ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2003 МАТЕМАТИКА № 9 (496)

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 517.968:519.6

Е.Ф. АЮПОВА

СЛАБО СИНГУЛЯРНЫЕ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ I РОДА В ПРОСТРАНСТВАХ ЗИГМУНДА

1. *Классы Зигмунда и их свойства.* Пусть $C_{2\pi}$ — пространство непрерывных 2π-периодических функций с нормой

$$\|\varphi\|_{C_{2\pi}} = \max_s |\varphi(s)| \equiv \|\varphi\|_\infty, \quad \varphi \in C_{2\pi}.$$

Непрерывная 2π-периодическая функция $\varphi(\sigma)$ принадлежит классу Зигмунда (напр., [1]) с показателем $0 < \alpha \leq 2$, если выполнено условие $Z(\varphi, \alpha) < \infty$, где

$$Z(\varphi, \alpha) = \sup_{h>0} \frac{\|\varphi(s+h) - 2\varphi(s) + \varphi(s-h)\|_\infty}{h^\alpha}.$$

Будем обозначать этот класс через Z^α $(0 < \alpha \leq 2)$.

В следующих теоремах устанавливаются свойства введенного класса функций.

Теорема 1. *Класс Зигмунда Z^α $(0 < \alpha \leq 2)$ является банаховым пространством относительно нормы*

$$\|\varphi\|_{Z^\alpha} = \|\varphi\|_\infty + Z(\varphi, \alpha).$$

Теорема 2. *Пространство Зигмунда Z^α $(0 < \alpha \leq 2)$ несепарабельно.*

Введем также класс $W^r Z^\alpha$ $(0 < \alpha \leq 2, r \geq 0$ целое) непрерывных 2π-периодических функций, имеющих r-ю производную из класса Зигмунда Z^α $(0 < \alpha \leq 2)$. Доказательство полноты и несепарабельности пространства $W^r Z^\alpha$ относительно нормы

$$\|x\|_{W^r Z^\alpha} = \sum_{k=0}^{r} \|x^{(k)}\|_{Z^\alpha}$$

вытекает из теорем 1 и 2.

2. *Элементы теории приближений в пространствах Зигмунда.* Пусть далее Φ_n — оператор Фурье, ставящий в соответствие каждой функции $\varphi(\sigma)$ n-й отрезок ее ряда Фурье по тригонометрической системе

$$\Phi_n\varphi = \Phi_n(\varphi; s) = \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{iks},$$

где $c_k = c_k(\varphi) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \varphi(\sigma) e^{-ik\sigma} d\sigma$ $(k = \overline{-n, n})$ — коэффициенты Фурье функции $\varphi(\sigma)$. Тогда известна оценка нормы этого оператора $\|\Phi_n\|_\infty = O(\ln n)$.

Пусть $\mathcal{L}_{n,\omega}$ — оператор, который каждой функции $\varphi(s) \in C_{2\pi}$ ставит в соответствие ее тригонометрический интерполяционный полином Лагранжа степени $n = [N/2]$

$$\mathcal{L}_{n,\omega}\varphi \equiv \mathcal{L}_{n,\omega}(\varphi; s) = \frac{2}{N}\sum_{k=1}^{N} \varphi(s_k)\Delta_n(s - s_k), \quad \varphi \in C_{2\pi}, \quad \mathcal{L}_{n,\omega}^2 = \mathcal{L}_{n,\omega}, \tag{1}$$

где (напр., [2]) $\Delta_n(t) = D_n(t)$, $N = 2n+1$, — обычное ядро Дирихле n-го порядка; $\Delta_n(t) = D_n^*(t)$, $N = 2n$, — модифицированное ядро Дирихле того же порядка,

$$s_k = \frac{2\pi k}{N} + \frac{\omega}{N}, \quad 1 \le k \le N, \quad 0 \le \omega \le \pi. \tag{2}$$

Следующие теорема и ее следствие устанавливают аппроксимативные свойства операторов Фурье и Лагранжа в пространствах Зигмунда.

Теорема 3. *Пусть* $\varphi \in W^r Z^\alpha$ $(0 < \alpha \le 2,\ r \ge 0$ *целое*$)$, $0 < \beta \le 2$. *Тогда для любого натурального* n *при* P_n, *равном* Φ_n *или* $\mathcal{L}_{n,\omega}$, *имеют место оценки*

$$\|\varphi - P_n\varphi\|_{Z^\beta} = Z(\varphi^{(r)}, \alpha) \cdot O\left(\frac{\ln n}{n^{r+\alpha-\beta}}\right) \qquad (r + \alpha > \beta);$$
$$\|\varphi - P_n\varphi\|_{W^1 Z^\beta} = Z(\varphi^{(r)}, \alpha) \cdot O\left(\frac{\ln n}{n^{r+\alpha-1-\beta}}\right) \quad (r + \alpha - 1 > \beta).$$

Следствие. Для любого натурального n при P_n, равном Φ_n или $\mathcal{L}_{n,\omega}$, имеют место оценки

$$\|P_n\|_{Z^\alpha \to Z^\alpha} = O(\ln n);$$
$$\|P_n\|_{W^1 Z^\alpha \to W^1 Z^\alpha} = O(\ln n).$$

3. *Слабо сингулярное интегральное уравнение с логарифмическим ядром и приближенные методы решения.* В процессе решения ряда теоретических и прикладных задач возникает слабо сингулярное интегральное уравнение (с. с. и. у.) с логарифмическим ядром в главной части интегрального оператора вида

$$Ax \equiv -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln\left|\sin\frac{s-\sigma}{2}\right| x(\sigma)d\sigma + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} h(s,\sigma)x(\sigma)d\sigma = y(s); \tag{3}$$

здесь $h(s,\sigma)$, $y(s)$ — известные непрерывные 2π-периодические функции по каждой из переменных, $x(\sigma)$ —искомая функция, слабо сингулярный интеграл понимается как несобственный.

Задача решения уравнения (3) является некорректной [2], что связано с полной непрерывностью слабо сингулярного интегрального оператора $S : X \to X$,

$$Sx \equiv -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln\left|\sin\frac{s-\sigma}{2}\right| x(\sigma)d\sigma, \quad x \in X,$$

и вытекающей отсюда полной непрерывностью оператора $A : X \to X$, $Ax \equiv Sx + Rx$,

$$Rx \equiv \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} h(s,\sigma)x(\sigma)d\sigma. \tag{4}$$

Это означает, что обратный оператор $A^{-1} : X \to X$ в случае его существования неограничен.

В данной работе будем следовать методике (напр., [1], [2]), позволяющей рассматривать поставленную задачу как корректную. Она основана на соответствующем выборе пространства правых частей (будем обозначать его через Y) и искомых элементов (согласно предыдущим обозначениям — через X). При этом операторы S и A рассматриваются как операторы из X в Y, где $X \ne Y$. При подходящем выборе Y в зависимости от данного пространства X (или же наоборот) и условий решаемой задачи исходное уравнение может быть приведено к уравнению второго рода, и тогда задача решения уравнения (3) будет поставлена корректно [2].

С учетом сказанного в качестве исходного пространства X рассмотрим пространство Зигмунда $Z \equiv Z^1$, определенное выше, а в качестве пространства правых частей — пространство $Y = W^1 Z$. Обоснование корректности задачи решения уравнения (3) в определенных таким образом пространствах опирается на следующие известные утверждения.

Лемма. *Сингулярный оператор* $I : Z \to Z$,

$$I\varphi = I(\varphi; s) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{ctg} \frac{\sigma - s}{2} \varphi(\sigma) d\sigma, \quad \varphi \in X,$$

является ограниченным.

Следствие. Для того чтобы функция φ принадлежала пространству Z, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось включение $I\varphi \in Z$.

Из формулы для определения обратного оператора (напр., [2])

$$S^{-1}(y; s) = -2I(y'; s) + \frac{1}{2\pi \ln 2} \int_0^{2\pi} y(s) ds, \quad y \in Y,$$

с учетом леммы и ее следствия следует

Теорема 4. *Слабо сингулярный интегральный оператор* $S : Z \to W^1 Z$ *непрерывно обратим.*

Из теоремы 4 в силу известных результатов (напр., [3]) для операторных уравнений, приводящихся к уравнениям второго рода в банаховых пространствах, следует

Теорема 5. *Пусть ядро* $h(s, \sigma)$ *таково, что оператор* $R : Z \to W^1 Z$ *вполне непрерывен. Если однородное уравнение, соответствующее уравнению* (3), *имеет только нулевое решение, то оператор* $A : Z \to W^1 Z$ *непрерывно обратим.*

Ниже на основании изложенных результатов предлагается теоретическое обоснование известных вычислительных схем прямых методов решения уравнения (3) в паре пространств Зигмунда. Будем считать, что (3) однозначно разрешимо в пространстве $X = Z$ при любой правой части $y \in Y = W^1 Z$.

Пусть $\mathbf{H}_n$ — множество всех тригонометрических полиномов порядка не выше n. Через $X_n \subset X$ и $Y_n \subset Y$ обозначим множество $\mathbf{H}_n$, наделенное нормами пространств X и Y соответственно. Через $E_n(\varphi)_X$, $E_n(\varphi)_Y$, $E_n(\varphi)_\infty$ будем обозначать наилучшие приближения функции $\varphi(s)$ элементами из $\mathbf{H}_n$ в пространствах X, Y и $C_{2\pi}$.

Приближенное решение с. с. и. у. (3) определим как точное решение операторного уравнения [1], [2]

$$A_n x_n \equiv S_n x_n + R_n x_n = y_n \quad (x_n \in X_n, \quad y_n \in Y_n), \tag{5}$$

где операторы $S_n, R_n : X_n \to Y_n$ и элементы $y_n \in Y_n$ — некоторые аппроксимации соответственно операторов $S, R : X \to Y$ и правой части $y \in Y$ уравнения (3).

3.1. *Метод Галёркина.* Следуя ([2], § 2, гл. I), приведем вычислительную схему метода Галёркина для исходного уравнения. Приближенное решение будем искать как тригонометрический полином степени n вида

$$x_n(\sigma) = \sum_{k=-n}^{n} \alpha_k e^{ik\sigma}, \tag{6}$$

неизвестные коэффициенты которого определим из следующей системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ):

$$\alpha_j c_j(g) + \sum_{k=-n}^{n} h_{jk} \alpha_k = c_j(y), \quad j = \overline{-n, n},$$

где $g(\sigma) = \ln |\sin \frac{\sigma}{2}|$, $h_{jk} = c_j(\varphi_k)$, $\varphi_k(s) = R(e^{ik\sigma}; s)$, оператор R определен в (4).

В операторном виде СЛАУ метода Галёркина имеет вид

$$A_n x_n \equiv \Phi_n A x_n = \Phi_n y \quad (x_n \in X_n, \quad \Phi_n y \in Y_n). \tag{7}$$

Используя свойства операторов $S : X_n \to Y_n$ и $\Phi_n : Y \to Y_n$, запишем (7) в эквивалентной форме

$$A_n x_n \equiv S x_n + \Phi_n R x_n = \Phi_n y \quad (x_n \in X_n, \quad \Phi_n y \in Y_n).$$

Скорость сходимости метода Галёркина в пространстве Зигмунда устанавливает

Теорема 6. *Пусть ядро $h(s,\sigma)$ таково, что оператор $R : Z \to W^1 Z$ вполне непрерывен, а точное решение исходного с. с. и. у. x^* принадлежит Z^α $(1 < \alpha \le 2)$. Тогда метод Галёркина сходится со скоростью*

$$\|x^* - x_n^*\|_Z = O\left(\frac{\ln n}{n^{\alpha-1}}\right).$$

3.2. *Метод коллокаций.* Дадим теоретическое обоснование двух вычислительных схем метода коллокаций. Приближенное решение уравнения (3) будем искать в виде тригонометрического полинома, используя одно из следующих эквивалентных представлений:

$$x_n(\sigma) = \sum_{k=-n}^{n} \alpha_k e^{ik\sigma} = \frac{2}{2n+1} \sum_{k=-n}^{n} x_n(s_k) D_n(s - s_k),$$

где узлы $\{s_k\}_{k=\overline{-n,n}}$ определены в (2). Тогда неизвестные $\{\alpha_k\}_{k=\overline{-n,n}}$ и $\{x_n(s_k)\}_{k=\overline{-n,n}}$ определим соответственно из СЛАУ [2]

$$\sum_{k=-n}^{n} \{c_k(g) e^{iks_j} + h_{jk}\} \alpha_k = y(s_j), \quad j = \overline{-n,n};$$

$$\frac{1}{2n+1} \sum_{k=-n}^{n} x_n(s_k) \left\{ \ln 2 + \sum_{m=1}^{n} \frac{1}{m} \cos m(s_j - s_k) + 2\widetilde{h}_{jk} \right\} = y(s_j), \quad j = \overline{-n,n},$$

где $g(\sigma) = \ln|\sin\frac{\sigma}{2}|$; $h_{jk} = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} h(s_j,\sigma) e^{ik\sigma} d\sigma$; $\widetilde{h}_{jk} = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} h(s_j,\sigma) D_n(s - s_k) d\sigma$.

Каждая из приведенных выше СЛАУ метода коллокаций в операторном виде может быть представлена [2] с помощью уравнения

$$A_n x_n \equiv \mathcal{L}_{n,\omega} A x_n = \mathcal{L}_{n,\omega} y \quad (x_n \in X_n, \quad \mathcal{L}_{n,\omega} y \in Y_n),$$

которое в силу свойств операторов $S : X_n \to Y_n$ и $\mathcal{L}_{n,\omega} : Y \to Y_n$ эквивалентно уравнению

$$A_n x_n \equiv S x_n + \mathcal{L}_{n,\omega} R x_n = \mathcal{L}_{n,\omega} y \quad (x_n \in X_n, \quad \mathcal{L}_{n,\omega} \in Y_n).$$

Теорема 7. *Пусть ядро $h(s,\sigma)$ таково, что оператор $R : Z \to W^1 Z$ вполне непрерывен, а точное решение исходного с. с. и. у. x^* принадлежит Z^α $(1 < \alpha \le 2)$. Тогда метод коллокаций сходится со скоростью*

$$\|x^* - x_n^*\|_Z = O\left(\frac{\ln n}{n^{\alpha-1}}\right).$$

3.3. *Метод вырожденных ядер.* Следуя [2], регулярное ядро $h(s,\sigma)$ в с.с.и.у. (3) заменим аппроксимирующим вырожденным ядром

$$h_N(s,\sigma) = \sum_{k=1}^{N} a_k(s) b_k(\sigma), \quad N \in \mathbb{N},$$

где $\{a_k\}_{k=\overline{1,N}} \subset W^1 Z$ и $\{b_k\}_{k=\overline{1,N}} \subset C_{2\pi}$ — некоторые системы функций, хотя бы одна из которых линейно независима. Тогда получим уравнение метода вырожденных ядер

$$A_N x \equiv S x + R_N x = y \quad (x \in Z, \quad y \in W^1 Z), \tag{8}$$

$$R_N x \equiv \rho h_N x, \quad \rho\varphi = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \varphi(\sigma) d\sigma.$$

Решение уравнения (8) в случае его существования будем определять по формуле

$$x_N^*(s) = S^{-1}(y;s) - \sum_{k=1}^{N} \alpha_k^* S^{-1}(a_k;s), \tag{9}$$

где $\{\alpha_k^*\}_{k=\overline{1,N}}$ — решение системы линейных алгебраических уравнений

$$\alpha_j + \sum_{k=1}^{N} a_{jk}\alpha_k = y_j, \quad j=\overline{1,N}, \tag{10}$$

$$a_{jk} = \int_0^{2\pi} S^{-1}(a_k;s)b_j(s)ds; \quad y_j = \int_0^{2\pi} y(s)b_j(s)ds.$$

Следующая теорема устанавливает сходимость этой схемы для некоторого аппроксимирующего ядра $h_N(s,\sigma)$, а ее следствия дают оценки сходимости метода в случае конкретного выбора $h_N(s,\sigma)$.

Теорема 8. *Пусть* $h'_s(s,\sigma) \in Z$ *по переменной* s *равномерно относительно* σ, $a'_k(s) \in Z$, $k=\overline{1,N}$, *и*

$$\varepsilon_N \equiv \|h - h_N\|_{W^1Z\otimes C_{2\pi}} \to 0 \quad (N\to\infty),$$

где $\|\varphi\|_{W^1Z\otimes C_{2\pi}} = \max\limits_{s,\sigma}|\varphi(s,\sigma)| + \sup\limits_{s,\sigma,h>0} \frac{|\varphi(s+h,\sigma)-2\varphi(s,\sigma)+\varphi(s-h,\sigma)|}{h}$. *Тогда при всех* N, *хотя бы достаточно больших, система* (10) *имеет единственное решение* $\{\alpha_k^*\}_{k=\overline{1,N}}$ *и приближенные решения* (9) *сходятся к точному решению* $x^*(s)$ *со скоростью*

$$\|x^* - x_N^*\|_X = O(\varepsilon_N).$$

Следствие 1. Пусть $h(s,\sigma)$ непрерывна по переменной σ и $h'_s(s,\sigma) \in W^rZ^\alpha$ $(r+\alpha>1)$ по переменной s равномерно относительно σ; $h_N = \mathcal{L}^s_{n,\omega}h$ или $h_N = \Phi^s_n h$. Тогда при всех N, хотя бы достаточно больших, система (10) имеет единственное решение $\{\alpha_k^*\}_{k=\overline{1,N}}$ и приближенные решения (9) сходятся к точному решению $x^*(s)$ со скоростью

$$\|x^* - x_N^*\|_Z = O\left(\frac{\ln n}{n^{r+\alpha-1}}\right).$$

Следствие 2. Пусть $h'_s(s,\sigma) \in Z$ по переменной s и $h(s,\sigma) \in W^rZ^\alpha$ по переменной σ равномерно относительно s; $h_N = \mathcal{L}^\sigma_{n,\omega}h$ или $h_N = \Phi^\sigma_n h$. Тогда при всех N, хотя бы достаточно больших, система (10) имеет единственное решение $\{\alpha_k^*\}_{k=\overline{1,N}}$ и приближенные решения (9) сходятся к точному решению $x^*(s)$ со скоростью

$$\|x^* - x_N^*\|_Z = O\left(\frac{\ln n}{n^{r+\alpha}}\right).$$

Следствие 3. Пусть $h(s,\sigma) \in W^rZ^\alpha$ по переменной σ равномерно относительно s и $h'_s(s,\sigma) \in W^rZ^\alpha$ $(r+\alpha>1)$ по переменной s равномерно относительно σ; $h_N = \mathcal{L}^s_{n,\omega}(\mathcal{L}^\sigma_{n,\omega}h)$ или $h_N = \Phi^s_n(\Phi^\sigma_n h)$. Тогда при всех N, хотя бы достаточно больших, система (10) имеет единственное решение $\{\alpha_k^*\}_{k=\overline{1,N}}$ и приближенные решения (9) сходятся к точному решению $x^*(s)$ со скоростью

$$\|x^* - x_N^*\|_Z = O\left(\frac{\ln n}{n^{r+\alpha-1}}\right).$$

3.4. *Метод механических квадратур.* Приближенное решение с. с. и. у. (3) будем искать в виде тригонометрического полинома (6). Неизвестные коэффициенты $\{\alpha_k\}_{k=\overline{-n,n}}$ определим как решение СЛАУ (напр., [4])

$$\sum_{k=-n}^{n} \alpha_k \left\{ c_k(g)e^{iks_j} + \frac{1}{N}\sum_{l=-n}^{n} h(s_j,s_l)e^{iks_l} \right\} = y(s_j), \quad j=\overline{1,N}, \quad N=2n+1. \tag{11}$$

Обозначим через $\mathcal{L}_{n,\omega}^{\sigma}$ тригонометрический оператор Лагранжа $\mathcal{L}_{n,\omega}$, определенный формулой (1), который применен по переменной σ. Тогда СЛАУ (11) метода механических квадратур эквивалентна [2] операторному уравнению (5), где

$$S_n x_n = \mathcal{L}_{n,\omega} S x_n = S x_n; \quad y_n = \mathcal{L}_{n,\omega} y; \quad R_n x_n = \mathcal{L}_{n,\omega}[\rho \mathcal{L}_{n,\omega}^{\sigma}(h x_n)].$$

Следовательно, уравнение (5) сводится к

$$A_n x_n \equiv S x_n + \mathcal{L}_{n,\omega}(\rho \mathcal{L}_{n,\omega}^{\sigma}(h x_n)) = \mathcal{L}_{n,\omega} y \quad (x_n \in X_n, \ \ \mathcal{L}_{n,\omega} y \in Y_n). \tag{12}$$

Теорема 9. *Пусть ядро $h(s,\sigma) \in W^{r+1}Z^{\alpha}$ по каждой переменной равномерно относительно другой и правая часть $y(s)$ принадлежит пространству $W^{r+1}Z^{\alpha}$, $0 < \alpha \leq 1$, $r \geq 0$. Тогда при всех $n \geq n_0$ уравнение* (12) *имеет единственное решение $x_n^*(\sigma)$, которое сходится к точному решению $x^*(\sigma)$ с. с. и. у.* (3) *со скоростью*

$$\|x^* - x_n^*\|_Z = O\left\{\frac{\ln n}{n^{r+\alpha-1}}\right\}, \quad r + \alpha > 1.$$

Литература

1. Зигмунд А. *Тригонометрические ряды.* Т. 2. – М.: Мир, 1965. – 538 с.
2. Габдулхаев Б.Г. *Прямые методы решения сингулярных интегральных уравнений первого рода.* – Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 1994. – 288 с.
3. Канторович Л.В., Акилов Г.П. *Функциональный анализ в нормированных пространствах.* – М.: Физматгиз, 1959. – 684 с.
4. Панасюк В.В., Саврук М.П., Назарчук З.Т. *Метод сингулярных интегральных уравнений в двумерных задачах дифракции.* – Киев: Наук. думка, 1984. – 344 с.

Казанский государственный
университет

Поступили
полный текст 16.10.2002
краткое сообщение 11.12.2002