots$ имеем*

$$E_n(f,p,\Delta) \le 6(L + \|p\|_\Delta) \inf_{\varepsilon>0}\Big\{\varepsilon + \omega_\varepsilon\Big(\frac{b-a}{n}\Big)\Big\}.$$

Доказательство теоремы 1. Необходимость. Допустим, что существует такое достаточно малое $\varepsilon > 0$, что в некоторой точке $x_0 \in \Delta_\varepsilon$ имеем $M_+(x_0) = M_+(x_0,\varepsilon) > m_-(x_0) = m_-(x_0,\varepsilon)$. Пусть $\gamma > 0$ такое, при котором

$$M_+(x_0) - 3\gamma > m_-(x_0) + 3\gamma. \tag{2}$$

По определению $M_+(x_0)$ и $m_-(x_0)$ найдется такое $\delta_0 > 0$, что при любом $\delta \in (0,\delta_0)$ существуют точки x и y из интервала $(x_0-\delta, x_0+\delta)$, для которых $p_+(x) \ge \varepsilon$, $p_-(y) \ge \varepsilon$, $M_+(x_0) < f(x) + 2\gamma$, $m_-(x_0) > f(y) - 2\gamma$, а следовательно, с учетом (2) выполнено неравенство

$$f(x) - f(y) > 2\gamma. \tag{3}$$

С другой стороны, пусть $Q(x)$ — полином, для которого $|f-Q|_{p,\Delta} < \omega$, $0 < \omega < \gamma\varepsilon/4$. Выберем $\delta > 0$ из условий $|Q(t) - Q(\tau)| < \gamma/2$ при $|t-\tau| < 2\delta$, $t,\tau \in \Delta$; $\delta \in (0,\delta_0)$. Тогда для точек x и y из (3) имеем

$$f(x) - f(y) = [f(x)-f(y)]^+ \le [f(x)-Q(x)]^+ + [f(y)-Q(y)]^- + [Q(x)-Q(y)]^+ < \gamma$$

в противоречие с (3).

Достаточность. Пусть $\varepsilon > 0$ и выполнено условие (1). Построим вспомогательную функцию $F(x)$, непрерывную на Δ. Так как $M_+(x) = M_+(x,\varepsilon)$ и $m_-(x) = m_-(x,\varepsilon)$ полунепрерывны соответственно сверху и снизу на Δ_ε и выполнено неравенство (1), то по теореме об отделении полунепрерывных функций непрерывными ([7], с. 390), очевидно, существует непрерывная на компакте Δ_ε функция $\varphi(x) = \varphi(x,\varepsilon)$, для которой $M_+(x) \le \varphi(x) \le m_-(x)$, $x \in \Delta_\varepsilon$. Положим $F(x) = \varphi(x)$ при $x \in \Delta_\varepsilon$.

Из определения функций $M_+(x)$ и $m_-(x)$ следует, что принадлежащий Δ_ε конец γ интервала $(\alpha,\beta) \in J(\varepsilon)$ не может служить предельной точкой множества $E(A) \cap (\alpha,\beta)$ ни при каком $A \in$

$[M_+(\gamma), m_-(\gamma)]$. Пусть (α, β) — произвольный дополнительный интервал Δ_ε. Так как $M_+(\alpha) \le \varphi(\alpha) \le m_-(\alpha)$, найдется точка $\alpha_1 \in (\alpha, \beta)$ такая, что $(\alpha, \alpha_1] \cap E_\alpha = \varnothing$.

Аналогичная точка $\beta_1 \in (\alpha_1, \beta)$ найдется и для точки β. При $M_1 = \max\{M(\alpha, \beta), \varphi(\alpha), \varphi(\beta)\}$, $M_2 = \min\{m(\alpha, \beta), \varphi(\alpha), \varphi(\beta)\}$ на $[\alpha, \alpha_1]$ в качестве графика функции $F(x)$ возьмем прямую, соединяющую точку $(\alpha, \varphi(\alpha))$ с точкой (α_1, M_1) при $[\alpha, \alpha_1] \subset \Delta_+$ и с точкой (α_1, M_2) при $[\alpha, \alpha_1] \subset \Delta_-$.

Пусть теперь $[\alpha, \alpha_1] \setminus (\Delta_+ \cup \Delta_-) \ne \varnothing$. Тогда, т. к. $(\alpha, \beta) \cap \Delta_\varepsilon = \varnothing$, найдется такой интервал $(u, v) \subset (\alpha, \alpha_1)$, что $p_+(x) < \varepsilon$ и $p_-(x) < \varepsilon$ при $x \in (u, v)$. Исправим точку α_1, положив $\alpha_1 = v$, и рассмотрим точки $\alpha_\pm = \inf\{\Delta_\pm \cap [\alpha_1, \beta_1]\}$. Возьмем $F(x) = \varphi(\alpha)$ при $x \in (\alpha, u] \cap (\Delta_+ \cup \Delta_-)$; $F(v) = M_1$, если $\alpha_+ < \alpha_-$ или точки α_- нет; $F(v) = M_2$, если $\alpha_- < \alpha_+$ или α_- существует, но α_+ нет; затем продолжим $F(x)$ непрерывно на весь $[\alpha, \alpha_1] = [\alpha, v]$, полагая ее линейной на оставшихся интервалах.

На $[\beta_1, \beta]$ функция $F(x)$ определяется аналогично случаю отрезка $[\alpha, \alpha_1]$.

На интервале (α_1, β_1) график функции $F(x)$ совпадает с прямой, соединяющей точки $(\alpha_1, F(\alpha_1))$ и $(\beta_1, F(\beta_1))$, если $(\alpha_1, \beta_1) \cap (\Delta_+ \cup \Delta_-) = \varnothing$; в противном случае положим $F(x) = M_1$ при $x \in (\alpha_1, \beta_1) \cap \Delta_+$, $F(x) = M_2$ при $x \in (\alpha_1, \beta_1) \cap \Delta_-$ и продолжим непрерывно на $[\alpha_1, \beta_1]$, считая ее линейной на оставшихся интервалах.

На промежутках $[a, \min \Delta_\varepsilon)$ и $(\max \Delta_\varepsilon, b]$ функция $F(x)$ строится вполне аналогично рассмотренному случаю дополнительных интервалов множества Δ_ε.

Для построенной непрерывной на Δ функции $F(x)$ по теореме Вейерштрасса существует алгебраический полином $Q(x)$ такой, что $|F(x) - Q(x)| < \varepsilon$, $x \in \Delta$.

Возьмем в качестве $Q(x)$ полином (соответствующей степени) наилучшего равномерного приближения для $F(x)$ на Δ и будем считать $\varepsilon \le \|f\|_\Delta$. Тогда $\|Q\|_\Delta \le \varepsilon + \|F\|_\Delta \le 2\|f\|_\Delta$.

Оценим сверху величину $r(x) = |(f - Q, p)(x)|$, $x \in \Delta$.

Для $x \in \Delta_\varepsilon$ рассмотрим четыре случая:

1) если $x \in F_\varepsilon$, то $f(x) \le M_+(x) \le \varphi(x) \le m_-(x) \le f(x)$, поэтому $r(x) = |(F - Q, p)(x)| \le \|p\|_\Delta \varepsilon$;
2) если $p_+(x) < \varepsilon$ и $p_-(x) < \varepsilon$, то $r(x) \le 3\|f\|_\Delta \varepsilon$;
3) если $p_+(x) \ge \varepsilon$, а $p_-(x) < \varepsilon$, то $f(x) \le M_+(x) \le \varphi(x) = F(x)$, поэтому $r(x) = [Q(x) - f(x)]p_-(x) \le 3\|f\|_\Delta \varepsilon$ при $f(x) \le Q(x)$, а при $f(x) > Q(x)$ имеем $r(x) = [f(x) - Q(x)]p_+(x) \le [F(x) - Q(x)]p_+(x) \le \|p\|_\Delta \varepsilon$;
4) если $p_+(x) < \varepsilon$, $p_-(x) \ge \varepsilon$, то поступаем аналогично предыдущему случаю.

Пусть теперь x — точка дополнительного интервала (α, β) множества Δ_ε и рассмотрим возможные различные случаи.

Пусть $x \in [\alpha, \alpha_1] \subset \Delta_+$. Если $p_+(x) < \varepsilon$ и $p_-(x) < \varepsilon$, то $r(x) \le 3\|f\|_\Delta \varepsilon$; если же $p_+(x) \ge \varepsilon$, $p_-(x) < \varepsilon$, то $f(x) \le \varphi(\alpha) + \varepsilon$, поэтому при $Q(x) \ge f(x)$ и $Q(x) < f(x)$ соответственно имеем $r(x) = [Q(x) - f(x)]p_-(x) \le 3\|f\|_\Delta \varepsilon$, $r(x) = [f(x) - Q(x)]p_+(x) \le [\varphi(\alpha) + \varepsilon - Q(x)]\|p\|_\Delta \le [F(x) + \varepsilon - Q(x)]\|p\|_\Delta \le 2\varepsilon\|p\|_\Delta$ (по выбору точки α_1 другие случаи невозможны).

Случай $x \in [\alpha, \alpha_1] \subset \Delta_-$ аналогичен предыдущему.

Рассмотрим случай $[\alpha, \alpha_1] \setminus (\Delta_+ \cup \Delta_-) \ne \varnothing$. Пусть (u, v) — интервал, о котором шла речь выше при построении $F(x)$ для этого случая, причем считаем $v = \alpha_1$, и возьмем $x \in (\alpha, v)$. Тогда возможны три варианта: 1) $p_+(x) < \varepsilon$, $p_-(x) < \varepsilon$; 2) $p_+(x) \ge \varepsilon$, $p_-(x) < \varepsilon$; 3) $p_+(x) < \varepsilon$, $p_-(x) \ge \varepsilon$. В этих вариантах, как и выше, либо $r(x) \le 3\|f\|_\Delta \varepsilon$, либо $r(x) \le 2\|p\|_\Delta \varepsilon$.

Оценки $r(x)$ при $x \in (\beta_1, \beta)$ вполне аналогичны оценкам при $x \in (\alpha, \alpha_1)$.

Для $x \in [\alpha_1, \beta_1]$ рассмотрим три возможных случая:

1) $p_+(x) < \varepsilon$, $p_-(x) < \varepsilon$;
2) $p_+(x) \ge \varepsilon$, $p_-(x) < \varepsilon$;
3) $p_+(x) < \varepsilon$, $p_-(x) \ge \varepsilon$.

В результате получим $r(x) \le 3\|f\|_\Delta \varepsilon$ или $r(x) \le \|p\|_\Delta \varepsilon$.

В случае $x \in [a, \min \Delta_\varepsilon) \cup (\max \Delta_\varepsilon, b]$ оценки $r(x)$ аналогичны вышеприведенным.

Следовательно, если $\Delta_\varepsilon \neq \varnothing$, то при $x \in \Delta$ имеем

$$|(f - Q, p)(x)| \leq \max\{3\|f\|_\Delta,\, 2\|p\|_\Delta\}\varepsilon.$$

Если же $\Delta_\varepsilon = \varnothing$, то требуемое легко получим, взяв кусочно-линейное непрерывное продолжение на Δ такой функции $F(x)$, что

$$F(x) = \sup\{f(t) : t \in \Delta(p_+ \geq \varepsilon)\}, \quad x \in \Delta_+;$$
$$F(x) = \inf\{f(t) : t \in \Delta(p_- \geq \varepsilon)\}, \quad x \in \Delta_-.$$

Достаточность доказана. $\square$

Доказательство теоремы 2. Пусть, например, $\varphi(x) = \varphi_u(x)$. При $x, y \in \Delta$ по определению и свойствам $\Omega(\delta)$ имеем

$$u(x) - v(y) \leq [u(x) - v(y)]^+ \leq \Omega(|x - y|) \leq \Omega_1(|x - y|) \leq \omega(\Omega_1,\, |x - y|);$$
$$u(x) - \omega(\Omega_1,\, |x - y|) \leq v(y).$$

Переходя к супремуму при $x \in \Delta$, получим $\varphi(y) \leq v(y)$. Неравенство $u(y) \leq \varphi(y)$ $(y \in \Delta)$ получается при $y = x$ непосредственно из определения $\varphi_u(x)$.

Ввиду полунепрерывности сверху функции $u(x)$ для каждой точки $x \in \Delta$ существует точка $z(x) \in \Delta$ такая, что

$$\varphi(x) = \varphi_u(x) = u(z(x)) - \omega(\Omega_1,\, |x - z(x)|).$$

Тогда при $x, y \in \Delta$ получим

$$\varphi(x) \geq u(z(y)) - \omega(\Omega_1,\, |x - z(y)|) \geq$$
$$\geq u(z(y)) - \omega(\Omega_1, |x - y|) - \omega(\Omega_1,\, |y - z(y)|) = \varphi(y) - \omega(\Omega_1,\, |x - y|).$$

Следовательно, $\varphi(y) - \varphi(x) \leq \omega(\Omega_1,\, |x - y|)$. Остается поменять местами x и y, чтобы получить второе из требуемых неравенств. $\square$

Доказательство теоремы 3 проводится по аналогии с доказательством достаточности в теореме 1 и с доказательством теоремы 2.

Отметим лишь, что для $f \in K(L, p, \omega)$ при каждом достаточно малом $\varepsilon > 0$ функция $F(x)$, равная на Δ любой из функций $\varphi_+(x, f)$ и $\varphi_-(x, f)$, построенных выше, обладает свойствами

$$|F(x) - F(y)| \leq \omega_\varepsilon(|x - y|), \quad x, y \in \Delta;$$
$$M_+(x) \leq f(x), \quad x \in \Delta_+;$$
$$m_-(x) \geq F(x), \quad x \in \Delta_-;$$
$$|f - F|_{p,\Delta} \leq 4L\varepsilon. \quad \square$$

В заключение отметим, что в [6] и [8] рассмотрен случай непрерывного знакочувствительного веса.

Литература

1. Долженко Е.П., Севастьянов Е.А. *Знакочувствительные аппроксимации. Пространство знакочувствительных весов. Жесткость и свобода системы* // Докл. РАН. – 1993. - Т. 332. – № 6. – С. 686–689.
2. Долженко Е.П., Севастьянов Е.А. *Знакочувствительные аппроксимации. Вопросы единственности и устойчивости* // Докл. РАН. – 1993. – Т. 333. – № 1. – С. 5–7.
3. Бабенко В.Ф. *Несимметричные приближения в пространствах суммируемых функций* // Укр. матем. журн. – 1982. – Т. 34. – № 4. – С. 409–416.
4. Крейн М.Г., Нудельман А.А. *Проблема моментов Маркова и экстремальные задачи. Идеи и проблемы П.Л. Чебышева и А.А. Маркова и их дальнейшее развитие.* – М.: Наука, 1973. – 551 с.

5. Симонова И.Э., Симонов Б.В. *О полиноме наилучшего несимметричного приближения в пространстве Орлича* // Изв. вузов. Математика. – 1993. – № 11. – С. 50–56.
6. Рамазанов А.-Р. К. *О прямых и обратных теоремах теории аппроксимации в метрике знакочувствительного веса* // Anal. math. – 1995. – V. 21. – P. 191-212.
7. Натансон И.П. *Теория функций вещественной переменной.* – 3-е изд. – М.: Наука, 1974. – 480 с.
8. Рамазанов А.-Р. К. *Рациональная аппроксимация со знакочувствительным весом* // Матем. заметки. – 1996. – Т. 60. – № 5. – С. 715–725.

Дагестанский государственный университет

Поступила 08.07.1996