ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2004 МАТЕМАТИКА № 4 (503)

УДК 517.956

Е.А. УТКИНА

О ЗАДАЧАХ ГУРСА С ДОПОЛНИТЕЛЬНЫМИ НОРМАЛЬНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ В КРАЕВЫХ УСЛОВИЯХ

Пусть D — параллелепипед $x_0 < x < x_1$, $y_0 < y < y_1$, $z_0 < z < z_1$, а X, Y, Z — его грани при $x = x_0$, $y = y_0$, $z = z_0$ соответственно. Будем говорить об одном трехмерном аналоге уравнений из [1]

$$L(u) \equiv \sum_{\alpha,\beta=0}^{2} \sum_{\gamma=0}^{1} a_{\alpha\beta\gamma}(x,y,z) \frac{\partial^{\alpha+\beta+\gamma} u}{\partial x^\alpha \partial y^\beta \partial z^\gamma} = 0. \tag{1}$$

В работе [2] для (1) решена задача Гурса об отыскании в D функции $u(x,y,z)$ по условиям

$$\begin{gathered} u|_X = \varphi(y,z), \quad u|_Y = \psi(x,z), \quad u|_Z = \theta(x,y), \\ u_x|_X = \varphi_1(y,z), \quad u_y|_Y = \psi_1(x,z). \end{gathered} \tag{2}$$

В данной статье рассматриваются задачи, которые соотносятся с (1), (2) аналогично тому, как в теории эллиптических уравнений задача Неймана соотносится с задачей Дирихле. А именно, эти задачи получаются заменой в (2) хотя бы одного граничного условия значением нормальной производной из набора

$$u_{xx}(x_0,y,z) = \varphi_2(y,z), \quad u_{yy}(x,y_0,z) = \psi_2(x,z), \quad u_z(x,y,z_0) = \theta_1(x,y). \tag{3}$$

Как и в [1], считаем, что $a_{221}(x,y,z) \equiv 1$, а условия гладкости остальных коэффициентов (1) определяются включениями $a_{\alpha\beta\gamma} \in C^{\alpha+\beta+\gamma}(\overline{D})$, где $C^{\alpha+\beta+\gamma}$ есть класс непрерывных в $\overline{D}$ вместе с их производными $\partial^{r+s+t}/\partial x^r \partial y^s \partial z^t$ ($r = 0,\dots,\alpha$; $s = 0,\dots,\beta$; $t = 0,\dots,\gamma$) функций. Указанные задачи можно считать обобщением ситуаций, исследованных для более простых уравнений в работах [2], [3]. Отметим еще, что уравнения из [1], [3], принадлежащие этому же классу, встречаются в приложениях (уравнения Адлера и Буссинеска–Лява).

Присутствие условия из (3) на соответствующей характеристике будем обозначать буквой N, а отсутствие — Γ. Получаемые при этом варианты естественно закодировать сочетанием указанных букв, например, $\Gamma\Gamma N$, NNN и т.д.

Остановимся на трех задачах.

Задача $N\Gamma\Gamma$. *Найти функцию* $u \in C^{2+2+1}(D) \cap C^{2+0+0}(D \cup \overline{X}) \cap C^{0+1+0}(D \cup \overline{Y}) \cap C^{0+0+0}(D \cup \overline{Z})$, *являющуюся в* D *решением уравнения* (1), *удовлетворяющую условию*

$$u_{xx}(x_0,y,z) = \varphi_2(y,z), \quad \varphi_2 \in C^{2+1}(\overline{X}),$$

и всем соотношениям (2), *кроме первого.*

Решение может быть основано на редукции к задаче (1), (2), осуществляемой следующим образом. Дважды проинтегрируем (1) по y в пределах от y_* до y ($(x,y_*,z),(x,y,z) \in D$), затем в полученном соотношении устремим y_* к y_0. Далее интегрируем один раз по z в пределах от z_* до z и устремляем z_* к z_0, а x к x_0. Учитывая граничные условия, получим

$$\sum_{i=0}^{2} \sum_{j=0}^{1} D_y^{-i} D_z^{-j} (A_{0ij}\varphi(y,z)) = r_1(y,z), \tag{4}$$

$$
\begin{aligned}
r_1(y,z) = &-\sum_{i=0}^{2}\sum_{j=0}^{1} D_y^{-i} D_z^{-j}(A_{2ij}\varphi_2(y,z) + A_{1ij}\varphi_1(y,z)) + \\
&+\sum_{i=0}^{2} D_y^{-i}(A_{2i0}\varphi_2(y,z_0) + A_{1i0}\varphi_2(y,z_0) + A_{0i0}\theta(x_0,y)) + \\
&+\sum_{i=0}^{1}\sum_{j=0}^{1} D_y^{-i} D_z^{-j}(A_{2ij}\varphi_2(y_0,z) + A_{1ij}\varphi_1(y_0,z) + A_{0ij}\psi(x_0,z)) - \\
&-\sum_{i=0}^{1} D_y^{-i}(A_{2i0}\varphi_2(y_0,z_0) + A_{1i0}\varphi_1(y_0,z_0) + A_{0i0}\theta(x_0,y_0)) + \\
&+D_y^{-1}(\varphi_{2y}(y_0,z) - \varphi_{2y}(y_0,z_0)) + D_y^{-1}D_z^{-1}(a_{220}(x_0,y_0,z)\varphi_{2y}(y_0,z)) + \\
&+D_y^{-2}D_z^{-1}(a_{121}(x_0,y_0,z)\varphi_{1y}(y_0,z)) + D_y^{-1}(a_{121}(x_0,y_0,z_0)\varphi_{1y}(y_0,z_0) - \\
&-a_{121}(x_0,y_0,z_0)\varphi_{1y}(y_0,z_0)) - \\
&-D_y^{-1}D_z^{-1}(a_{121z}(x_0,y_0,z)\varphi_{1y}(y_0,z) - a_{120}(x_0,y_0,z)\varphi_{1y}(y_0,z)) + \\
&+D_y^{-1}(a_{021}(x_0,y_0,z)\psi_1(x_0,z) - a_{021}(x_0,y_0,z_0)\psi_1(x_0,z_0)) - \\
&-D_y^{-1}D_z^{-1}(a_{021z}(x_0,y_0,z)\psi_1(x_0,z) - a_{020}(x_0,y_0,z)\psi_1(x_0,z)).
\end{aligned}
$$

Здесь $D_t^k\varphi \equiv \partial^k\varphi/\partial t^k$ при $k = 1,2,\ldots$ и $D_t^k\varphi \equiv \int\limits_{t_0}^{t} \frac{(t-\tau)^{-k-1}\varphi(\tau)}{(-k-1)!}d\tau$ при $k = -1,-2,\ldots$, D_t^0 — единичный оператор;

$A_{i00}(y,z) = a_{i21}(x_0,y,z)$, $A_{i10}(y,z) = -2a_{i21y}(x_0,y,z) + a_{i11}(x_0,y,z)$,

$A_{i20}(y,z) = a_{i21yy}(x_0,y,z) - a_{i11y}(x_0,y,z) + a_{i00}(x_0,y,z)$,

$A_{i01}(y,z) = -a_{i21z}(x_0,y,z) + a_{i20}(x_0,y,z)$,

$A_{i11}(y,z) = -a_{i01z}(x_0,y,z) + a_{i10}(x_0,y,z) - 2(-a_{i21yz}(x_0,y,z) + a_{i20y}(x_0,y,z))$,

$A_{i21}(y,z) = -a_{i21yz}(x_0,y,z) + a_{i20y}(x_0,y,z) + a_{i11yz}(x_0,y,z) - a_{i10y}(x_0,y,z) - a_{i01z}(x_0,y,z) + a_{i00}(x_0,y,z)$.

При этом если $y = y_0$, то там, где было умножение на 2, совершается умножение на 1; $\varphi(y,z)$ — функция из первого условия (2), которую в данном случае требуется определить.

Из уравнения (4) на основании рассуждений, аналогичных приведенным в [2], [3], нетрудно усмотреть, что имеет место

Теорема 1. *Выполнение неравенства*

$$
\sum_{j=0}^{2}\sum_{k=0}^{1} A_{0jk}^2 \neq 0 \tag{5}
$$

обеспечивает однозначное определение функции $\varphi(y,z)$ через $\varphi_2(y,z)$, $\varphi_1(y,z)$, $\psi(x,z)$, $\psi_1(x,z)$, $\theta(x,y)$. При этом функция $\varphi(y,z)$ записывается в явном виде в любом из следующих случаев:

1) *обе функции A_{0jk}, A_{0j+1k} отличны от нуля при $j = 0,1$, $k = 0,1$;*

2) *обе функции A_{0jk}, A_{0jk+1} отличны от нуля при $j = 0,1,2$, $k = 0$;*

3) $A_{00k} \neq 0$, $A_{00k} - yA_{02k} \equiv 0$, $A_{02k} \neq 0$ *при* $k = 0,1$;

4) A_{0jk} $(j = 0,1,2;\ k = 0,1)$ *в нуль не обращается, все остальные коэффициенты равны нулю тождественно.*

Включение $\varphi \in C^{2+1}(\overline{X})$ обеспечивается добавлением к условиям гладкости на коэффициенты (1) требований $a_{i_1j_1k_1} \in C^{0+(j_1+j)+(k_1+k)}(D \cup \overline{X})$.

Приведем вариант расшифровки указанных выше условий. Например, выполнение 1) при $j = 0$, $k = 0$ означает, что $a_{021}(x_0,y,z) \neq 0$, $A_{010}(y,z) \neq 0$, $A_{020}(y,z) \equiv 0$, $A_{001}(y,z) \equiv 0$, $A_{011}(y,z) =$

$-a_{011z}(x_0,y,z)+a_{010}(x_0,y,z)\equiv 0$, $A_{021}(y,z)=-a_{001z}(x_0,y,z)+a_{000}(x_0,y,z)\equiv 0$. Явный вид φ задается в этом случае формулой

$$\varphi(y,z)=\frac{1}{A_{000}(y,z)}\Big\{r_1(y,z)-\int_{y_0}^{y}A_{010}(\eta,z)r_1(\eta,z)\Big[\exp\int_{y}^{\eta}A_{010}(\tau,z)d\tau\Big]d\eta\Big\}.$$

Задача $\Gamma N\Gamma$. *Отличается от предыдущей тем, что в* (2) *второе условие заменяется на*

$$u_{yy}(x,y_0,z)=\psi_2(x,z),\quad \psi_2\in C^{2+1}(\overline{Y}).$$

Здесь $u\in C^{2+2+1}(D)\cap C^{1+0+0}(D\cup\overline{X})\cap C^{0+2+0}(D\cup\overline{Y})\cap C^{0+0+0}(D\cup\overline{Z})$.

Так как переменные x и y входят в (1) симметрично, для нахождения $\psi(x,z)$ получим уравнение, подобное (4). Вместо A_{ijk} здесь будут использоваться B_{jik}, полученные перестановкой первых двух индексов.

Анализ этого уравнения показывает, что справедлива

Теорема 2. *Достаточным условием однозначной разрешимости задачи* $\Gamma N\Gamma$ *является неравенство* (5) *с заменой* A_{0jk} *на* B_{j0k}. *При этом редукция к задаче Гурса обеспечивается выполнением условий* 1)–4) *из формулировки теоремы* 1, *в которых* A_{0jk} *заменены на* B_{j0k}.

Условия гладкости на коэффициенты в данном случае определяются включениями

$$a_{i_1j_1k_1}\in C^{(i_1+i)+0+(k_1+k)}(D\cup\overline{Y}).$$

Задача $\Gamma\Gamma N$. *Отыскать* $u\in C^{2+2+1}(D)\cap C^{1+0+0}(D\cup\overline{X})\cap C^{0+1+0}(D\cup\overline{Y})\cap C^{0+0+1}(D\cup\overline{Z})$, *являющуюся решением* (1) *при выполнении всех условий* (2), *кроме третьего, вместо которого берется*

$$u_z(x,y,z_0)=\theta_1(x,y),\quad \theta_1\in C^{2+2}(\overline{Z}).$$

Здесь при выводе аналога (4) интегрируем (1) дважды по x и дважды по y. Тогда для определения $\theta(x,y)$ получим уравнение

$$\sum_{i=0}^{2}\sum_{j=0}^{2}D_x^{-i}D_y^{-j}(C_{ij0}\theta(x,y))=r_3(x,y),\tag{6}$$

где

$$\begin{gathered}
r_3(x,y)=-\sum_{i=0}^{2}\sum_{j=0}^{2}D_x^{-i}D_y^{-j}(C_{ij1}\theta_1(x,y))+\sum_{i=0}^{2}\sum_{j=0}^{1}D_x^{-i}D_y^{-j}(C_{ij0}\psi(x,z_0)+C_{ij1}\theta_1(x,y_0))+\\
+\sum_{i=0}^{1}\sum_{j=0}^{2}D_x^{-i}D_y^{-j}(C_{ij0}\varphi(y,z_0)+C_{ij1}\theta_1(x_0,y))-D_x^{-1}D_y^{-1}(\theta_{1xy}(x_0,y_0))-\\
-\sum_{i=0}^{1}\sum_{j=0}^{1}D_x^{-i}D_y^{-j}(C_{ij0}\varphi(y_0,z_0)+C_{ij1}\theta_1(y_0,z_0))+\\
+D_y^{-1}(\psi_{1z}(x,z_0)-\psi_{1z}(x_0,z_0))+D_x^{-1}(\theta_{1x}(x_0,y)-\theta_{1x}(x_0,y_0))+\\
+D_y^{-1}(a_{220}(x,y_0,z_0)\psi_1(x,z_0)-a_{220}(x_0,y_0,z_0)\psi_1(x_0,z_0))+\\
+D_x^{-1}(a_{220}(x_0,y,z_0)\varphi_1(y,z_0)-a_{220}(x_0,y_0,z_0)\varphi_1(y_0,z_0))-\\
-D_x^{-1}D_y^{-1}(2a_{220x}(x,y_0,z_0)\psi_1(x,z_0)-a_{220x}(x_0,y_0,z_0)\psi_1(x_0,z_0)+\\
+2a_{220y}(x_0,y,z_0)\varphi_1(y,z_0)-a_{220x}(x_0,y_0,z_0)\psi_1(x_0,z_0)-\\
-a_{220y}(x_0,y_0,z_0)\varphi_1(y_0,z_0)+a_{211}(x_0,y,z_0)\varphi_{1z}(y,z_0)-a_{211}(x_0,y_0,z_0)\varphi_{1z}(y_0,z_0))+\\
+D_x^{-1}D_y^{-2}((a_{220yy}(x_0,y,z_0)-a_{210y}(x_0,y,z_0)+a_{200}(x_0,y,z_0))\varphi_1(y,z_0)+\\
+a_{201yy}(x_0,y,z_0)\varphi_{1z}(y,z_0)+a_{200}(x_0,y,z_0)\varphi_1(y,z_0))+\\
+D_x^{-2}D_y^{-1}((a_{220xx}(x,y_0,z_0)-a_{120x}(x,y_0,z_0)+a_{020x}(x,y_0,z_0))\psi_1(x,z_0)+
\end{gathered}$$

$$+(-a_{121x}(x,y_0,z_0)+a_{021}(x,y_0,z_0))\psi_{1z}(x,z_0))+$$
$$+D_x^{-1}D_y^{-1}(a_{210}(x_0,y,z_0)\varphi_1(y,z_0)-a_{210}(x_0,y_0,z_0)\varphi_1(y_0,z_0)+$$
$$+a_{121}(x,y_0,z_0)\psi_{1z}(x,z_0)-a_{121}(x_0,y_0,z_0)\psi_{1z}(x_0,z_0)+$$
$$+a_{120}(x,y_0,z_0)\psi_1(x,z_0)-a_{120}(x_0,y_0,z_0)\psi_1(y_0,z_0)),$$

а C_{kls} задаются формулами

$$C_{00i}(x,y)=a_{20i}(x,y,z_0),\quad C_{01i}=-2a_{22iy}(x,y,z_0)+a_{21i}(x,y,z_0),$$
$$C_{02i}=a_{22iyy}(x,y,z_0)-a_{21iy}(x,y,z_0)+a_{20i}(x,y,z_0),$$
$$C_{10i}=-2a_{22ix}(x,y,z_0)+a_{12i}(x,y,z_0),\quad C_{20i}=a_{22ixx}(x,y,z_0)-a_{12ix}(x,y,z_0)+a_{02i}(x,y,z_0),$$
$$C_{11i}=4a_{22ixy}(x,y,z_0)-2a_{21ix}(x,y,z_0)-2a_{12iy}(x,y,z_0)+a_{11i}(x,y,z_0),$$
$$C_{21i}=-2a_{22ixxy}(x,y,z_0)+a_{21ixx}(x,y,z_0)+$$
$$+2a_{12ixy}(x,y,z_0)-a_{11ix}(x,y,z_0)-2a_{02iy}(x,y,z_0)+a_{01i}(x,y,z_0),$$
$$C_{12i}=-2a_{22ixyy}(x,y,z_0)+2a_{21ixy}(x,y,z_0)+$$
$$+a_{12iyy}(x,y,z_0)-a_{11iy}(x,y,z_0)-2a_{20ix}(x,y,z_0)+a_{10i}(x,y,z_0),$$
$$C_{22i}=-a_{12ixyy}(x,y,z_0)+a_{22ixxyy}(x,y,z_0)+a_{11ixy}(x,y,z_0)-a_{10ix}(x,y,z_0)+$$
$$+a_{20ixx}(x,y,z_0)-a_{21ixxy}(x,y,z_0)-a_{01iy}(x,y,z_0)+a_{02iyy}(x,y,z_0)+a_{00i}(x,y,z_0).$$

При этом если $x=x_0$ и была производная по x, то в тех слагаемых, где производилось умножение на 2 или на 4, соответственно выполняется умножение на 1 или 2. Аналогично для $y=y_0$. В случае обоих равенств все коэффициенты равны 1.

Аналогично предыдущим случаям выводится

Теорема 3. *Функция $\theta(x,y)$ однозначно определяется через $\theta_1(x,y)$, $\varphi(y,z)$, $\varphi_1(y,z)$, $\psi(x,z)$, $\psi_1(x,z)$ при выполнении условия*

$$\sum_{i=0}^{2}\sum_{j=0}^{2}C_{ij0}^2\neq 0.$$

При этом $\theta(x,y)$ записывается в явном виде в любом из следующих случаев:

1) *обе функции C_{ij0}, C_{i+1j0} отличны от нуля при $i=0,1$, $j=0,1,2$;*
2) *обе функции C_{ij0}, C_{ij+10} отличны от нуля при $i=0,1,2$, $j=0,1$;*
3) *$C_{0j0}\neq 0$, $C_{0j0}-xC_{2j0}\equiv 0$, $C_{2j0}\neq 0$ при $j=0,1,2$, $C_{i00}\neq 0$, $C_{i00}-yC_{i20}\equiv 0$, $C_{i20}\neq 0$ при $i=0,1,2$;*
4) *только одна функция C_{ij0} $(i=0,1,2;\ j=0,1,2)$ отлична от нуля, а все остальные равны нулю. Включение $\theta\in C^{2+2}(\overline{Z})$ обеспечивается добавлением к уже имеющимся в [2] условиям гладкости на коэффициенты (1) требований $a_{i_1j_1k_1}\in C^{(i_1+i)+(j_1+j)+0}(D\cup\overline{Z})$.*

Рассмотренные задачи можно считать базовыми: разрешимость остальных указанных в начале статьи легко получается с их помощью. Поясним это на одной из них.

Задача NNN. *Найти для (1) решение класса $u\in C^{2+2+1}(D)\cap C^{2+0+0}(D\cup\overline{X})\cap C^{0+2+0}(D\cup\overline{Y})\cap C^{0+0+1}(D\cup\overline{Z})$, удовлетворяющее условиям (3) и двум последним условиям в (2).*

Функции $\varphi(y,z)$, $\psi(x,z)$, $\theta(x,y)$ определяются из уравнений (4), (6). При этом в каждом случае для нахождения неизвестной функции используются неравенства типа (5). В общем случае редукция к задаче Гурса осуществляется в терминах резольвент. Для нахождения решения в явном виде требуется комбинировать варианты 1)–4) теорем 1–3 на X, Y, Z с учетом различных i, j, k подобно тому, как это делается в [3]. Всего комбинаций будет 4^3: 111, 121, 211, 112, …, 444 (пишем номера подряд без скобок, на первом месте указан соответствующий пункт из теоремы 1, на втором — из теоремы 2, на третьем — из теоремы 3). Каждый набор дает информацию об условиях гладкости и числе входящих в решение произвольных функций и (или) констант. Число различных произвольных функций в решении может доходить до трех.

Литература

1. Солдатов А.П., Шхануков М.Х. *Краевые задачи с общим нелокальным условием А.А. Самарского для псевдопараболических уравнений высокого порядка* // ДАН СССР. – 1987. – Т. 297. – № 3. – С. 547–552.
2. Жегалов В.И., Уткина Е.А. *Задача Гурса для одного трехмерного уравнения со старшей производной* // Изв. вузов. Математика. – 2001. – № 11. – С. 77–81.
3. Жегалов В.И., Миронов А.Н. *Трехмерные характеристические задачи с нормальными производными в граничных условиях* // Дифференц. уравнения. – 2000. – Т. 36. – № 6. – С. 833–836.
4. Жегалов В.И., Уткина Е.А. *Об одном псевдопараболическом уравнении третьего порядка* // Изв. вузов. Математика. – 1999. – № 10. – С. 73–76.

Казанский государственный
педагогический университет

Поступила
05.12.2001