ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1998 МАТЕМАТИКА № 6 (433)

УДК 514.763

Б.А. РОЗЕНФЕЛЬД

ТЕОРЕТИКО-ГРУППОВОЙ СМЫСЛ ПРОСТРАНСТВ НЕЙФЕЛЬДА

В работе [1] Э.Г. Нейфельдом были рассмотрены многообразия плоских образующих максимальной размерности вещественной квадрики проективного пространства P^{2n-1} и нуль-плоскостей максимальной размерности линейного комплекса того же пространства, а в [2] — многообразия плоских образующих максимальной размерности эрмитовой квадрики ("эрмиквадрики") комплексного проективного пространства $\mathbb{C}P^{2n-1}$ (в [2] это многообразие называется "пенроузианом" на том основании, что Р. Пенроуз в своей "Твисторной программе" [3] рассматривал частный случай этого многообразия для $n = 2$; заметим, это многообразие можно рассматривать так же, как многообразие нуль-плоскостей максимальной размерности эрмитова линейного комплекса того же пространства). Заметив большое сходство этих многообразий с проективным пространством P^n и с многообразиями m-мерных плоскостей этого пространства ("грассмановым многообразием" или "грассманианом"), Э.Г. Нейфельд обобщает на эти многообразия метод нормализации А.П. Нордена и строит дифференциальную геометрию этих многообразий. Так как согласно "Твисторной программе" Р. Пенроуза прямолинейные образующие эрмитовой квадрики пространства $\mathbb{C}P^3$ изображают точки псевдоконформного пространства C_1^4 и точки абсолюта пространства S_2^5 (а точки эрмитовой квадрики изображают прямолинейные образующие этого абсолюта), аналогичный метод применим и к псевдоконформным (а также к конформным) пространствам.

Суть подмеченной Э.Г. Нейфельдом аналогии состоит в том, что рассматриваемые им многообразия являются *параболическими пространствами* [4], и такими, что касательные алгебры Ли $\mathfrak{G}$ фундаментальных групп G этих пространств допускают разложение в прямую сумму $\mathfrak{G} = \mathfrak{G}_{-1} \oplus \mathfrak{G}_0 \oplus \mathfrak{G}_1$ (в общем случае касательные алгебры Ли $\mathfrak{G}$ фундаментальных групп G параболических пространств допускают разложение в прямую сумму $\mathfrak{G} = \mathfrak{G}_{-k} \oplus \cdots \oplus \mathfrak{G}_{-1} \oplus \mathfrak{G}_0 \oplus \mathfrak{G}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{G}_k$, причем прямая сумма $\mathfrak{G}_0 \oplus \mathfrak{G}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{G}_k$ является касательной алгеброй Ли параболической подгруппы H группы G, а прямую сумму $\mathfrak{G}_{-k} \oplus \cdots \oplus \mathfrak{G}_{-1}$ можно рассматривать как касательное многообразие параболического пространства G/H см. [5]). Заметим, что в случае $k = 1$ касательное подпространство $\mathfrak{G}_{-1}$ обладает структурой йордановой алгебры, в случае многообразий, рассматриваемых в [1], это йордановы алгебры кососимметричных и симметричных квадратных вещественных матриц n-го порядка, а в случае многообразий, рассматриваемых в [2], это йордановы алгебры косоэрмитовых и эрмитово-симметричных квадратных комплексных матриц n-го порядка. Аналогичная теория может быть построена для многообразия плоских образующих максимальной размерности эрмитовой квадрики кватернионного проективного пространства $\mathbb{H}P^{2n-1}$ и для многообразия нуль-плоскостей максимальной размерности эрмитова линейного комплекса того же пространства. В случае этих многообразий йордановы алгебры состоят из соответственно косоэрмитовых и эрмитово-симметричных квадратных кватернионных матриц n-го порядка.

Дифференциальная геометрия параболических пространств указанного типа рассматривалась М.А. Акивисом и В.В. Гольдбергом в [6] (проективное пространство) и [7] (конформное и псевдоконформные пространства и грассмановы многообразия). Заметим, что для конформного и псевдоконформных пространств соответственные йордановы алгебры были найдены И.И. Колокольцевой [8].

Литература

1. Нейфельд Э.Г. *О внутренних геометриях многообразия нуль-плоскостей максимальной размерности поляритетов второго порядка* // Тр. Геометрич. семин. – Казань. – 1982. – Вып. 14. – С. 50–54.
2. Нейфельд Э.Г. *О внутренних геометриях нормализованного пенроузиана* // Тр. Геометрич. семин. – Казань. – 1990. – Вып. 22. – С. 70–73.
3. Пенроуз Р. *Твисторная программа* // Твисторы и калибровочные поля. – М.: Мир, 1983. – С. 13–24.
4. Розенфельд Б.А., Замаховский М.П., Тимошенко Т.А. *Параболические пространства* // Итоги науки и техн. ВИНИТИ. Алгебра. Топология. Геометрия. – 1988. – Вып. 26. – С. 125-160.
5. Розенфельд Б.А., Степашко Т.А. *Топологическое строение многообразий образов простоты* // Тр. Геометрич. семин. – Казань. – 1982. – Вып. 14. – С. 62–69.
6. Akivis M.A., Goldberg V.V. *Projective differential geometry of submanifolds.* – Amsterdam: North Holland, 1993. – 362 c.
7. Akivis M.A., Goldberg V.V. *Conformal differential geometry and its generalizations.* – New York–Toronto: Wiley Interscience Publ., 1996.
8. Розенфельд Б.А., Выплавина Р.П., Колокольцева И.И., Малютин В.В. *Дробно-линейные преобразования йордановых алгебр* // Изв. вузов. Математика. – 1974. – № 5. – С. 169–184.

Пенсильванский университет
(*США*)

Поступила
14.01.1997