ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2004 МАТЕМАТИКА № 12 (511)

УДК 519.6:519.85

И.В. КОННОВ, Т.А. КОСТЕНКО

МНОГОЗНАЧНАЯ СМЕШАННАЯ ЗАДАЧА ДОПОЛНИТЕЛЬНОСТИ

1. Введение

Задача дополнительности является одной из основных в нелинейном анализе. Ее теории, методам поиска решений и приложениям посвящено большое число работ (см., напр., [1]–[3] и приведенные там ссылки). Напомним, что задача дополнительности состоит в нахождении точки $x^* \in R^n$ такой, что

$$x^* \geq 0, \quad f(x^*) \geq 0, \quad \langle x^*, f(x^*)\rangle = 0, \tag{1}$$

где $f : R^n \to R^n$ — некоторое однозначное отображение (здесь и далее неравенства для векторов понимаются покоординатно). Многие прикладные модели равновесного типа, являющиеся главным источником задач дополнительности, требуют учета двусторонних ограничений на переменные и содержат многозначные отображения. Соответствующим обобщением задачи (1) является *многозначная смешанная задача дополнительности*, состоящая в нахождении точки $x^* \in D$, для которой существует элемент $f^* \in F(x^*)$ такой, что

$$f_i^* \begin{cases} \geq 0 & \text{при } \ x_i^* = a_i; \\ = 0 & \text{при } \ x_i^* \in (a_i, b_i); \quad i = 1, \dots, n, \\ \leq 0 & \text{при } \ x_i^* = b_i, \end{cases} \tag{2}$$

где

$$D = \{x \in R^n \mid -\infty < a_i \leq x_i \leq b_i \leq +\infty, \ \ i = 1, \dots, n\} \tag{3}$$

— n-мерный параллелепипед, а $F : R^n \to \Pi(R^n)$ — некоторое многозначное отображение (здесь и далее $\Pi(S)$ обозначает совокупность всех подмножеств множества S). В случае, когда множество D является неотрицательным ортантом $R^n_+ = \{x \in R^n \mid x_i \geq 0, i = 1, \dots, n\}$, а отображение F однозначно, задача (2), (3) совпадает с обычной задачей дополнительности (1). С другой стороны, задача (2), (3) эквивалентно записывается в виде вариационного неравенства: найти точку $x^* \in D$ такую, что

$$\exists f^* \in F(x^*), \quad \langle f^*, x - x^*\rangle \geq 0 \quad \forall x \in D, \tag{4}$$

как утверждает

Лемма 1.1. *Задачи* (2), (3) *и* (4), (3) *имеют совпадающие множества решений.*

Доказательство. Пусть x^* — решение задачи (2), (3) и f^* — соответствующий элемент из $F(x^*)$. Тогда для любой точки $x \in D$ согласно (2) имеем

$$\langle f^*, x - x^*\rangle = \sum_{i=1}^{n} f_i^*(x_i - x_i^*) \geq 0,$$

т. е. x^* — решение задачи (4). Обратно, пусть x^* — решение задачи (4) и f^* — соответствующий элемент из $F(x^*)$, тогда

$$f_i^*(x_i - x_i^*) \geq 0 \quad \forall x_i \in [a_i, b_i], \quad i = 1, \ldots, n.$$

Отсюда следуют соотношения (2). $\square$

Обычно для получения теорем о существовании и единственности решений, а также для построения методов решения задачи (1) используются свойства монотонности и, в частности, внедиагональной антитонности отображения f, которые естественным образом возникают во многих прикладных задачах (напр., [4]–[7], [2], [3], [8]) и позволяют построить весьма эффективные методы исследования и поиска решений (напр., [2], [3], [9], [10]). Основной целью данной работы является изучение свойств внедиагональной антитонности для многозначных отображений, а также применение соответствующего аппарата для многозначной задачи (2), (3) (либо (4)), что позволит получить новые результаты существования и единственности решений и новые итеративные методы, которые будут более эффективными, чем уже существующие для многозначных задач (напр., [11]), и откроют новые возможности для решения более сложных прикладных задач.

2. Внедиагональная антитонность многозначных отображений

В этом разделе устанавливаются взаимосвязи между свойствами внедиагональной антитонности и другими свойствами порядковой монотонности для случая многозначных отображений. Эти свойства обобщают известные определения для однозначного случая (напр., [6], [7], [3]).

Определение 2.1. Отображение $F : R^n \to \Pi(R^n)$ называется

a) *изотонным* на множестве D, если для любых точек $x', x'' \in D$ таких, что $x' \geq x''$, $x' \neq x''$, и любых $f' \in F(x')$, $f'' \in F(x'')$ выполняется $f' \geq f''$;
b) *антитонным* на множестве D, если отображение $-F$ изотонно на D;
c) *внедиагонально антитонным* на множестве D, если для любых точек $x', x'' \in D$ таких, что $x' \geq x''$, $x' \neq x''$, и любых $f' \in F(x')$, $f'' \in F(x'')$ выполняется $f'_k \leq f''_k$ для любого индекса k такого, что $x'_k = x''_k$;
d) *Z-отображением* на множестве D, если для любой точки $x \in D$ и произвольных чисел $\tau', \tau'' \in [0, +\infty)$, $\tau'' < \tau'$, $x + \tau' e_j^{(n)} \in D$, где $e_j^{(n)}$ — j-й координатный вектор в R^n, и любых $f' \in F(x + \tau' e_j^{(n)})$, $f'' \in F(x + \tau'' e_j^{(n)})$ выполняется $f''_i \geq f'_i$ при $i \neq j$.

Заметим, что все свойства a)–d) аддитивны, более того, любая взвешенная сумма внедиагонально антитонных отображений с неотрицательными коэффициентами является внедиагонально антитонным отображением, т. е. это множество образует выпуклый конус. Отметим, что исключение условия $x' \neq x''$ в a) и c) приводит к однозначности отображения F.

Предложение 2.1. *Если отображение $Q : R^n \to \Pi(R^n)$ является изотонным на множестве D, то отображение $F : R^n \to \Pi(R^n)$, определяемое по формуле $F(x) = x - Q(x)$, является внедиагонально антитонным на D.*

Доказательство. Выберем произвольно точки $x', x'' \in D$, $x' \geq x''$, $x' \neq x''$. Тогда для любых $f' \in F(x')$, $f'' \in F(x'')$ имеем $f' = x' - q'$, $f'' = x'' - q''$, где $q' \in Q(x')$, $q'' \in Q(x'')$ и $q' \geq q''$. Если $x'_k = x''_k$ для некоторого индекса k, то отсюда следует $f'_k \leq f''_k$, т. е. отображение F является внедиагонально антитонным. $\square$

Определение 2.2. Отображение $F : R^n \to \Pi(R^n)$ называется

a) *квазидиагональным*, если $F(x) = \prod\limits_{i=1}^{n} F_i(x)$, где $F_i : R^n \to \Pi(R)$ для $i = 1, \ldots, n$;

b) *диагональным*, если $F(x) = \prod\limits_{i=1}^{n} F_i(x_i)$, где $F_i : R \to \Pi(R)$ для $i = 1, \ldots, n$.

Заметим, что любое однозначное отображение квазидиагонально. Теперь установим свойство внедиагональной антитонности для композиции отображений.

Предложение 2.2. *Пусть отображение $F : R^n \to \Pi(R^n)$ имеет вид $F = Q \circ H$, где $H : R^n \to R^n$ — однозначное, диагональное и изотонное отображение на D, а $Q : R^n \to \Pi(R^n)$ — внедиагонально антитонное отображение на некотором параллелепипеде, содержащем $H(D)$. Тогда отображение F является внедиагонально антитонным на D.*

Доказательство. Выберем произвольно точки $x', x'' \in D$ такие, что $x' \geq x''$, $x' \neq x''$, и любые элементы $f' \in F(x')$, $f'' \in F(x'')$, тогда $f' \in Q(h')$, $f'' \in Q(h'')$, где $h' = H(x')$, $h'' = H(x'')$, причем $h' \geq h''$ в силу изотонности H. Кроме того, если $x'_k = x''_k$, то $h'_k = h''_k$ и поэтому $f'_k \leq f''_k$. Следовательно, отображение F является внедиагонально антитонным. □

В однозначном случае понятия Z-отображения и внедиагонально антитонного отображения эквивалентны. Покажем выполнение этого свойства в многозначном случае.

Предложение 2.3. *Понятия Z-отображения и внедиагонально антитонного отображения на D эквивалентны.*

Доказательство. Если F является Z-отображением, то для произвольных точек x', x'' таких, что $x' \geq x''$, $x' \neq x''$, имеем $x' = x'' + \sum\limits_{j \neq i} \tau_j e_j^{(n)}$, $\tau_j \geq 0$ при $j \neq i$ для любого индекса i такого, что $x'_i = x''_i$. Поэтому $f'_i \leq f''_i$ для любых $f' \in F(x')$, $f'' \in F(x'')$. Наоборот, если F внедиагонально антитонно, $x' = x + \tau' e_j^{(n)}$, $x'' = x + \tau'' e_j^{(n)}$, где $0 \leq \tau'' < \tau' < +\infty$, $x, x' \in D$, то $x' \geq x''$, $x' \neq x''$ и $x'_i = x''_i$ при $i \neq j$. Поэтому $f'_i \leq f''_i$ при $i \neq j$ и для любых $f' \in F(x')$, $f'' \in F(x'')$, т. е. F — Z-отображение. □

Определение 2.3. Отображение $F : R^n \to \Pi(R^n)$ называется

a) *AZ-отображением* на множестве D, если оно имеет вид
$$F = B + C, \tag{5}$$
где $B : R^n \to \Pi(R^n)$ — внедиагонально антитонное отображение на D, а С $: R^n \to \Pi(R^n)$ — диагональное отображение;

b) *GS-отображением* на D, если для любых точек $x', x'' \in D$ таких, что $x' \geq x''$, $x' \neq x''$, и любых $f' \in F(x')$, $f'' \in F(x'')$ выполняется
$$\min_{k \in I} (f''_k - f'_k) \leq 0,$$
где $I = \{i \mid x'_i = x''_i\}$;

c) *GC-отображением* на множестве D, если $-F$ является GS-отображением на D.

Свойства валовой заменимости (GS — gross substitutability) и валовой дополнительности (GC — gross complementarity) широко используются при исследовании моделей экономического равновесия (напр., [12], [6]).

Определение 2.4 (напр., [13], [11], [14]). Отображение $F : R^n \to \Pi(R^n)$ называется

a) *полунепрерывным сверху* на множестве D, если для любой точки $x \in D$ и любой окрестности U множества $F(x)$ найдется окрестность V точки x такая, что $F(y) \subseteq U$, как только $y \in V \bigcap D$;

b) *полунепрерывным снизу* на множестве D, если для любой точки $x \in D$ и любого открытого множества U такого, что $U \bigcap F(x) \neq \emptyset$, найдется открытое множество V такое, что $F(y) \bigcap U \neq \emptyset$ для любого $y \in V$;

c) *непрерывным* (по Какутани) на множестве D, если оно является полунепрерывным сверху и снизу на D.

Предложение 2.4. *Любое внедиагонально антитонное отображение на множестве D из (3) является GC-отображением на D, обратное утверждение справедливо, если это отображение полунепрерывно снизу.*

Доказательство. Очевидно, что любое внедиагонально антитонное отображение будет GC-отображением. Пусть F — полунепрерывное снизу GC-отображение на D. Выберем произвольно точки $x', x'' \in D$, $x' \geq x''$, $x' \neq x''$, и любой индекс $k \in I = \{i \mid x'_i = x''_i\}$. Определим точки y' и y'' по формулам

$$y'_i = \begin{cases} x'_i + \varepsilon & \text{при } \ i \in I, \ i \neq k, \ x'_i < b_i; \\ x'_i & \text{в противном случае,} \end{cases} \qquad y''_i = \begin{cases} x''_i - \varepsilon & \text{при } \ i \in I, \ i \neq k, \ x''_i > a_i; \\ x''_i & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Тогда $y' \geq y''$ и $y', y'' \in D$ при достаточно малом $\varepsilon > 0$, более того, $y'_i > y''_i$, если $i \neq k$. Поскольку F есть GC-отображение, то $\widetilde{f}'_k \leq \widetilde{f}''_k$ для любых $\widetilde{f}' \in F(y')$, $\widetilde{f}'' \in F(y'')$. Если предположить, что найдутся элементы $f' \in F(x')$, $f'' \in F(x'')$ такие, что $f'_k > f''_k$, то поскольку $y' \to x'$ и $y'' \to x''$ при $\varepsilon \to 0$, то существуют последовательности $\{\widetilde{f}'_k\} \to f'_k$ и $\{\widetilde{f}''_k\} \to f''_k$ при $\varepsilon \to 0$, т. е. $\widetilde{f}'_k > \widetilde{f}''_k$ при достаточно малом ε. Полученное противоречие показывает, что F является внедиагонально антитонным. $\square$

3. Существование минимального элемента и решения

Определим для задачи (2), (3) (или (4)) вспомогательное множество

$$Q = \{x \in D \mid \exists f \in F(x), \ x_i < b_i \Rightarrow f_i \geq 0 \ \forall i = 1, \ldots, n\}, \tag{6}$$

которое будет использоваться при обосновании существования решений и при построении метода их нахождения.

Лемма 3.1. *Если $F : R^n \to \Pi(R^n)$ является AZ-отображением на D, то множество Q замкнуто относительно операции покоординатного минимума.*

Доказательство. Выберем произвольные точки $x, y \in Q$ и обозначим $z = \min\{x, y\}$, т. е. $z = (z_1, \ldots, z_n)^T$, где $z_i = \min\{x_i, y_i\}$. Ясно, что $z \in D$. Обозначим $I_1 = \{i \mid x_i < y_i\}$ и $I_2 = \{i \mid x_i \geq y_i\}$. Если I_1 пусто, то $z = y$ и $z \in Q$, а если I_2 пусто, то $z = x$ и $z \in Q$.

Если оба множества I_1, I_2 непусты, то $z \leq x$ и $z \leq y$, причем $z_i = x_i$ при $i \in I_1$ и $z_i = y_i$ при $i \in I_2$. Поэтому для любых $t^z \in B(z)$, $t^x \in B(x)$, $t^y \in B(y)$ имеем $t^z_i \geq t^x_i$ при $i \in I_1$ и $t^z_i \geq t^y_i$ при $i \in I_2$, кроме того, для некоторых $\widetilde{t}^x \in B(x)$, $\widetilde{c}^x \in C(x)$, $\widetilde{t}^y \in B(y)$, $\widetilde{c}^y \in C(y)$ имеем $\widetilde{t}^x_i + \widetilde{c}^x_i \geq 0$ при $x_i < b_i$ и $\widetilde{t}^y_i + \widetilde{c}^y_i \geq 0$ при $y_i < b_i$. Тогда определим

$$c^z_i = \begin{cases} \widetilde{c}^x_i & \text{при } \ i \in I_1; \\ \widetilde{c}^y_i & \text{при } \ i \in I_2 \end{cases}$$

и получим $t^z + c^z = f^z \in F(z)$, но при этом $f^z_i \geq 0$, если $z_i < b_i$. Поэтому $z \in Q$. $\square$

Обозначим $\mu(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i$ и введем вспомогательную задачу оптимизации

$$\min_{x \in Q} \to \mu(x). \tag{7}$$

Лемма 3.2. *Если множество Q непусто, а отображение $F : R^n \to \Pi(R^n)$ является полунепрерывным сверху и имеет непустые выпуклые компактные образы на D, то задача (7) имеет решение.*

Доказательство. Выберем любой элемент $\widetilde{x} \in Q$, произвольное число $\gamma \geq \mu(\widetilde{x})$ и обозначим

$$Q_\gamma = Q \bigcap \{x \in R^n \mid \mu(x) \leq \gamma\}.$$

Множество Q_γ непусто, а поскольку $a_i > -\infty$ для $i = 1, \dots, n$, то оно ограничено. Покажем, что множество Q_γ замкнуто. Для этого выберем произвольно последовательность точек $\{x^k\}$ из Q, которая сходится к точке $x' \in R^n$, тогда $x' \in D$, поскольку D замкнуто. Кроме того, если для некоторого индекса i выполняется $x'_i < b_i$, то $x_i^k < b_i$ при достаточно больших k и поэтому $f_i^k \geq 0$ для некоторого $f^k \in F(x^k)$. В силу свойств отображения F существует подпоследовательность $\{f^{k_s}\}$, которая сходится к элементу $f' \in F(x')$, тогда $f'_i \geq 0$. Поэтому множество Q, а значит и Q_γ, замкнуто. По теореме Вейерштрасса получаем, что минимум непрерывной функции $\mu(x)$ на непустом компакте Q достигается. $\square$

Обозначим через $\min Q = \{z \in Q \mid z_i \leq x_i \ \forall i = 1, \dots, n, \ \forall x \in Q\}$ минимальный элемент множества Q. Его существование получаем на основе лемм 3.1 и 3.2.

Предложение 3.1. *Если $F : R^n \to \Pi(R^n)$ является полунепрерывным сверху AZ-отображением и имеет непустые выпуклые компактные образы на D, то $\min Q$ существует и совпадает с решением задачи* (7).

Доказательство. Очевидно, что элемент $\min Q$ определяется единственным образом. По лемме 3.2 существует решение x^* задачи (7). Если $x^* \neq \min Q$, то найдется элемент $y \in Q$ такой, что $y_i < x_i^*$ для некоторого i. Положим $z = \min\{x^*, y\}$, тогда $z \in Q$ по лемме 3.1, поэтому $\mu(z) < \mu(x^*)$, что невозможно по определению x^*. Итак, $x^* = \min Q$. $\square$

Теперь установим свойство существования решения задачи (2), (3) на основе предложения 3.1.

Теорема 3.1. *Пусть отображение $F : D \to \Pi(R^n)$ имеет вид* (5), *где $B : R^n \to \Pi(R^n)$ — внедиагонально антитонное и непрерывное отображение с непустыми, выпуклыми и компактными образами на D, а $C : R^n \to \Pi(R^n)$ — диагональное и полунепрерывное сверху отображение с непустыми, выпуклыми и компактными образами на D. Если множество Q из* (6) *непусто, то задача* (2), (3) *имеет решение $x^* \in Q$, совпадающее с элементом $\min Q$.*

Доказательство. Согласно предложению 3.1 при сделанных предположениях элемент $z = \min Q$ существует. Тогда $z \in D$ и $f_i \geq 0$ при $z_i < b_i$ для некоторого $f = t + c \in F(z)$, где $t \in B(z)$, $c \in C(z)$. Пусть найдется индекс k такой, что $z_k > a_k$ и $f_k = t_k + c_k > 0$ для некоторого $t \in B(z)$ и любого $c_k \in C_k(z_k)$. В силу свойств отображений B и C для некоторого $\widetilde{t} \in B(z - \varepsilon e_k^{(n)})$ и любого $\widetilde{c}_k \in C_k(z_k - \varepsilon)$ имеем $\widetilde{t}_k + \widetilde{c}_k > 0$ при достаточно малом $\varepsilon > 0$. Так как $z \geq z - \varepsilon e_k^{(n)}$, то в силу внедиагональной антитонности B имеем

$$\widetilde{t}_i \geq t_i \ \text{ при } \ i \neq k;$$

кроме того, выбираем $\widetilde{c}_i = c_i \in C_i(z_i)$ при $i \neq k$. Тогда

$$\widetilde{t}_i + \widetilde{c}_i \geq 0 \ \ \forall i = 1, \dots, n, \ \ z_i < b_i;$$

т. е. $z - \varepsilon e_k^{(n)} \in Q$, поэтому $z \neq \min Q$, что приводит к противоречию. Следовательно, найдется элемент $f \in F(z)$ такой, что $f_k = 0$ при $z_k > a_k$ и $f_k \leq 0$ при $z_k = b_k$. Получаем, что точка $z = \min Q$ есть решение задачи (2), (3). $\square$

4. Конструктивная теорема существования решения

В данном разделе получена теорема существования решения задачи (2), (3), опирающаяся на итеративный алгоритм, и установлены дополнительные свойства решений.

Теорема 4.1. *Пусть отображение $F : D \to \Pi(R^n)$ имеет вид (5), где $B : R^n \to \Pi(R^n)$ — квазидиагональное, внедиагонально антитонное и полунепрерывное сверху отображение с непустыми, выпуклыми и компактными образами на D, а $\mathrm{C} : R^n \to \Pi(R^n)$ — диагональное и полунепрерывное сверху отображение с непустыми, выпуклыми и компактными образами на D. Если множество Q из (6) непусто, то задача (2), (3) имеет решение $x^* \in Q$ такое, что $a \le x^* \le \tilde{x} \le b$, где $\tilde{x}$ — некоторая точка из Q.*

Доказательство. Выберем точку $\tilde{x} \in Q$ и построим последовательность $\{x^k\}$. Положим вначале $x^0 = \tilde{x}$. Пусть уже известна точка $x^k \in Q$, $x^k \le \tilde{x}$. Тогда определим следующую точку x^{k+1} так, чтобы выполнялись условия

$$a \le x^{k+1} \le x^k, \quad x^{k+1} \in Q \tag{8}$$

и

$$\exists f_i \in F_i(x^k \| x_i^{k+1}), \quad f_i \begin{cases} \ge 0 & \text{при } x_i^{k+1} = a_i; \\ = 0 & \text{при } x_i^{k+1} \in (a_i, b_i); \\ \le 0 & \text{при } x_i^{k+1} = b_i \end{cases} \tag{9}$$

для $i = 1, \ldots, n$; здесь $(x^k \| x_i^{k+1}) = (x_1^k, \ldots, x_{i-1}^k, x_i^{k+1}, x_{i+1}^k, \ldots, x_n^k)$. Точка x_i^{k+1} определяется следующим образом. Если найдется элемент $f_i \in F_i(x^k \| a_i)$, $f_i \ge 0$, то полагаем $x_i^{k+1} = a_i$. Иначе выполняется $f_i < 0$ для всех $f_i \in F_i(x^k \| a_i)$. Если $x_i^k = b_i$ и $f_i \le 0$, $f_i \in F_i(x^k)$, то полагаем $x_i^{k+1} = x_i^k$. В противном случае имеем либо $x_i^k < b_i$ и $\tilde{f}_i \ge 0$, $\tilde{f}_i \in F_i(x^k)$, либо $x_i^k = b_i$ и $f_i > 0$ для всех $f_i \in F_i(x^k)$. Тогда методом дихотомии на отрезке $[a_i, x_i^k]$ строим последовательность отрезков $[y_i', y_i'']$, стягивающихся к некоторой точке $y_i < b_i$, причем $f_i' < 0$ для всех $f_i' \in F_i(x^k \| y_i')$ и $f_i'' \ge 0$ для некоторого $f_i'' \in F_i(x^k \| y_i'')$. В силу свойств отображения F имеем $f_i' \le 0$ для некоторого $f_i' \in F_i(x^k \| y_i)$ и $f_i'' \ge 0$ для некоторого $f_i'' \in F_i(x^k \| y_i)$, т. е. найдется элемент $f_i = 0$, $f_i \in F_i(x^k \| y_i)$. Тогда полагаем $x_i^{k+1} = y_i$. По построению первое соотношение в (8) и соотношения в (9) выполняются. Кроме того, $(x^k \| x_i^{k+1}) \ge x^{k+1}$ для любого индекса i. Тогда для любых $t_i' \in B_i(x^k \| x_i^{k+1})$, $t_i'' \in B_i(x^{k+1})$ имеем $t_i' \le t_i''$, более того, если $x_i^{k+1} < b_i$, то $t_i' + c_i \ge 0$ для некоторых $t_i' \in B_i(x^k \| x_i^{k+1})$, $c_i \in C_i(x_i^{k+1})$ и поэтому $f_i'' = t_i'' + c_i \ge 0$. Отсюда следует $x^{k+1} \in Q$.

Итак, последовательность $\{x^k\}$ полностью определена и ограничена по построению. Поэтому она имеет предельные точки, а поскольку выполняется (8), то $\{x^k\}$ сходится к некоторой точке x^*. В силу замкнутости Q имеем $x^* \in Q$, а из (9) и свойств отображения F следует, что выполняются соотношения (2), т. е. x^* — решение задачи (2), (3). □

Итак, теорема 4.1 фактически устанавливает реализуемость и сходимость следующего алгоритма типа Якоби.

Алгоритм. Выбираем точку $x^0 \in Q$. Для каждого $k = 0, 1, \ldots$ по точке $x^k \in Q$ строим точку x^{k+1} по таким правилам. Для каждого индекса $i = 1, \ldots, m$ определяем x_i^{k+1}:

a) если $\exists f_i' \in F_i(x^k \| a_i)$, $f_i' \ge 0$, то полагаем $x_i^{k+1} = a_i$,

иначе

b) если $\exists f_i' \in F_i(x^k)$, $f_i' \le 0$ и $x_i^k = b_i$, то полагаем $x_i^{k+1} = x_i^k$,

иначе

c) на отрезке $[a_i, x_i^k]$ находим число x_i^{k+1} такое, что $\exists f_i' \in F_i(x^k \| x_i^{k+1})$, $f_i' = 0$.

Следствие 4.1. Если множество Q непусто, а отображение $F : D \to \Pi(R^n)$ имеет вид (5), где $B : R^n \to \Pi(R^n)$ — квазидиагональное, внедиагонально антитонное и полунепрерывное сверху отображение с непустыми, выпуклыми и компактными образами на D, а $C : R^n \to \Pi(R^n)$ –

диагональное и полунепрерывное сверху отображение с непустыми, выпуклыми и компактными образами на D, то последовательность $\{x^k\}$, построенная алгоритмом, сходится к решению задачи (2), (3).

Согласно предложению 3.1 в условиях теоремы 4.1 элемент $\min Q$ существует, поэтому можно положить $\widetilde{x} = \min Q$, но тогда $x^k = \widetilde{x}$ для любого k по построению, т. е. элемент $\min Q$ также является решением задачи (2), (3).

Следствие 4.2. Если множество Q непусто, а отображение $F : D \to \Pi(R^n)$ имеет вид (5), где $B : R^n \to \Pi(R^n)$ – квазидиагональное, внедиагонально антитонное и полунепрерывное сверху отображение с непустыми, выпуклыми и компактными образами на D, а $C : R^n \to \Pi(R^n)$ — диагональное и полунепрерывное сверху отображение с непустыми, выпуклыми и компактными образами на D, то $\min Q$ существует и является решением задачи (2), (3).

Согласно предложению 3.1 элемент $\min Q$ может быть найден как решение задачи (7). Этот подход можно использовать как альтернативу алгоритму Якоби, если множество Q достаточно просто задано.

Отметим, что утверждения теорем 3.1 и 4.1 остаются справедливыми, если отображение B внедиагонально антитонно, однозначно и непрерывно. Однако, по теореме Э. Майкла ([15], теорема 1) любое полунепрерывное снизу отображение с непустыми, выпуклыми и замкнутыми образами имеет непрерывный селектор. Поэтому, если в условиях теорем 3.1 и 4.1 потребовать только, чтобы отображение B было внедиагонально антитонно, полунепрерывно снизу и имело непустые, выпуклые и замкнутые образы на D, то его можно заменить соответствующим непрерывным селектором $\widetilde{B} : R^n \to R^n$, тогда вспомогательное множество Q следует заменить на

$$\widetilde{Q} = \{x \in D \mid \exists f \in \widetilde{B}(x) + C(x),\ x_i < b_i \Rightarrow f_i \geq 0\ \forall i = 1, \dots, n\},$$

и утверждения теорем также будут справедливыми.

5. Примеры приложений

Рассмотрим несколько примеров из различных областей, приводящихся к виду смешанной задачи дополнительности (2), (3), где основное отображение обладает свойствами внедиагональной антитонности.

(a) Задачи математической физики.

Многие задачи математической физики после дискретизации формулируются в виде вариационного неравенства (4), где

$$F(x) = Bx + q + C(x),$$

B — матрица порядка n с неположительными внедиагональными элементами, $C : R^n \to \Pi(R^n)$ — изотонное, диагональное и многозначное отображение, а допустимое множество D либо совпадает со всем пространством, либо является его неотрицательным ортантом (см. [16] и приведенную библиографию). В этих условиях описанный выше подход можно использовать как для получения результатов существования решений, так и для их определения с помощью алгоритма из раздела 4.

(b) Модели межотраслевого баланса.

Пусть имеется n отраслей экономики, которые производят n видов продукции, т. е. каждая отрасль выпускает только один вид продукции и каждый продукт производится только в одной отрасли. Классическая линейная модель межотраслевого баланса формулируется в виде системы

$$x - Ax - b = 0, \quad x \geq 0, \tag{10}$$

где x — вектор объемов выпуска товаров, A — матрица порядка n, задающая коэффициенты прямых затрат, b — вектор конечного спроса. По определению элементы матрицы A неотрицательны, поэтому однозначное отображение $f(x) = x - Ax - b$ внедиагонально антитонно. В случае несовместности систему (10) можно заменить задачей дополнительности (1). Дальнейшие обобщения состоят в возможности нелинейной зависимости производственных затрат от объемов выпусков, т.е. вектору выпусков x соответствует множество затрат $P(x)$. Многозначность отображения P означает возможность применения нескольких технологий при выпуске товаров. Определенное таким образом отображение $P : R^n \to \Pi(R^n)$ обычно является изотонным (напр., [7], [8]), а значит, согласно предложению 2.1 основное отображение, определяемое по формуле $F(x) = x - P(x) - b$, является внедиагонально антитонным отображением. Естественными являются двусторонние ограничения на выпуски товаров $x \in D$, где множество D определено в (3). Поэтому приходим к задаче (2), (3), для которой можно использовать теоремы 3.1 и 4.1 и алгоритм из раздела 4.

(c) Модели экономического равновесия.

В одной из наиболее общих постановок, следующей Л. Вальрасу, задачу нахождения ценового равновесия в экономике можно описать следующим образом. В экономике функционируют потребители и производители (экономические агенты), использующие n товаров, причем спрос и предложение товаров для любого экономического агента зависят от вектора цен $p \in R^n$, где p_j — цена единицы j-го товара, $p_j \geq 0$ для $j = 1, \ldots, n$. А именно, при заданных ценах p возможные варианты спроса потребителей описываются множеством $Q(p) \subseteq R^n_+$, возможные варианты предложения товаров производителями — множеством $S(p) \subseteq R^n_+$, т. е. спрос и предложение не обязательно являются однозначными отображениями на множестве цен. Вектор $p^* \geq 0$ называется вектором равновесных цен, если он удовлетворяет условиям

$$\exists e^* \in E(p^*), \quad e^* \leq 0, \quad \langle e^*, p^* \rangle = 0;$$

где $E(p) = Q(p) - S(p)$ — значение избыточного спроса на товары при ценах p. Иначе говоря, обычно задача нахождения равновесных цен является стандартной задачей дополнительности с отображением $F = -E$. Кроме того, естественными являются двусторонние ограничения на цены $p \in D$, где

$$D = \{x \in R^n \mid 0 \leq a_i \leq x_i \leq b_i \leq +\infty, \quad i = 1, \ldots, n\}.$$

Поэтому задачу нахождения равновесных цен удобно формулировать в общем виде как смешанную задачу дополнительности (2), (3). Традиционным для моделей экономического равновесия является предположение о валовой заменимости отображения избыточного спроса (напр., [13], [12], [6]). Заметим, что это свойство выполняется, если только отображение спроса Q является GS-отображением, а отображение S постоянно, т.е. в модели обмена. Еще один класс подобных моделей был рассмотрен в [17], где отображение спроса Q предполагалось однозначным и непрерывным GS-отображением, а отображение предложения S — изотонным, диагональным и многозначным. Тогда отображение F будет AZ-отображением. В [17] для поиска равновесных цен предлагаются методы спуска по D-интервальной функции. Полученные в данной статье результаты позволяют предложить альтернативный подход для этой задачи.

Литература

1. Берщанский Я.М., Мееров М.В. *Теория и методы решения задач дополнительности* // Автоматика и телемеханика. – 1983. – № 6. – С. 5–31.
2. Cottle R.W., Pang J.S., Stone R.E. *The linear complementarity problem.* – Boston: Academic Press, 1992. – 762 p.
3. Isac G. *Complementarity problems.* – Berlin: Springer-Verlag, 1992. – 297 p.
4. Малишевский А.В. *Модели совместного функционирования многих целенаправленных элементов.* I // Автоматика и телемеханика. – 1972. – № 11. – С. 92–110.

5. Малишевский А.В. *Модели совместного функционирования многих целенаправленных элементов.* II // Автоматика и телемеханика. – 1972. – № 12. – С. 108–129.
6. Полтерович В.М., Спивак В.А. *Отображение с валовой заменимостью в теории экономического равновесия* // Итоги науки и техн. Современ. пробл. матем. – М.: ВИНИТИ. – 1982. – Т. 19. – С. 111–154.
7. Опойцев В.И. *Нелинейная системостатика.* – М.: Наука, 1986. – 247 с.
8. Ершов Э.Б. *Теория клювов и межотраслевое моделирование* // Препринт WP2/2002/03. – М.: Государственный университет – Высшая школа экономики, 2002. – 64 с.
9. More J.J. *Classes of functions and feasibility conditions in nonlinear complementarity problems* // Math. Program. – 1974. – V. 6. – № 3. – P. 327–338.
10. Tamir A. *Minimality and complementarity properties associated with Z-functions and M-functions* // Math. Program. – 1974. – V. 7. – № 1. – P. 17–31.
11. Коннов И.В. *Методы решения конечномерных вариационных неравенств.* – Казань: ДАС, 1998. – 102 с.
12. Howitt P. *Gross substitutability with multi-valued excess demand functions* // Econometrica. – 1980. – V. 48. – № 6. – P. 1567–1573.
13. Никайдо Х. *Выпуклые структуры и математическая экономика.* – М.: Мир, 1972. – 520 с.
14. Байокки К., Капело А. *Вариационные и квазивариационные неравенства.* – М.: Наука, 1988. – 448 с.
15. Michael E.A. *Selected selection theorems* // Amer. Math. Monthly. – 1956. – V. 63. – № 4. – P. 233–238.
16. Lapin A.V. *On the iterative methods for mesh variational inequalities* // Тр. матем. центра им. Н.И. Лобачевского. – Казань, 1999. – Т. 2. – С. 170–211.
17. Konnov I.V., Volotskaya E.O. *Mixed variational inequalities and economic equilibrium problems* // J. of Appl. Math. – 2002. – V. 2. – № 6. – P. 289–314.

Казанский государственный университет

Поступила
25.02.2004