ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2000 МАТЕМАТИКА № 5 (456)

УДК 512.536

Н. КЕХАЙОПУЛУ, М. ЦИНГЕЛИС

ЗАМЕЧАНИЕ О КОНГРУЭНЦИЯХ В УПОРЯДОЧЕННЫХ ПОЛУГРУППАХ

В 1930 г. Е. Спилрайн [1] доказал, что каждый частичный порядок, заданный на непустом множестве S, может быть продолжен до линейного порядка (т. е. до цепи) на S. Его доказательство основано на лемме Цорна.

Имеет место следующий "похожий" результат о конгруэнциях для упорядоченных полугрупп: каждая конгруэнция упорядоченной полугруппы S содержится в регулярной конгруэнции S. Для получения этого результата мы не используем лемму Цорна. Для доказательства будем использовать квазицепи по модулю ρ, введенные Ксай Ксаянгяном в докторской диссертации (см. также [2]). Понятие конгруэнции упорядоченной полугруппы было введено в [3]. Оно в точности совпадает с понятием конгруэнции в (неупорядоченных) полугруппах. Понятие регулярной конгруэнции упорядоченных полугрупп было введено в [4].

Пусть S — упорядоченная полугруппа. Отношение эквивалентности σ на S называется *конгруэнцией* [5], если $(a,b) \in \sigma \to (ac,bc) \in \sigma$, $(ca,cb) \in \sigma\ \forall c \in S$.

Пусть $(S,\cdot,\leq)$ — упорядоченная полугруппа. Отношение σ на S называется *псевдопорядком*, если

1) $\leq \subseteq \sigma$;
2) $(a,b) \in \sigma$ и $(b,c) \in \sigma \to (a,c) \in \sigma$;
3) $(a,b) \in \sigma \to (ac,bc) \in \sigma$ и $(ca,cb) \in \sigma\ \forall c \in S$.

Пусть $(S,\cdot,\leq)$, $(T,*,\leq)$ — упорядоченные полугруппы, $f: S \to T$ — отображение из S в T. Отображение f называется изотонным, если $x \leq_S y$ влечет $f(x) \leq_T f(y)$. Отображение f называется гомоморфизмом, если оно изотонно и для всех $x,y \in S$ удовлетворяет следующему условию (см. [5]): $f(xy) = f(x) * f(y)$.

Пусть $(S,\cdot,\leq)$ — упорядоченная полугруппа, а ρ — конгруэнция на S. Обозначим через $*$ мультипликацию на $S/\rho = \{(a)_\rho \mid a \in S\}$ $((a)_\rho = \{x \in S \mid (x,a) \in \rho\})$, определенную равенством $(x)_\rho * (y)_\rho = (x,y)_\rho$. Тогда $(S/\rho,*)$ является полугруппой (напр., [6], определение I.5.9).

Конгруэнция ρ на S называется *регулярной* [4], если существует отношение $\preceq$ на S/ρ такое, что

1) $(S/\rho,*,\preceq)$ — упорядоченная полугруппа;
2) отображение $\pi: S \to S/\rho \mid x \to (x)_\rho$ изотонно (следовательно, оно является гомоморфизмом, т. к. $\pi(xy) = (xy)_\rho = (x)_\rho * (y)_\rho = \pi(x) * \pi(y)$).

Пусть $(S,\cdot,\leq)$ — упорядоченная полугруппа, а ρ — конгруэнция на S. Последовательность вида $(x,a_1,b_1,a_2,b_2,\dots,a_{n-1},b_{n-1},a_n,y)$ элементов S называется *квазицепью по модулю* ρ [2], если

1) $(a_1,b_1) \in \rho$, $(a_2,b_2) \in \rho, \dots, (a_{n-1},b_{n-1)} \in \rho$, $(a_n,y) \in \rho$;
2) $x \leq a_1$, $b_1 \leq a_2$, $b_2 \leq a_3, \dots, b_{n-2} \leq a_{n-1}$, $b_{n-1} \leq a_n$.

Коротко запишем
$$x \leq a_1\rho b_1 \leq a_2\rho b_2 \leq \dots \leq a_{n-1}\rho b_{n-1} \leq a_n\rho y.$$

Число n называется длиной, x, y — начальным и конечным элементами квазицепи по модулю ρ. Множество всех квазицепей по модулю ρ с x как начальным и y как конечным элементами обозначается через $\rho\mathcal{C}_{x,y}$ [2].

Лемма 1 (ср. с [5], лемма 4). *Пусть $(S,\cdot,\leq_S)$, $(T,*,\leq_T)$ — упорядоченные полугруппы, $f : S\to T$ — гомоморфизм. Отношение σ на S, определенное как $\sigma = \{(x,y)\mid f(x)\leq_T f(y)\}$, является псевдопорядком на S.*

Предложение 1. *Пусть $(S,\cdot,\leq)$ — упорядоченная полугруппа. Следующие отношения эквивалентны:*

1) *ρ — регулярная конгруэнция на S;*
2) *существует псевдопорядок σ на S такой, что $\rho = \{(x,y)\in S\times S \mid (x,y)\in\sigma$ и $(y,x)\in\sigma\}$ $(=\sigma\cap\sigma^{-1})$.*

Доказательство. 1) $\to$ 2). Пусть $\preceq$ — такое отношение на S/ρ, что $(S/\rho,*,\preceq)$ является упорядоченной полугруппой и отображение $\pi : S\to S/\rho \mid x\to (x)_\rho$ изотонно. Так как π является гомоморфизмом, то по лемме 1 следующее отношение σ на S является псевдопорядком на S: $\sigma = \{(x,y)\mid (x)_\rho\preceq (y)_\rho\}$. Имеем $\rho = \{(x,y)\in S\times S\mid (x,y)\in\sigma$ и $(y,x)\in\sigma\}$. Действительно, $(x,y)\in\rho\leftrightarrow (x)_\rho = (y)_\rho \leftrightarrow (x)_\rho\preceq (y_\rho)$ и $(y)_\rho\preceq (x)_\rho\leftrightarrow (x,y)\in\sigma$ и $(y,x)\in\sigma$.

2) $\to$ 1). Пусть σ — конгруэнция на S такая, что $\rho = \{(x,y)\in S\times S\mid (x,y)\in\sigma\&(y,x)\in\sigma\}$. Тогда ρ является конгруэнцией на S (ср. с [5], доказательство леммы 1). Более того, множество S/ρ со следующими операцией умножения $(x)_\rho*(y)_\rho = (x,y)_\rho$ и отношением $(x)_\rho\preceq(y)_\rho\leftrightarrow(x,y)\in\sigma$ является упорядоченной полугруппой (ср. с [5], доказательство леммы 1). Отображение $\pi : S\to S/\rho\mid x\to (x)_\rho$ изотонно. Действительно, пусть $a\leq b$. Так как σ является псевдопорядком на S, то имеем $\leq\subseteq\sigma$. Тогда $(a,b)\in\sigma$ и $(a)_\rho\preceq(b)_\rho$. $\square$

Лемма 2. *Пусть $(S,\cdot,\leq)$ — упорядоченная полугруппа, ρ — конгруэнция на S. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) *если $(x,y)\in\leq$, то $\rho\mathcal{C}_{x,y}\neq\varnothing$;*
2) *если $(x,y)\in\rho$, то $\rho\mathcal{C}_{x,y}\neq\varnothing$.*

Доказательство. 1) Пусть $(x,y)\in\leq$. Тогда $(y,y)\in\rho$ и $x\leq y$. Поэтому $(x,y,y)\in\rho\mathcal{C}_{x,y}$.

2) Пусть $(x,y)\in\rho$. Так как $(x,y)\in\rho$ и $x\leq x$, то имеем $(x,x,y)\in\rho\mathcal{C}_{x,y}$. $\square$

Предложение 2. *Пусть $(S,\cdot,\leq)$ — упорядоченная полугруппа, ρ — конгруэнция на S. Тогда существует такой псевдопорядок σ на S, что $\rho\subseteq\sigma\cap\sigma^{-1}$.*

Доказательство. Пусть σ — такое отношение на S, что $\sigma = \{(x,y)\rho\mathcal{C}_{x,y}\neq\varnothing\}$.

1) σ является псевдопорядком на S и, на самом деле, $\leq\subseteq\sigma$. Действительно, пусть $(x,y)\in\leq$. По утверждению 1) леммы 2 имеем $\rho\mathcal{C}_{x,y}\neq\varnothing$, поэтому $(x,y)\in\sigma$. Пусть $(x,y)\in\sigma$, $(y,z)\in\sigma$. Тогда $\rho\mathcal{C}_{x,y}\neq\varnothing$, $\rho\mathcal{C}_{y,z}\neq\varnothing$. Предположим, что

$$(x,a_1,b_1,a_2,b_2,\ldots,a_{n-1},b_{n-1},a_n,y)\in\rho\mathcal{C}_{x,y},\quad (y,s_1,t_1,s_2,t_2,\ldots,s_{m-1},t_{m-1},s_m,z)\in\rho\mathcal{C}_{y,z}.$$

Легко убедиться, что $(x,a_1,b_1,a_2,b_2,\ldots,a_{n-1},b_{n-1},a_n,y,s,t_1,s_2,t_2,\ldots,s_{m-1},t_{m-1},s_m,z)\in\rho\mathcal{C}_{x,z}$. Поскольку $\rho\mathcal{C}_{x,z}\neq\varnothing$, то имеем $(x,z)\in\sigma$. Пусть $(x,y)\in\sigma$, $z\in S$. Имеем $\rho\mathcal{C}_{x,y}\neq\varnothing$. Теперь пусть $(x,a_1,b_1,a_2,b_2,\ldots,a_{n-1},b_{n-1},a_n,y)\in\rho\mathcal{C}_{x,y}$. Тогда, т.к. $(S,\cdot,\leq)$ — упорядоченная полугруппа и ρ — конгруэнция на S, получим $(zx,za_1,zb_1,za_2,zb_2,\ldots,za_{n-1},zb_{n-1}za_n,zy)\in\rho\mathcal{C}_{zx,zy}$. Так как $\rho\mathcal{C}_{zx,zy}\neq\varnothing$, то имеем $(zx,zy)\in\sigma$. Аналогично, $(x,y)\in S$, $z\in S$ влечет $(xz,yz)\in\sigma$.

2) $\rho\subseteq\sigma\cap\sigma^{-1}$. Пусть $(x,y)\in\rho$. По утверждению 2) леммы 2 имеем $\rho\mathcal{C}_{x,y}\neq\varnothing$. Поэтому $(x,y)\in\sigma$. Так как ρ является конгруэнцией на S, то $(y,x)\in\rho$. Согласно утверждению 2) леммы 2 $\rho\mathcal{C}_{x,y}\neq\varnothing$. Тогда $(y,x)\in\sigma$ и $(x,y)\in\sigma^{-1}$. Следовательно, $(x,y)\in\sigma\cap\sigma^{-1}$. $\square$

Из предложений 1 и 2 теперь вытекает

Теорема. *Любая конгруэнция на упорядоченной полугруппе S содержится в регулярной конгруэнции на S.*

Литература

1. Szpilrajn E. *Sur l'extension de l'ordre partiel* // Fund. Math. – 1930. – V. 16. – P. 386–389.
2. Xie Xiang-Yun. *On regular, strongly regular congruences on ordered semigroups* // Semigroup Forum. – 1999. – V. 54. – P. 247–259.
3. Kehayopulu N. *Remark on ordered semigroups* // Math. Japonica. – 1990. – V. 35. – № 6. – P. 1061–1063.
4. Tsingelis M. *Contribution to the structure theory of ordered semigroups.* – Ph. D Dissertation, University of Athens, 1991.
5. Kehayopulu N., Tsingelis M. *On subdirectly irreducible ordered semigroups* // Semigroup Forum. – 1995. – V. 50. – P. 161-177.
6. Petrich M. *Introduction to Semigroups.* – Columbus, Ohio: Merrill, 1973. – 198 p.

Афинский университет
(*Греция*)

Поступила
17.09.1998