1. При каких значениях λ ранг матрицы $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ \lambda & -2 & -6 \\ 1 & \lambda & 15 \end{pmatrix}$ равен двум?

Решение:

Ранг матрицы равен порядку базисного минора. Поскольку требуется, чтобы ранг матрицы был равен двум, то базисным должен быть какой-либо минор второго порядка, например, $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 15 \end{vmatrix}$. Но тогда минор третьего порядка (определитель матрицы) должен быть равен нулю, т.е.

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ \lambda & -2 & -6 \\ 1 & \lambda & 15 \end{vmatrix} = 0$$

$$2 \cdot (-2) \cdot 15 - 6 \cdot 1 \cdot 1 + 3 \cdot \lambda \cdot \lambda - 1 \cdot (-2) \cdot 3 - 1 \cdot 15 \cdot \lambda - 2 \cdot (-6) \cdot \lambda = 0$$

$$3\lambda^2 - 3\lambda - 60 = 0$$

$$\lambda^2 - \lambda - 20 = 0$$

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = 1 \\ \lambda_1 \cdot \lambda_2 = -20 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 5 \\ \lambda_2 = -4 \end{cases}$$

Таким образом, при $\lambda_1 = 5$, $\lambda_2 = -4$ ранг матрицы будет равен двум.

2. Методом обратной матрицы решить систему уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 - x_2 - 2x_3 = 5 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = -3 \end{cases}$$

Решение:

Запишем систему в матричном виде:

$AX = B$, где

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$ – матрица коэффициентов при неизвестных

$$B = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix}$$ – вектор-столбец свободных членов

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$ – вектор-столбец свободных членов

Тогда $A^{-1}AX = A^{-1}B \Rightarrow EX = A^{-1}B \Rightarrow X = A^{-1}B$, т.е. для решения системы необходимо найти матрицу, обратную матрице A.

Вычислим определитель матрицы A:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \\ 2 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-1) \cdot 3 - 2 \cdot 1 \cdot 2 + 1 \cdot 2 \cdot 1 - 2 \cdot (-1) \cdot 1 - 1 \cdot 1 \cdot 3 - 2 \cdot 2 \cdot (-2) =$$
$$= -6 - 4 + 2 + 2 - 3 + 8 = -1$$

Поскольку $\Delta = -1 \neq 0$, то обратная матрица существует.

Транспонируем матрицу :

$$A' = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

Найдем алгебраические дополнения элементов транспонированной матрицы:

$$A'_{11} = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = -3 - (-4) = 1$$

$$A'_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -(3 - 2) = -1$$

$$A'_{13} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -2 - (-1) = -1$$

$$A'_{21} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = -(3 - (-4)) = -7$$

$$A'_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 6 - 2 = 4$$

$$A'_{23} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -(-4 - 1) = 5$$

$$A'_{31} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 2 - (-2) = 4$$

$$A'_{32} = -\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -(4 - 2) = -2$$

$$A'_{33} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 - 1 = -3$$

Запишем союзную матрицу:

$$A^* = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -7 & 4 & 5 \\ 4 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

Тогда

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta} \cdot A^* = -1 \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -7 & 4 & 5 \\ 4 & -2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 7 & -4 & -5 \\ -4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Найдем решение системы:

$$X=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 1\\ 7 & -4 & -5\\ -4 & 2 & 3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\ 5\\ -3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\cdot 1+1\cdot 5+1\cdot(-3)\\ 7\cdot 1-4\cdot 5-5\cdot(-3)\\ -4\cdot 1+2\cdot 5+3\cdot(-3)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1+5-3\\ 7-20+15\\ -4+10-9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 2\\ -3\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases}x_1=1\\ x_2=2\\ x_3=-3\end{cases}$$

Для проверки правильности найденного решения подставим полученные значения в исходную систему:

$$\begin{cases}2x_1+x_2+x_3=2+2-3=1\\ x_1-x_2-2x_3=1-2+6=5\\ 2x_1+2x_2+3x_3=2+4-9=-3\end{cases}$$

Поскольку при подстановке все уравнения системы обратились в тождества, то решение найдено верно.

$$\begin{cases}x_1=1\\ x_2=2\\ x_3=-3\end{cases}$$

3. Методом Гаусса решить систему уравнений

$$\begin{cases}2x_1-3x_2-x_3-9x_4=-7\\ 3x_1+2x_2-8x_3-7x_4=-17\\ x_1+2x_2-4x_3-x_4=-7\\ 4x_1+7x_2-15x_3-5x_4=-27\end{cases}$$

Найти одно из ее базисных решений.

Решение:

Прямой ход метода Гаусса:

Запишем расширенную матрицу системы и путем эквивалентных преобразований приведем ее к ступенчатому виду:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -3 & -1 & -9 & -7 \\ 3 & 2 & -8 & -7 & -17 \\ 1 & 2 & -4 & -1 & -7 \\ 4 & 7 & -15 & -5 & -27 \end{array}\right) \sim$$

Поменяем местами первую и третью строки:

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -4 & -1 & -7 \\ 3 & 2 & -8 & -7 & -17 \\ 2 & -3 & -1 & -9 & -7 \\ 4 & 7 & -15 & -5 & -27 \end{array}\right) \sim$$

Элементы первой строки умножим на (-3) и прибавим их к соответствующим элементам второй строки. Элементы первой строки умножим на (-2) и прибавим их к соответствующим элементам третьей строки. Элементы первой строки умножим на (-4) и прибавим их к соответствующим элементам четвертой строки:

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -4 & -1 & -7 \\ 0 & -4 & 4 & -4 & 4 \\ 0 & -7 & 7 & -7 & 7 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \sim$$

Поскольку втора, третья и четвертая строки пропорциональны, то удалим две из них, например, вторую и третью:

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -4 & -1 & -7 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \sim$$

Элементы второй строки разделим на (-1):

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -4 & -1 & -7 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

Обратный ход метода Гаусса:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 4x_3 - x_4 = -7 \\ x_2 - x_3 + x_4 = -1 \\ x_3, x_4 - \textit{любые} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 4x_3 - x_4 = -7 \\ x_2 = x_3 - x_4 - 1 \\ x_3, x_4 - \textit{любые} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = -2x_2 + 4x_3 + x_4 - 7 = 2x_3 + 3x_4 - 5 \\ x_2 = x_3 - x_4 - 1 \\ x_3, x_4 - \textit{любые} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = 2x_3 + 3x_4 - 5 \\ x_2 = x_3 - x_4 - 1 \\ x_3, x_4 - \textit{любые} \end{cases}$$ – общее решение системы

Положим $x_3 = 3$, $x_4 = 0$, тогда получим базисное решение:

$$\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 2 \\ x_3 = 3 \\ x_4 = 0 \end{cases}$$

Выполним проверку для найденного базисного решения. Для этого полученные значения подставим в исходную систему:

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 - x_3 - 9x_4 = 2 - 6 - 3 + 0 = -7 \\ 3x_1 + 2x_2 - 8x_3 - 7x_4 = 3 + 4 - 24 + 0 = -17 \\ x_1 + 2x_2 - 4x_3 - x_4 = 1 + 4 - 12 - 0 = -7 \\ 4x_1 + 7x_2 - 15x_3 - 5x_4 = 4 + 14 - 45 - 0 = -27 \end{cases}$$

Поскольку при подстановке все уравнения обратились в тождества, то базисное решение найдено верно:

$$\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 2 \\ x_3 = 3 \\ x_4 = 0 \end{cases}$$

4. При каком значении параметра α векторы $\vec{p} = \{1; -2; 1\}$, $\vec{q} = \{-3; 1; 0\}$, $\vec{r} = \{\alpha; 5; -2\}$ будут линейно зависимыми?

Решение:

Векторы будут линейно зависимыми, если определитель, составленный из их координат будет отличен от нуля.

Составим определитель из координат данных векторов и выясним, при каких значениях параметра α он будет равен нулю:

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -3 & 1 & 0 \\ \alpha & 5 & -2 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot (-2) - 2 \cdot 0 \cdot \alpha - 3 \cdot 5 \cdot 1 - \alpha \cdot 1 \cdot 1 - 0 \cdot 1 \cdot 5 - (-2) \cdot (-2) \cdot (-3) =$$

$$= -2 - 15 - \alpha + 12 = -5 - \alpha$$

$$-5 - \alpha = 0 \Rightarrow \alpha = -5$$

Таким образом, при всех значениях параметра, кроме $\alpha = -5$, векторы будут линейно зависимыми..

Выполнить действия:

а) $$3 * \begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 5 & 5 & -3 \end{pmatrix} - 2 * \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 7 & 5 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 15 & 21 \\ 15 & 15 & -9 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 10 \\ 14 & 10 \\ 4 & -6 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 6 & 15 & 21 \\ 15 & 15 & -9 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 14 & 4 \\ 10 & 10 & -6 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 6 & 15 & 21 \\ 15 & 15 & -9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 & -14 & -4 \\ -10 & -10 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 17 \\ 5 & 5 & -3 \end{pmatrix}$$

б) $$\begin{pmatrix} 2 & -5 & 2 \\ -3 & 1 & 7 \\ -5 & 7 & 3 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 7 & 5 \\ 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14-10-2 & 10-5 \\ -21+2-7 & -15+1 \\ -35+14-3 & -25+7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -26 & -14 \\ -24 & -18 \end{pmatrix}$$

Задание № 2

Вычислить определитель двумя способами:

а) способом Крамера $\Delta = \begin{vmatrix} 6 & 2 & 5 \\ 5 & 2 & 4 \\ 3 & 7 & 3 \end{vmatrix} = 12 * 3 + 25 * 7 + 24 - 30 - 24 * 7 - 30 =$

$$= 36 + 25 * 7 - 6 - 24 * 7 - 30 = 6 + 25 * 7 - 6 - 24 * 7 = 175 - 168 = 7$$

б) разложением по строке $\Delta = \begin{vmatrix} 6 & 2 & 5 \\ 5 & 2 & 4 \\ 3 & 7 & 3 \end{vmatrix} = 6 * \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 7 & 3 \end{vmatrix} - 2 * \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} + 5 * \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} =$

$$= 6*(6-28) - 2*(15-12) + 5*(35-6) = -132 - 6 + 145 = -6 + 13 = 7$$

Задание № 3

Решить систему методом Гаусса:

$$\begin{cases} 7x_1 + 2x_2 - 3x_3 = -18 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 24 \\ 5x_1 - x_2 - 2x_3 = -17 /* 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 7x_1 + 2x_2 - 3x_3 = -18 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 24 \\ 10x_1 - 2x_2 - 4x_3 = -34 \end{cases}$$

сложу третью строку с первой строкой системы и получу:

$$\begin{cases} 17x_1 - 7x_3 = -52 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 24 \\ 10x_1 - 2x_2 - 4x_3 = -34 \end{cases}$$ сложу третью строку системы со второй и получу:

$$\begin{cases} 17x_1 - 7x_3 = -52 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 24 \\ 12x_1 + x_2 = -10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 17x_1 - 7x_3 = -52 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 24 \\ x_2 = -10 - 12x_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 17x_1 - 7x_3 = -52 /* 4 \\ -34x_1 + 4x_3 = 54 /* 7 \\ x_2 = -10 - 12x_1 \end{cases}$$

получим $\begin{cases} 68x_1 - 28x_3 = -208 \\ -238x_1 + 28x_3 = 378 \\ x_2 = -10 - 12x_1 \end{cases}$ сложим первую и вторую строку и избавимся от переменной x_3, затем получим: $\begin{cases} -170x_1 = 170 \\ -238x_1 + 28x_3 = 378 \\ x_2 = -10 - 12x_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -1 \\ x_3 = 5 \\ x_2 = 2 \end{cases}$

проверка: $\begin{cases} 7x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 18 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 24 \\ 5x_1 - x_2 - 2x_3 = -17 \end{cases} \begin{cases} 7 * (-1) + 2 * 2 - 3 * 5 = -18 \\ 2 * (-1) + 3 * 2 + 4 * 5 = 24 \\ 5 * (-1) - 2 - 2 * 5 = -17 \end{cases} \begin{cases} -18 = -18 \\ 24 = 24 \\ -17 = -17 \end{cases}$

Задание № 4

Найти обратную матрицу и проверить результат:

а) А=$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}$ найдем оределитель матрицы Δ=$\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -5 & 1 \end{vmatrix} = 8$, определитель матрицы не равен нулю, следовательно матрица невырожденная

A_{11}=1 A_{12}=5

A_{21}=-1 A_{22}=3 $\overline{A} = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta} * \left(\overline{A}\right)^T$$

$$A^{-1} = \frac{1}{8} * \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{8} & -\frac{1}{8} \\ \frac{5}{8} & \frac{3}{8} \end{pmatrix}$$

Проверка

$$A*A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -5 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} \frac{1}{8} & -\frac{1}{8} \\ \frac{5}{8} & \frac{3}{8} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{8} + \frac{5}{8} & -\frac{3}{8} + \frac{3}{8} \\ -\frac{5}{8} + \frac{5}{8} & \frac{5}{8} + \frac{3}{8} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

б) $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 5 & 10 & 5 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ $\Delta =$

$$3 * \begin{vmatrix} 10 & 5 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 4 * \begin{vmatrix} 5 & 5 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 2 * \begin{vmatrix} 5 & 10 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 3 * (10 - 5) - 4 * (5 - 5) + 2 * (5 - 10) = 10 - 5 = 5$$

определитель матрицы не равен нулю, следовательно данная матрица невырожденная

$A = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -5 \\ -5 & 1 & 10 \end{pmatrix}$ по формуле $A^{-1} = \frac{1}{\Delta} * \left(\overline{A}\right)$, следовательно

$$A^{-1} = 1/5 * \begin{pmatrix} 5 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -5 \\ -5 & 1 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2/5 & 0 \\ 0 & 1/5 & -1 \\ -1 & 1/5 & 2 \end{pmatrix}$$

проверка

$$A^{-1}*A = \begin{pmatrix} 1 & -2/5 & 0 \\ 0 & 1/5 & -1 \\ -1 & 1/5 & 2 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 5 & 10 & 5 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 + (-2) + 0 & 4 - 4 + 0 & -3 + 1 + 2 \\ 0 + 1 + (-1) & 0 + 2 - 1 & -4 + 2 + 2 \\ -3 + 1 + 2 & 0 + 1 - 1 & -2 + 1 + 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Задание № 5

Задача баланса: договор о взаимных услугах трех фирм

Производство услуг	Потребление услуг			Конечный продукт
	$Ф_1$	$Ф_2$	$Ф_3$	
$Ф_1$	-	32%	-	68
$Ф_2$	15%	20%	20%	38
$Ф_3$	40%	30%	20%	38

а) требуется составить систему уравнений баланса;

б) найти валовые обороты x_1, x_2, x_3;

в) составить балансовую таблицу

Решение

а) $\begin{cases} 0{,}32x_2 = 68 \\ 0{,}15x_1 + 0{,}2x_2 + 0{,}2x_3 = 38 \\ 0{,}4x_1 + 0{,}3x_2 + 0{,}2x_3 = 38 \end{cases}$

б) $E - A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0{,}32 & 0 \\ 0{,}15 & 0{,}2 & 0{,}2 \\ 0{,}4 & 0{,}3 & 0{,}2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -0{,}32 & 0 \\ -0{,}15 & 0{,}8 & -0{,}2 \\ -0{,}4 & -0{,}3 & 0{,}8 \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} x_1 - 0{,}32x_2 = 68 \\ -0{,}15x_1 + 0{,}8x_2 - 0{,}2x_3 = 38 /* 4 \\ -0{,}4x_1 - 0{,}3x_2 + 0{,}8x_3 = 38 \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 - 0{,}32x_2 = 68 \\ -0{,}6x_1 + 3{,}2x_2 - 0{,}8x_3 = 152 \\ -0{,}4x_1 - 0{,}3x_2 + 0{,}8x_3 = 38 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 - 0{,}32x_2 = 68 \\ -0{,}6x_1 - 0{,}4x_1 + 3{,}2x_2 - 0{,}3x_2 - 0{,}8x_3 + 08x_3 = 152 + 38 \\ -0{,}4x_1 - 0{,}3x_2 + 0{,}8x_3 = 38 \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 - 0{,}32x_2 = 68 \\ -x_1 + 2{,}9x_2 = 190 \\ -0{,}4x_1 - 0{,}3x_2 + 0{,}8x_3 = 38 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 - x_1 - 0{,}32x_2 + 2{,}9x_2 = 68 + 190 \\ -x_1 + 2{,}9x_2 = 190 \\ -0{,}4x_1 - 0{,}3x_2 + 0{,}8x_3 = 38 \end{cases} \quad \begin{cases} 2{,}58x_2 = 258 \\ -x_1 + 2{,}9x_2 = 190 \\ -0{,}4x_1 - 0{,}3x_2 + 0{,}8x_3 = 38 \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = 100 \\ -x_1 + 290 = 190 \\ -0{,}4x_1 - 0{,}3x_2 + 0{,}8x_3 = 38 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_2 = 100 \\ x_1 = 100 \\ -40 - 30 + 0{,}8x_3 = 38 \end{cases} \quad \begin{matrix} x_1 = 100; \\ x_2 = 100; \\ x_3 = 135 \end{matrix}$$

в)

Производство услуг	Потребление услуг			Y_i	X_i
	$Ф_1$	$Ф_2$	$Ф_3$		
$Ф_1$	0	32	0	68	100
$Ф_2$	15	20	27	38	100

$Ф_3$	40	30	27	38	135
Остаток	45	18	81	144	
Xj	100	100	135		

Задание № 6

Вычислить пределы:

а)

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+2n+5}-\sqrt{n^2-5n+2}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{n^2+2n+5}-\sqrt{n^2-5n+2}\right)\left(\sqrt{n^2+2n+5}+\sqrt{n^2-5n+2}\right)}{\sqrt{n^2+2n+5}+\sqrt{n^2-5n+2}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+2n+5-\left(n^2-5n+2\right)}{\sqrt{n^2+2n+5}+\sqrt{n^2-5n+2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2-n^2+2n+5n+5-2}{\sqrt{n^2+2n+5}+\sqrt{n^2-5n+2}}=$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{7n+3}{\sqrt{n^2+2n+5}+\sqrt{n^2-5n+2}}\quad\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{7+\frac{3}{n}}{\sqrt{1+\frac{2}{n}+\frac{5}{n^2}}+\sqrt{1-\frac{5}{n}+\frac{2}{n^2}}}=\frac{7+0}{1+1}=\frac{7}{2}=3{,}5$$

б)

$$\lim_{x\to5}\frac{\sqrt{6(x+1)}-6}{2x^2-9x-5}\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to5}\frac{(\sqrt{6(x+1)}-6)*(\sqrt{6(x+1)}+6)}{(\sqrt{6(x+1)}+6)*(2x^2-9x-5)}\quad 2x^2-9x-5=0\quad \begin{array}{l}x_1=5\\ x_1x_2=\frac{c}{a}=\frac{-5}{2}\end{array}$$

$$x_2=-\frac{5}{10}=-\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to 5}\frac{6x-30}{(\sqrt{6(x+1)}+6)*2(x-5)(x+\frac{1}{2})}=\lim_{x\to 5}\frac{6(x-5)}{(\sqrt{6(x+1)}+6)*2(x-5)(x+\frac{1}{2})}=\lim_{x\to 5}\frac{6}{2(\sqrt{6(x+1)}+6)*(x+\frac{1}{2})}$$

при x=5 $\frac{3}{(6+6)*5{,}5}=\frac{3}{12*5{,}5}=\frac{1}{4*5{,}5}=\frac{1}{22}$

в)

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{5n-2}{5n+5}\right)^{\left[\frac{8n+5}{5}\right]}\left(1^{\infty}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{5n-2}{5n+5}-1\right)^{\left[\frac{8n+5}{5}\right]}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{5n-2-5n-5}{5n+5}\right)^{\left[\frac{8n+5}{5}\right]}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{-7}{5n+5}\right)^{\left[\frac{8n+5}{5}\right]}=\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{-7}{5n+5}\right)^{\left[\frac{5n+5}{-7}\right]}\right]^{\left[\frac{8n+5}{5}*\frac{-7}{5n+5}\right]}=\lim_{n\to\infty}\ell^{\left[\frac{-7(8n+5)}{5(5n+5)}\right]}=\ell^{\left[\lim_{n\to\infty}\frac{(-56n-35)/n}{(25n+25)/n}\right]}=$$

$$=\ell^{\left[\lim_{n\to\infty}\frac{-56-\frac{35}{n}}{25+\frac{25}{n}}\right]}=\ell^{-\frac{56}{25}}$$

Задание № 7

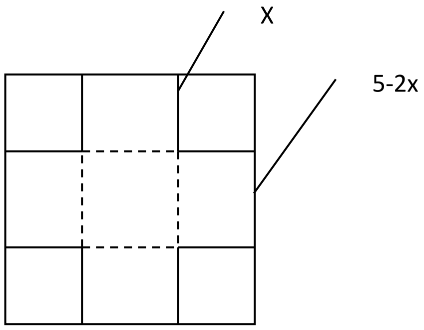
Найти производную:

а) $y=\ell^{\left[\frac{1}{5x+3}\right]}$

$$y'=\left(\ell^{\left[\frac{1}{5x+3}\right]}\right)'=\ell^{\left[\frac{1}{5x+3}\right]}*\left(\frac{1}{5x+3}\right)'=\ell^{\left[\frac{1}{5x+3}\right]}*\left((5x+3)^{-1}\right)'=\ell^{\left[\frac{1}{5x+3}\right]}*(-1)(5x+3)^{-2}(5x+3)'=$$

$$= \ell^{\left[\frac{1}{5x+3}\right]} * (-5)(5x+3)^{-2} = -\frac{5\ell^{\left[\frac{1}{5x+3}\right]}}{(5x+3)^2}$$

б) Из квадратного листа со стороной 5 изготавливается коробка без верха. Найти наибольший объем коробки и соответствующие ему размеры.



$V=(5-2x)^2x$

$x \neq 0$

$5 - 2x \neq 0 \Rightarrow x \neq 2{,}5$

$0<x<21/2$

Решение

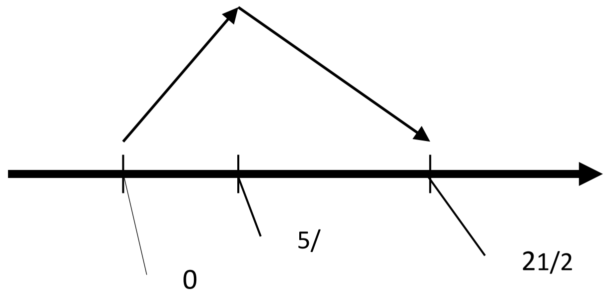
$$y' = ((5-2x)^2 x)' = ((5-2x)^2)' x + (5-2x)^2 x' = 2x(5-2x)(5-2x)' + (5-2x)^2 = -4x(5-2x) + (5-2x)^2 =$$
$$= (-4x + (5-2x)) * (5-2x) = (-4x + 5 - 2x) * (5-2x) = (-6x+5) * (5-2x)$$

$$(-6x+5) * (5-2x) = 0$$

$-6x + 5 = 0$ $5 - 2x = 0$

$-6x = -5$ $x_2 = \frac{5}{2} = 2\frac{1}{2}$

$x_1 = \frac{5}{6}$



$$V_{\max} = \left(5 - 2 * \frac{5}{6}\right)^2 * \frac{5}{6} = \left(5 - \frac{10}{6}\right)^2 * \frac{5}{6} = \left(5 - \frac{5}{3}\right)^2 * \frac{5}{6} = \left(\frac{15-5}{3}\right)^2 * \frac{5}{6} = \frac{500}{54} = 9\frac{7}{27}$$

$5 - 2 * \frac{5}{6} = 5 - \frac{10}{6} = \frac{30-10}{6} = \frac{20}{6} = \frac{10}{3} = 3\frac{1}{3}$ - сторона основания коробки

$x = h = \frac{5}{6}$ - высота коробки

5. Определить вид и расположение кривой второго порядка $x^2-2x-2y-3=0$, приведя ее уравнение к каноническому виду. Составить уравнение прямой, проходящей через вершину кривой второго порядка параллельно прямой $x+2y-2=0$. Сделать чертеж.

Решение:

Запишем уравнение кривой второго порядка в каноническом виде, для чего выделим в нем полные квадраты:

$$x^2-2x-2y-3=0$$
$$\left(x^2-2\cdot x\cdot 1+1\right)-1-2y-3=0$$
$$(x-1)^2=2y+4$$
$$y+2=\frac{1}{2}\cdot(x-1)^2$$

$y+2=2\cdot\frac{1}{4}\cdot(x-1)^2$ – каноническое уравнение параболы с вершиной в точке $C(1;-2)$ и параметром $p=\frac{1}{4}$

Запишем уравнение прямой $x+2y-2=0$ в параметрическом виде:

$$\begin{cases}x=t\\2-2y=t\end{cases}\Rightarrow x=2-2y\Leftrightarrow\frac{x}{1}=\frac{y-1}{-\frac{1}{2}}$$

Тогда направляющий вектор данной прямой $\vec{s}=\left(1;-\frac{1}{2}\right)$.

Поскольку искомая прямая должна быть параллельна данной, то их направляющие векторы совпадают. Тогда уравнение искомой прямой запишем как уравнение прямой, проходящей через заданную точку параллельно заданному вектору:

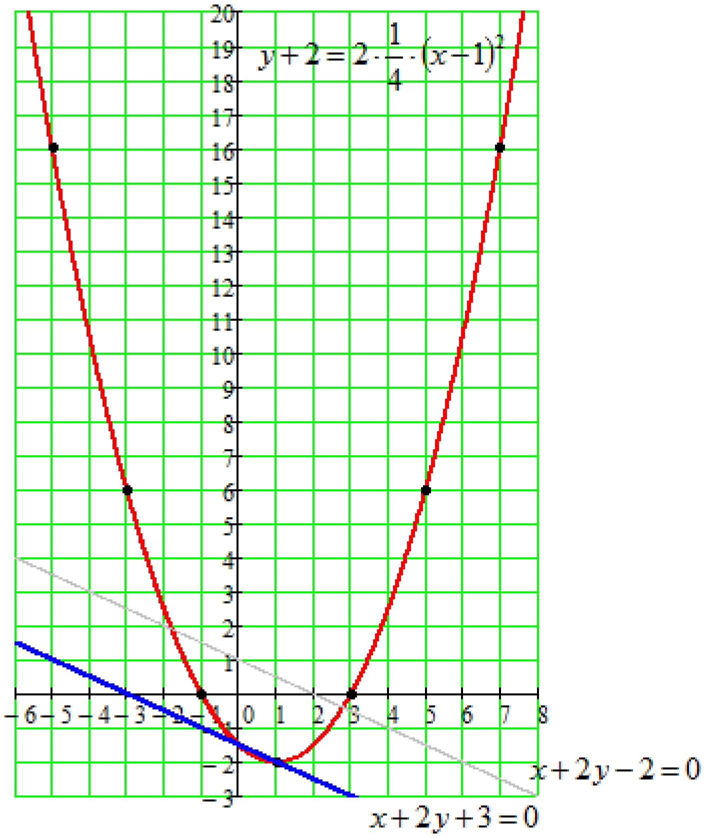
$\frac{x-1}{1}=\frac{y+2}{-\frac{1}{2}}$ – каноническое уравнение искомой прямой

$$x-1=-2y-4$$

$x + 2y + 3 = 0$ – уравнение искомой прямой в общем виде

Сделаем чертеж. Для построения параболы заполним таблицу значений:

x	-5	-3	-1	1	3	5	7
y	16	6	0	-2	0	6	16



6. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $A(1;-2;3)$ и параллельной плоскости $x - y + 3z - 4 = 0$.

Решение:

Поскольку искомая плоскость должна быть параллельна плоскости $x - y + 3z - 4 = 0$,то в качестве вектора нормали искомой плоскости можно взять вектор нормали данной плоскости, т.е. $\vec{n} = \{1; -1; 3\}$.

Тогда уравнение искомой плоскости запишем в виде:

$1 \cdot (x - 1) - 1 \cdot (y + 2) + 3 \cdot (z - 3) = 0$

$x - y + 3z - 12 = 0$ – искомое уравнение плоскости.