ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2001 МАТЕМАТИКА № 1 (464)

УДК 517.9

О.Г. АВСЯНКИН, Н.К. КАРАПЕТЯНЦ

ОБ АЛГЕБРЕ МНОГОМЕРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ С ОДНОРОДНЫМИ ЯДРАМИ С ПЕРЕМЕННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Хорошо известна роль, которую играют интегральные операторы с однородными ядрами в различных разделах математики и в приложениях. Изучение таких операторов в многомерной ситуации было начато в работах Л.Г. Михайлова и его учеников (см. [1], а также библиографию в [1]) и продолжено в [2], [3]. В настоящее время для интегральных операторов с ядрами, однородными степени $(-n)$ и инвариантными относительно всех вращений в $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, построена полная нётеровская теория, теория проекционных методов, а также исследованы банаховы алгебры, порожденные такими операторами.

В данной работе рассматривается вопрос о нётеровости операторов из банаховой алгебры $\mathfrak{B}$, порожденной многомерными интегральными операторами с однородными ядрами и операторами умножения на функции из класса $\mathfrak{A}$, действующими в $L_p(\mathbb{R}^n)$, $1 < p < \infty$ (точная постановка задачи и определение класса $\mathfrak{A}$ будут даны ниже). На алгебре $\mathfrak{B}$ строится символическое исчисление, в терминах которого описываются необходимые и достаточные условия нётеровости операторов из этой алгебры и указывается формула для вычисления индекса. Отметим, что основным средством решения указанной задачи является локальный метод И.Б. Симоненко [4].

В статье используются следующие обозначения: $\mathbb{R}^n$ — n-мерное евклидово пространство; $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$; $|x| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$; $x' = x/|x|$; $x \cdot y = x_1y_1 + \dots + x_ny_n$; $dx = dx_1 \dots dx_n$; $e_1 = (1, 0, \dots, 0)$; $\dot{\mathbb{R}}^n$ — компактификация $\mathbb{R}^n$ одной бесконечно удаленной точкой; $y = \omega_{x'}(t)$ — вращение в $\mathbb{R}^n$, переводящее $t \in \mathbb{R}^n$ в $y \in \mathbb{R}^n$ так, что $\omega_{x'}(e_1) = x'$; $\mathbb{Z}_+$ — множество всех целых неотрицательных чисел; $\mathbb{Z}_+ \dot{\times} \mathbb{R}$ — компактификация множества $\mathbb{Z}_+ \times \mathbb{R}$ одной бесконечно удаленной точкой; $P_m(t)$ — многочлены Лежандра, определяемые следующим образом:

$$P_m(t) = \begin{cases} \cos(m \arccos t), & n = 2; \\ (C_{m+n-3}^m)^{-1} C_m^{(n-2)/2}(t), & n \geqslant 3, \end{cases}$$

где $C_m^{(n-2)/2}(t)$ — многочлены Гегенбауэра.

1. О компактности интегральных операторов с однородными ядрами с переменными коэффициентами

В пространстве $L_p(\mathbb{R}^n)$, $1 < p < \infty$, рассмотрим интегральный оператор

$$(K\varphi)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} k(x, y)\varphi(y)\, dy, \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{1}$$

предполагая, что ядро $k(x, y)$ удовлетворяет условиям

1°. однородности степени $(-n)$, т. е. $k(\lambda x, \lambda y) = \lambda^{-n} k(x, y)$ $\forall\, \lambda > 0$;

2°. инвариантности относительно группы $SO(n)$ вращений пространства $\mathbb{R}^n$, т. е. $k(\omega(x), \omega(y)) = k(x, y)$ $\forall\, \omega \in SO(n)$;

3°. суммируемости, т. е. $k = \int_{\mathbb{R}^n} |k(e_1, y)||y|^{-n/p} dy < \infty$.

Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований, проект № 98-01-00261а.

Функцию $a(x)$ будем естественно отождествлять с оператором умножения на эту функцию.

Нас будут интересовать условия компактности оператора $a(x)K$. Известно [2], что если $a(x) \in L_{\infty}^{0,0}(\mathbb{R}^n)$, то оператор $a(x)K$ компактен в $L_p(\mathbb{R}^n)$. Укажем более слабые условия на коэффициент $a(x)$, обеспечивающие компактность оператора $a(x)K$.

Обозначим через $\mathfrak{A}_0$ множество всех функций $a(x) \in L_\infty(\mathbb{R}^n)$ таких, что для любого компактного множества M выполняются условия

$$\lim_{\alpha\to 0}\int_M |a(\alpha x)|dx = 0, \tag{2}$$

$$\lim_{\alpha\to \infty}\int_M |a(\alpha x)|dx = 0. \tag{3}$$

Лемма 1. *Пусть $a(x) \in \mathfrak{A}_0$. Тогда для любой функции $f(x) \in L_1(\mathbb{R}^n)$ выполняются условия*

$$\lim_{\alpha\to 0}\int_{\mathbb{R}^n} |a(\alpha x)f(x)|dx = 0, \tag{4}$$

$$\lim_{\alpha\to \infty}\int_{\mathbb{R}^n} |a(\alpha x)f(x)|dx = 0. \tag{5}$$

Доказательство. Докажем (4). Возьмем любое $\varepsilon > 0$. Подберем функцию $g(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ такую, что

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(x) - g(x)|dx < \frac{\varepsilon}{2\|a\|_\infty},$$

и зафиксируем функцию $g(x)$. Имеем

$$\int_{\mathbb{R}^n} |a(\alpha x)f(x)|dx \leqslant \int_{\mathbb{R}^n} |a(\alpha x)|\,|f(x)-g(x)|dx + \int_{\mathbb{R}^n} |a(\alpha x)|\,|g(x)|dx \leqslant$$
$$\leqslant \|a\|_\infty \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)-g(x)|dx + \int_{\operatorname{supp} g} |a(\alpha x)|\,|g(x)|dx < \frac{\varepsilon}{2} + \max_{x\in\mathbb{R}^n}|g(x)| \int_{\operatorname{supp} g} |a(\alpha x)|dx.$$

В силу (2) найдется такое $\alpha_0 > 0$, что при любом $\alpha \in (0, \alpha_0)$ выполняется условие

$$\int_{\operatorname{supp} g} |a(\alpha x)|dx < \frac{\varepsilon}{2\max\limits_{x\in\mathbb{R}^n}|g(x)|}\,.$$

Таким образом, неравенство $\int_{\mathbb{R}^n} |a(\alpha x)f(x)|\,dx < \varepsilon$ справедливо для всех $\alpha \in (0, \alpha_0)$, что и доказывает (4). Условие (5) доказывается аналогично. □

Обозначим через K_a оператор $Ka(x)I$.

Лемма 2. *Для оператора K_a*

$$\|K_a\| \leqslant k^{1/p}\|a\|_\infty^{1/p} \operatorname*{ess\,sup}_{x\in\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |k(e_1,t)|\,|t|^{-n/p} |a(|x|\omega_{x'}(t))|dt \right)^{1/p'}. \tag{6}$$

Доказательство. Воспользовавшись неравенством Гёльдера и затем выполняя вращение $y = \omega_{x'}(t)$, получаем

$$|(K_a\varphi)(x)| \leqslant \int_{\mathbb{R}^n} |k(x,y)|\,|a(y)|\,|\varphi(y)|dy \leqslant$$
$$\leqslant \left(\int_{\mathbb{R}^n} |k(x,y)|\,|y|^{-n/p}|a(y)|^{p'}dy \right)^{1/p'} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |k(x,y)|\,|y|^{n/p'}|\varphi(y)|^p dy \right)^{1/p} =$$
$$= |x|^{-\frac{n}{pp'}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |k(e_1,t)|\,|t|^{-n/p}|a(|x|\omega_{x'}(t))|^{p'}dt \right)^{1/p'} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |k(x,y)|\,|y|^{n/p'}|\varphi(y)|^p dy \right)^{1/p}.$$

Далее,

$$\|K_a\varphi\|_p^p \leqslant \operatorname*{ess\,sup}_{x\in\mathbb{R}^n}\left(\int_{\mathbb{R}^n}|k(e_1,t)|\,|t|^{-n/p}|a(|x|\omega_{x'}(t))|^{p'}dt\right)^{p/p'}\times$$
$$\times\int_{\mathbb{R}^n}|x|^{-n/p'}dx\int_{\mathbb{R}^n}|k(x,y)|\,|y|^{n/p'}|\varphi(y)|^p dy\leqslant$$
$$\leqslant \|a\|_\infty^{(p'-1)p/p'}\operatorname*{ess\,sup}_{x\in\mathbb{R}^n}\left(\int_{\mathbb{R}^n}|k(e_1,t)|\,|t|^{-n/p}|a(|x|\omega_{x'}(t))|dt\right)^{p/p'}\times$$
$$\times\int_{\mathbb{R}^n}|\varphi(y)|^p|y|^{n/p'}dy\int_{\mathbb{R}^n}|k(x,y)|\,|x|^{-n/p'}dx=$$
$$=k\|a\|_\infty^{(p'-1)p/p'}\|\varphi\|_p^p\operatorname*{ess\,sup}_{x\in\mathbb{R}^n}\left(\int_{\mathbb{R}^n}|k(e_1,t)|\,|t|^{-n/p}|a(|x|\omega_{x'}(t))|dt\right)^{p/p'}.$$

Отсюда следует неравенство

$$\|K_a\varphi\|_p\leqslant k^{1/p}\|a\|_\infty^{1/p}\operatorname*{ess\,sup}_{x\in\mathbb{R}^n}\left(\int_{\mathbb{R}^n}|k(e_1,t)|\,|t|^{-n/p}|a(|x|\omega_{x'}(t))|dt\right)^{1/p'}\|\varphi\|_p.\quad\square$$

Теорема 1. *Пусть $a(x)\in\mathfrak{A}_0$. Тогда оператор K_a компактен в $L_p(\mathbb{R}^n)$, $1<p<\infty$.*

Доказательство. Так как $|k(e_1,t)|\,|t|^{-n/p}\in L_1(\mathbb{R}^n)$, то в силу леммы 1

$$\int_{\mathbb{R}^n}|k(e_1,t)|\,|t|^{-n/p}|a(|x|\omega_{x'}(t))|dt\to 0\quad\text{при}\quad |x|\to 0$$

и

$$\int_{\mathbb{R}^n}|k(e_1,t)||t|^{-n/p}|a(|x|\omega_{x'}(t))|dt\to 0\quad\text{при}\quad |x|\to\infty.$$

Следовательно, для любого $\varepsilon>0$ найдется такое число $N\in\mathbb{N}$, что

$$\operatorname*{ess\,sup}_{|x|<\frac{1}{N}\cup|x|>N}\int_{\mathbb{R}^n}|k(e_1,t)|\,|t|^{-n/p}|a(|x|\omega_{x'}(t))|dt<\varepsilon. \tag{7}$$

Обозначим $D_N=\{x\in\mathbb{R}^n:1/N<|x|<N\}$ и пусть P_{D_N} — оператор умножения на характеристическую функцию множества D_N. Известно (см. [2]), что оператор $P_{D_N}K_a$ компактен. Далее, с помощью леммы 2, имеем

$$\|K_a-P_{D_N}K_a\|=\|P_{\mathbb{R}^n\setminus D_N}K_a\|\leqslant$$
$$\leqslant k^{1/p}\|a\|_\infty^{1/p}\operatorname*{ess\,sup}_{x\in\mathbb{R}^n\setminus D_N}\left(\int_{\mathbb{R}^n}|k(e_1,t)|\,|t|^{-n/p}|a(|x|\omega_{x'}(t))|dt\right)^{1/p'}<k^{1/p}\|a\|_\infty^{1/p}\varepsilon^{1/p'}$$

в силу (7). Итак, оператор K_a можно приблизить компактными операторами $P_{D_N}K_a$ с любой степенью точности. Значит, оператор K_a компактен. $\square$

Из теоремы 1 посредством перехода к сопряженному оператору получается

Теорема 2. *Пусть $a(x)\in\mathfrak{A}_0$. Тогда оператор $a(x)K$ компактен в $L_p(\mathbb{R}^n)$, $1<p<\infty$.*

В заключение отметим, что для операторов свертки аналоги условий (2) и (3) были сформулированы в [5], [6].

2. Определение класса $\mathfrak{A}$

Обозначим через $\mathfrak{A}$ множество всех функций $a(x) \in L_\infty(\mathbb{R}^n)$, для каждой из которых существуют числа a_0 и a_∞ такие, что для любого компактного множества M выполняются условия

$$\lim_{\alpha\to 0}\int_M |a(\alpha x) - a_0|dx = 0,$$
$$\lim_{\alpha\to \infty}\int_M |a(\alpha x) - a_\infty|dx = 0.$$

Очевидно, $\mathfrak{A}_0 = \{a(x) \in \mathfrak{A} : a_0 = a_\infty = 0\}$.

Далее, обозначим через $\chi_+(x)$ и $\chi_-(x)$ характеристические функции единичного шара в $\mathbb{R}^n$ и его внешности соответственно. Каждой функции $a(x) \in \mathfrak{A}$ сопоставим кусочно-постоянную функцию $\widetilde{a}(x) = a_0\chi_+(x) + a_\infty\chi_-(x)$.

Лемма 3. *Пусть $a(x) \in \mathfrak{A}$. Тогда функция $b(x) = a(x) - \widetilde{a}(x)$ принадлежит классу $\mathfrak{A}_0$.*

Доказательство. Для любого компакта M имеем

$$\lim_{\alpha\to 0}\int_M |b(\alpha x)|dx = \lim_{\alpha\to 0}\int_M |a(\alpha x) - a_0\chi_+(\alpha x) - a_\infty\chi_-(\alpha x)|dx = \lim_{\alpha\to 0}\int_M |a(\alpha x) - a_0|dx = 0.$$

Таким образом, условие (2) выполнено.

Проверим условие (3). Вначале возьмем любой компакт M_0, не содержащий нуля. Тогда получим

$$\lim_{\alpha\to \infty}\int_{M_0} |b(\alpha x)|dx = \lim_{\alpha\to \infty}\int_{M_0} |a(\alpha x) - a_0\chi_+(\alpha x) - a_\infty\chi_-(\alpha x)|dx = \lim_{\alpha\to \infty}\int_{M_0} |a(\alpha x) - a_\infty|dx = 0.$$

Пусть теперь M — произвольный компакт в $\mathbb{R}^n$. Возьмем произвольно $\varepsilon > 0$ и подберем компакт $M_0 \subset M$ такой, что $0 \notin M_0$ и $\operatorname{mes}(M \setminus M_0) < \varepsilon/2\|b\|_\infty$. Тогда

$$\int_M |b(\alpha x)|dx = \int_{M_0} |b(\alpha x)|dx + \int_{M\setminus M_0} |b(\alpha x)|dx < \int_{M_0} |b(\alpha x)|dx + \frac{\varepsilon}{2}.$$

В силу сказанного выше первое слагаемое стремится к нулю при $\alpha \to \infty$. Следовательно, найдется такое число α_0, что для всякого $\alpha > \alpha_0$ справедливо неравенство

$$\int_M |b(\alpha x)|dx < \varepsilon,$$

т. е. выполняется (3). $\square$

Из этой леммы и теоремы 2 сразу следует равенство

$$I - a(x)K = I - \widetilde{a}(x)K + T,$$

где $T = -b(x)K$ — компактный в $L_p(\mathbb{R}^n)$, $1 < p < \infty$, оператор. Соответственно

$$\sum_i \prod_j (I - a_{ij}(x)K_{ij}) = \sum_i \prod_j (I - \widetilde{a}_{ij}(x)K_{ij}) + T_1, \tag{8}$$

где T_1 — компактный оператор, а сумма и произведение предполагаются конечными.

3. Алгебра $\mathfrak{B}$

Обозначим через $\mathfrak{B}$ наименьшую замкнутую подалгебру банаховой алгебры $\mathcal{L}(L_p(\dot{\mathbb{R}}^n))$, $1 < p < \infty$, содержащую все операторы вида $I - a(x)K$, где K — оператор вида (1), а $a(x) \in \mathfrak{A}$. Она представляет собой замыкание по операторной норме множества

$$\mathfrak{B}_0 = \Big\{ \sum_i \prod_j (I - a_{ij}(x)K_{ij}) \Big\},$$

где сумма и произведение конечны.

Наша цель состоит в построении на алгебре $\mathfrak{B}$ символического исчисления, в терминах которого описываются необходимые и достаточные условия нётеровости операторов из этой алгебры.

Напомним (см. [4]), что оператор $A : L_p(\dot{\mathbb{R}}^n) \to L_p(\dot{\mathbb{R}}^n)$ называется оператором локального типа, если для любой пары замкнутых непересекающихся множеств F_1 и F_2 оператор $P_{F_1}AP_{F_2}$ компактен.

Лемма 4. *Пусть $A \in \mathfrak{B}$. Тогда оператор A является оператором локального типа.*

Доказательство. Вначале докажем, что оператор K является оператором локального типа. Пусть F_1 и F_2 — замкнутые непересекающиеся множества в $\dot{\mathbb{R}}^n$, $\chi_1(x)$ и $\chi_2(x)$ — характеристические функции этих множеств. Рассмотрим оператор

$$(P_{F_1}KP_{F_2}\varphi)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \chi_1(x)\chi_2(y)k(x,y)\varphi(y)dy, \quad x \in \dot{\mathbb{R}}^n.$$

На основании результатов [2] заключаем, что оператор $P_{F_1}KP_{F_2}$ компактен в $L_p(\dot{\mathbb{R}}^n)$, $1 < p < \infty$. Следовательно, K — оператор локального типа.

Известно [4], что оператор умножения на существенно ограниченную функцию является оператором локального типа. Поэтому оператор $I - a(x)K$, где $a(x) \in \mathfrak{A}$, есть оператор локального типа. Но тогда и любой оператор $A \in \mathfrak{B}_0$ является оператором локального типа ([4], с. 569).

Пусть теперь A — произвольный оператор из алгебры $\mathfrak{B}$. Тогда найдется такая последовательность $\{A_k\} \subset \mathfrak{B}_0$, что $\|A_k - A\| \to 0$ при $k \to \infty$. Тогда тем более $|||A_k - A||| \to 0$ при $k \to \infty$. (Здесь и далее $|||C||| = \inf\limits_T \|C + T\|$, где T пробегает множество всех компактных операторов.) Учитывая свойство операторов локального типа [4], заключаем, что A является оператором локального типа. □

Используем два понятия, введенные в [4]. Пусть A и B — операторы локального типа. Операторы A и B называются эквивалентными в точке x_0, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такая окрестность u точки x_0, что $|||(A - B)P_u||| < \varepsilon$ (обозначение $A \overset{x_0}{\sim} B$). Локальным представителем оператора A в точке x_0 будем называть любой оператор, эквивалентный оператору A в этой точке.

Лемма 5. *Для того чтобы оператор*

$$A = \sum_i \prod_j (I - a_{ij}(x)K_{ij}) \in \mathfrak{B}_0 \tag{9}$$

являлся нётеровым, необходимо и достаточно, чтобы нётеровыми были операторы

$$\widetilde{A} = \sum_i \prod_j (I - (a_0)_{ij}K_{ij}) \quad \text{и} \quad \widetilde{\widetilde{A}} = \sum_i \prod_j (I - (a_\infty)_{ij}K_{ij}). \tag{10}$$

Доказательство разобьем на два этапа.

1. Рассмотрим оператор $I - a(x)K$, где $a(x) \in \mathfrak{A}$, а K — оператор вида (1). Построим локальные представители оператора $I - a(x)K$ в каждой точке $x_0 \in \dot{\mathbb{R}}^n$.

1) Пусть $x_0 \neq 0$ и $x_0 \neq \infty$. Тогда, очевидно, что $I - a(x)K \overset{x_0}{\sim} I$.

2) Пусть $x_0 = 0$. Покажем, что $I - a(x)K \overset{x_0}{\sim} I - a_0K$.

Действительно, если u — некоторая окрестность точки $x_0 = 0$, то оператор $[a(x) - a_0]KP_u$ является компактным в $L_p(\dot{\mathbb{R}}^n)$ оператором. Следовательно, $|||[(I - a(x)K) - (I - a_0K)]P_u||| = |||[a(x) - a_0]KP_u||| = 0$, что и требовалось.

3) Пусть $x_0 = \infty$. Рассуждая аналогично предыдущему, получаем $I - a(x)K \overset{x_0}{\sim} I - a_\infty K$.

2. Из вышесказанного с учетом свойств операторов локального типа (см. [4]) следует

а) $A \overset{x_0}{\sim} I$, если $x_0 \neq 0$ и $x_0 \neq \infty$,

б) $A \overset{x_0}{\sim} \widetilde{A}$, если $x_0 = 0$,

в) $A \overset{x_0}{\sim} \widetilde{\widetilde{A}}$, если $x_0 = \infty$.

Тогда в силу теоремы 1.6 из [4] оператор A нётеров тогда и только тогда, когда нётеровы операторы $\widetilde{A}$ и $\widetilde{\widetilde{A}}$. $\square$

Назовем символом оператора $I - a(x)K$ пару функций $(\widetilde{\sigma}(m, \xi), \widetilde{\widetilde{\sigma}}(m, \xi))$, определенных на компакте $\mathbb{Z}_+ \dot{\times} \mathbb{R}$ равенствами

$$\widetilde{\sigma}(m, \xi) = 1 - a_0 \int_{\mathbb{R}^n} k(e_1, y) P_m(e_1 \cdot y') |y|^{-n/p + i\xi} dy,$$
$$\widetilde{\widetilde{\sigma}}(m, \xi) = 1 - a_\infty \int_{\mathbb{R}^n} k(e_1, y) P_m(e_1 \cdot y') |y|^{-n/p + i\xi} dy.$$

Далее, если $(\widetilde{\sigma}_{ij}(m, \xi), \widetilde{\widetilde{\sigma}}_{ij}(m, \xi))$ — символ оператора $I - a_{ij}(x)K_{ij}$, то символом оператора A, заданного равенством (9), назовем пару функций $(\widetilde{\sigma}(m, \xi), \widetilde{\widetilde{\sigma}}(m, \xi))$, где $\widetilde{\sigma}(m, \xi) = \sum\limits_i \prod\limits_j \widetilde{\sigma}_{ij}(m, \xi)$, $\widetilde{\widetilde{\sigma}}(m, \xi) = \sum\limits_i \prod\limits_j \widetilde{\widetilde{\sigma}}_{ij}(m, \xi)$.

Лемма 6. *Для того чтобы оператор A, заданный равенством* (9)*, являлся нётеровым, необходимо и достаточно, чтобы его символ был невырожденным, т. е.*

$$\widetilde{\sigma}(m, \xi) \neq 0, \quad \widetilde{\widetilde{\sigma}}(m, \xi) \neq 0 \quad \forall\, (m, \xi) \in \mathbb{Z}_+ \dot{\times} \mathbb{R}. \tag{11}$$

Доказательство. Согласно результатам, полученным в [3], условия (11) являются необходимыми и достаточными условиями нётеровости операторов $\widetilde{A}$ и $\widetilde{\widetilde{A}}$ соответственно. И остается лишь применить лемму 5. $\square$

Установим далее условия нётеровости произвольного оператора из алгебры $\mathfrak{B}$.

Лемма 7. *Пусть A — оператор вида* (9)*. Тогда справедливы неравенства*

$$\|\widetilde{A}\| \leqslant |||A|||, \quad \|\widetilde{\widetilde{A}}\| \leqslant |||A|||. \tag{12}$$

Доказательство. Докажем первое из неравенств (12). Обозначим через P_+ оператор умножения на функцию $\chi_+(x)$ и положим $\mathcal{K}_+ = P_+KP_+$. На основании результатов [3] заключаем, что $\sum\limits_i \prod\limits_j (I - (a_0)_{ij} K_{ij}) = I - aK$, где $a \in \mathbb{C}$ и K — оператор вида (1). Тогда $\sum\limits_i \prod\limits_j (P_+ - (a_0)_{ij} \mathcal{K}_{ij}) = P_+ - a\mathcal{K} + T$, где $\mathcal{K} = P_+KP_+$, $\mathcal{K}_{ij} = P_+K_{ij}P_+$, а T — компактный оператор (см. [3]).

С учетом (8) имеем

$$\begin{aligned}
|||A||| &= \Big|\Big|\Big| \sum_i \prod_j (I - a_{ij}(x)K_{ij}) \Big|\Big|\Big| = \Big|\Big|\Big| \sum_i \prod_j (I - \widetilde{a}_{ij}(x)K_{ij}) \Big|\Big|\Big| \geqslant \\
&\geqslant \Big|\Big|\Big| P_+ \Big(\sum_i \prod_j (I - \widetilde{a}_{ij}(x)K_{ij}) \Big) P_+ \Big|\Big|\Big| = \Big|\Big|\Big| \sum_i \prod_j P_+(I - \widetilde{a}_{ij}(x)K_{ij})P_+ \Big|\Big|\Big| = \\
&= \Big|\Big|\Big| \sum_i \prod_j (P_+ - (a_0)_{ij}\mathcal{K}_{ij}) \Big|\Big|\Big| = |||P_+ - a\mathcal{K} + T||| = |||P_+ - a\mathcal{K}||| = |||P_+(I - aK)P_+|||.
\end{aligned}$$

Учитывая, что $|||P_+(I - aK)P_+||| = \|I - aK\|$ (см. [3]), получаем $|||A||| \geqslant \|I - aK\| = \Big\| \sum\limits_i \prod\limits_j (I - (a_0)_{ij} K_{ij}) \Big\| = \|\widetilde{A}\|$. $\square$

Теперь определим понятие символа для произвольного оператора из алгебры $\mathfrak{B}$. Если $A \in \mathfrak{B}_0$, то это сделано выше. Пусть $A \in \mathfrak{B} \setminus \mathfrak{B}_0$. Тогда найдется такая последовательность $\{A_k\} \subset \mathfrak{B}_0$, что $\|A_k - A\| \to 0$ при $k \to \infty$. Тогда тем более $|||A_k - A||| \to 0$ при $k \to \infty$. Каждому оператору $A_k \in \mathfrak{B}_0$ вида (9) соответствует пара операторов $\widetilde{A}_k$ и $\widetilde{\widetilde{A}}_k$ вида (10). Рассмотрим последовательности операторов $\{\widetilde{A}_k\}$ и $\{\widetilde{\widetilde{A}}_k\}$. Так как последовательность $\{A_k\}$ фундаментальна по существенной норме, то в силу (12) последовательности $\{\widetilde{A}_k\}$ и $\{\widetilde{\widetilde{A}}_k\}$ фундаментальны по операторной норме. Положим $\widetilde{A} = u - \lim\limits_{k\to\infty} \widetilde{A}_k$ и $\widetilde{\widetilde{A}} = u - \lim\limits_{k\to\infty} \widetilde{\widetilde{A}}_k$. Обозначим через $\widetilde{\sigma}(m,\xi)$ и $\widetilde{\widetilde{\sigma}}(m,\xi)$ символы операторов $\widetilde{A}$ и $\widetilde{\widetilde{A}}$ соответственно. Пару функций $(\widetilde{\sigma}(m,\xi), \widetilde{\widetilde{\sigma}}(m,\xi))$ будем называть символом оператора A.

Теорема 3. *Для того чтобы оператор A являлся нётеровым, необходимо и достаточно, чтобы его символ был невырожденным, т. е.*

$$\widetilde{\sigma}(m,\xi) \neq 0, \quad \widetilde{\widetilde{\sigma}}(m,\xi) \neq 0 \quad \forall\, (m,\xi) \in \mathbb{Z}_+ \dot{\times} \mathbb{R}. \tag{13}$$

Если условия (13) *выполнены, то индекс оператора A вычисляется по формуле*

$$\operatorname{ind} A = \sum_{m=0}^{\infty} d_n(m) \operatorname{ind}_\xi (\widetilde{\widetilde{\sigma}}(m,\xi)/\widetilde{\sigma}(m,\xi)), \tag{14}$$

где $\operatorname{ind}_\xi f(m,\xi)$ — индекс функции $f(m,\xi)$ при фиксированном значении m.

Доказательство. Если $A \in \mathfrak{B}_0$, то теорема уже доказана (см. лемму 6). Пусть $A \in \mathfrak{B} \setminus \mathfrak{B}_0$. Рассмотрим последовательность $\{A_k\} \subset \mathfrak{B}_0$ такую, что $\|A_k - A\| \to 0$ при $k \to \infty$. Положим $\widetilde{A} = u - \lim\limits_{k\to\infty} \widetilde{A}_k$ и $\widetilde{\widetilde{A}} = u - \lim\limits_{k\to\infty} \widetilde{\widetilde{A}}_k$. Построим локальные представители оператора A в каждой точке $x_0 \in \mathbb{R}^n$.

1) Пусть $x_0 \neq 0$ и $x_0 \neq \infty$. Так как $|||A_k - A||| \to 0$ при $k \to \infty$ и $A_k \overset{x_0}{\sim} I$, то $A \overset{x_0}{\sim} I$.

2) Пусть $x_0 = 0$. Так как $|||A_k - A||| \to 0$ при $k \to \infty$, $|||\widetilde{A}_k - \widetilde{A}||| \to 0$ при $k \to \infty$ и $A_k \overset{x_0}{\sim} \widetilde{A}_k$, то $A \overset{x_0}{\sim} \widetilde{A}$.

3) Пусть $x_0 = \infty$. Так как $|||A_k - A||| \to 0$ при $k \to \infty$, $|||\widetilde{\widetilde{A}}_k - \widetilde{\widetilde{A}}||| \to 0$ при $k \to \infty$ и $A_k \overset{x_0}{\sim} \widetilde{\widetilde{A}}_k$, то $A \overset{x_0}{\sim} \widetilde{\widetilde{A}}$.

Условия (13) являются необходимыми и достаточными условиями нётеровости операторов $\widetilde{A}$ и $\widetilde{\widetilde{A}}$. Тогда в силу теоремы 1.6 из [4] условия (13) являются необходимыми и достаточными для нётеровости оператора A.

Установим теперь формулу (14). Если оператор A нётеров, то существует такое $\varepsilon > 0$, что для всех операторов B таких, что $\|B\| < \varepsilon$, оператор $A + B$ нётеров и $\operatorname{ind}(A + B) = \operatorname{ind} A$.

Так как $A \overset{0}{\sim} \widetilde{A}$ и $A \overset{\infty}{\sim} \widetilde{\widetilde{A}}$, то по выбранному ε найдутся окрестности u_1 точки $x = 0$ и u_2 точки $x = \infty$ такие, что

$$|||(A - \widetilde{A})P_{u_1}||| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{и} \quad |||(A - \widetilde{\widetilde{A}})P_{u_2}||| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Тогда тем более

$$|||P_{u_1}(A - \widetilde{A})P_{u_1}||| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{и} \quad |||P_{u_2}(A - \widetilde{\widetilde{A}})P_{u_2}||| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

В силу определения существенной нормы найдутся такие компактные операторы T_1 и T_2, что будут выполнены неравенства

$$\|P_{u_1}(A-\widetilde{A})P_{u_1}+T_1\|<\frac{\varepsilon}{2} \quad \text{и} \quad \|P_{u_2}(A-\widetilde{\widetilde{A}})P_{u_2}+T_2\|<\frac{\varepsilon}{2}. \tag{15}$$

Полагая $P=I-P_{u_1}-P_{u_2}$, получим

$$A=(P_{u_1}+P+P_{u_2})A(P_{u_1}+P+P_{u_2})=P_{u_1}AP_{u_1}+P_{u_2}AP_{u_2}+T,$$

где T — некоторый компактный оператор. Представим оператор A в виде

$$A=P_{u_1}\widetilde{A}P_{u_1}+P_{u_2}\widetilde{\widetilde{A}}P_{u_2}+(T-T_1-T_2)+B,$$

где

$$B=P_{u_1}(A-\widetilde{A})P_{u_1}+T_1+P_{u_2}(A-\widetilde{\widetilde{A}})P_{u_2}+T_2.$$

Из неравенств (15) следует, что $\|B\|<\varepsilon$. Тогда $\operatorname{ind}(A-B)=\operatorname{ind}A$. Поскольку $A-B=P_{u_1}\widetilde{A}P_{u_1}+P_{u_2}\widetilde{\widetilde{A}}P_{u_2}+T-T_1-T_2$, то

$$\operatorname{ind}(A-B)=\operatorname{ind}(P_{u_1}\widetilde{A}P_{u_1}+P_{u_2}\widetilde{\widetilde{A}}P_{u_2})=\operatorname{ind}P_{u_1}\widetilde{A}P_{u_1}+\operatorname{ind}P_{u_2}\widetilde{\widetilde{A}}P_{u_2}.$$

Таким образом, $\operatorname{ind}A=\operatorname{ind}P_{u_1}\widetilde{A}P_{u_1}+\operatorname{ind}P_{u_2}\widetilde{\widetilde{A}}P_{u_2}$. Из результатов, полученных в [3], следует, что

$$\operatorname{ind}P_{u_1}\widetilde{A}P_{u_1}=-\sum_{m=0}^{\infty}d_n(m)\operatorname{ind}_\xi\widetilde{\sigma}(m,\xi),$$
$$\operatorname{ind}P_{u_2}\widetilde{\widetilde{A}}P_{u_2}=\sum_{m=0}^{\infty}d_n(m)\operatorname{ind}_\xi\widetilde{\widetilde{\sigma}}(m,\xi).$$

Отсюда следует формула (14). □

Замечание. Следует отметить, что поскольку, начиная с некоторого m_0, все индексы $\operatorname{ind}_\xi(\widetilde{\widetilde{\sigma}}(m,\xi)/\widetilde{\sigma}(m,\xi))$ равны нулю, то правая часть в формуле (14) фактически представляет собой конечную сумму.

Литература

1. Михайлов Л.Г. *Новый класс особых интегральных уравнений* // Math. Nachr. – 1977. – Т. 76. – С. 91–107.
2. Карапетянц Н.К. *Интегральные операторы свертки и с однородными ядрами с переменными коэффициентами*: Дисс. ... докт. физ.-матем. наук. – Тбилиси, 1989. – 296 с.
3. Авсянкин О.Г. *Многомерные интегральные операторы с однородными ядрами*: Дисс. ... канд. физ.-матем. наук. – Ростов-на-Дону, 1997. – 145 с.
4. Симоненко И.Б. *Новый общий метод исследования линейных операторных уравнений типа сингулярных интегральных уравнений.* I // Изв. АН СССР. Сер. матем. – 1965. – Т. 29. – № 3. – С. 567–586.
5. Speck F.O. *Eine Erweiterung des Satzes von Rakovčik und ihre Anwendung in der Simonenko–Theorie* // Math. Ann. – 1977. – V. 228. – № 2. – P. 93–100.
6. Штейнберг Б.Я. *Об операторах типа свертки на локально компактных группах* // Функц. анализ и его прилож. – 1981. – Т. 15. – Вып. 3. – С. 95–96.

Ростовский государственный университет

Поступила
05.02.1999