ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2000 МАТЕМАТИКА № 5 (456)

УДК 514.76:517.93

В.А. ИГОШИН

ПУЛЬВЕРИЗАЦИОННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ И ТОЧЕЧНЫЕ СИММЕТРИИ ПУЛЬВЕРИЗАЦИИ

В рамках теории пульверизационного моделирования (см. [1]–[4]) изучаются точечные инфинитезимальные симметрии пульверизации. Найдены критерии таких симметрий и получены некоторые теоремы классификации двумерных пространств аффинной связности.

1. Аффинные точечные симметрии пульверизации

Пусть $f \equiv (M, f)$ — пульверизация, т. е. квазигеодезический поток (КП) с координатным выражением $d^2x^i/dt^2 = f^i(x^j, dx^j/dt)$, в котором $f^i = -\Gamma^i_{jk}(x^l, \lambda^l)\lambda^j\lambda^k$, $1 \le i, j, k, l \le n-1 = \dim M$, $\lambda^i = dx^i/dt$, Γ^i_{jk} — однородные функции нулевой степени относительно λ.

В пространстве событий $\overline{M} = M \times R$ КП f определена стандартная связность $\overline{\Gamma}^\alpha_{\beta\gamma}(x^\delta, \dot{x}^\delta)$ КП f, $1 \le \alpha, \beta, \gamma, \delta \le n$; $x^n = t$, $\dot{x} = dx/d\tau$ (см. [4], § 1)

$$\overline{\Gamma}^i_{jk} = \Gamma^i_{jk}(x^l, \lambda^l), \quad \overline{\Gamma}^i_{\beta n} \equiv 0, \quad \overline{\Gamma}^n_{\beta\gamma} \equiv 0, \quad \overline{\Gamma}^i_{mjk} = \Gamma^i_{mjk}\dot{t}^{-1}, \quad \lambda^l = \dot{x}^l/\dot{t}. \tag{1}$$

Векторное поле $\overline{X} = X^\alpha\partial_\alpha = X^i\partial_i + X^n\partial_n$ тогда и только тогда является точечной инфинитезимальной аффинной квазисимметрией (АКС) f (см. [4], § 2), когда

$$\partial_{\beta\gamma}X^\alpha + X^\sigma\partial_\sigma\overline{\Gamma}^\alpha_{\beta\gamma} + (\partial_\beta X^\sigma)\overline{\Gamma}^\alpha_{\sigma\gamma} + (\partial_\gamma X^\sigma)\overline{\Gamma}^\alpha_{\beta\sigma} - (\partial_\sigma X^\alpha)\overline{\Gamma}^\sigma_{\beta\gamma} + \dot{x}^\sigma(\partial_\sigma X^\rho)\overline{\Gamma}^\alpha_{\rho\beta\gamma} = 0$$

или, подробнее, учитывая (1)

$$\begin{gathered}\partial_{jk}X^i + X^s\partial_s\Gamma^i_{jk} + (\partial_j X^s)\Gamma^i_{sk} + (\partial_k X^s)\Gamma^i_{js} - (\partial_s X^i)\Gamma^s_{jk} + (\partial_n X^m + \lambda^s\partial_s X^m)\Gamma^i_{mjk} = 0,\\ \partial_{jn}X^i + (\partial_n X^s)\Gamma^i_{js} = 0, \quad \partial_{nn}X^i = 0, \quad \partial_{\beta\gamma}X^n - (\partial_s X^n)\overline{\Gamma}^s_{\beta\gamma} = 0.\end{gathered} \tag{2}$$

Из (2) следует, что

$$\begin{aligned} X^i &= A^i(x^j)t + B^i(x^j);\\ X^n &= ut + v(x^j),\end{aligned} \tag{3}$$

где $A = A^i\partial_i$, $B = B^i\partial_i$ — векторные поля на M, $u = \mathrm{const}$, v — функция на M.

Из условий (2) и (3) следует

Теорема 1. *Векторное поле $\overline{X} = X^i\partial_i + X^n\partial_n$ в пространстве событий $M \times R$ пульверизации (M, f) тогда и только тогда является ее точечной инфинитезимальной АКС, когда*

$$\overline{X} = At + B + (ut + v)\partial_n,$$

где $u = \mathrm{const}$, а $A = A^i(x^j)\partial_i$, $B = B^i(x^j)\partial_i$ — векторные поля и $v = v(x^j)$ — функция на M удовлетворяют уравнениям

$$\begin{aligned} \underset{A}{L}\Gamma^i_{jk} = 0, \quad \underset{B}{L}\Gamma^i_{jk} = 0,\\ A^i_{,j} = 0, \qquad v_{,jk} = 0,\end{aligned}$$

в которых запятая означает ковариантное дифференцирование в связности Γ на M.

Следствие. $A^s\Gamma^i_{sjk} = 0$; $v_{,s}\Gamma^s_{ijk} = 0$.

Замечание. Теорема 1 справедлива, в частности, для аффинной пульверизации f; Γ^i_{jk} в этом случае не зависит от направления $\lambda = dx/dt$.

2. Классификация двумерных пространств аффинной связности по допускаемым ими алгебрам точечных собственных аффинных симметрий

Как известно (см. [4], предложение 5), АКС $\overline{X} = X^i\partial_i + X^n\partial_n$ КП f в том и только том случае является (собственной) симметрией этого потока, если X^n не зависит от x^j, т. е. $X^n = X^n(t) = ut + v$, где $u = \mathrm{const}$, $v = \mathrm{const}$.

Из теоремы 1 и классификации Дж. Ливайна двумерных пространств аффинной связности по допускаемым ими полным локальным группам траекторных аффинных коллинеаций (движений) (см. [5], с. 471) следует классификационная

Теорема 2. *Существует ровно* 15 *полных алгебр точечных инфинитезимальных аффинных симметрий двумерных пространств* (M, Γ^i_{jk}) *аффинной связности без кручения, перечисленных ниже с помощью своих генераторов в списке* № 1 *под номерами* 1–15. *При этом пространство* (M, Γ^i_{jk}) *тогда и только тогда допускает алгебру* G_r *с генераторами* X_a, $1 \le a \le r$, *указанными в списке* № 1 *под некоторым номером, когда* Γ^i_{jk} *имеют вид, приведенный в списке* № 2 *под тем же номером.*

Список № 1

1. $\overline{X}_1 = (1,0,0)$, $\overline{X}_2 = (0,0,1)$, $\overline{X}_3 = (0,0,t)$;

2. $\overline{X}_1 = (1,0,0)$, $\overline{X}_2 = (0,0,1)$, $\overline{X}_3 = (t,0,0)$, $\overline{X}_4 = (0,0,t)$;

3. $\overline{X}_1 = (1,0,0)$, $\overline{X}_2 = (0,1,0)$, $\overline{X}_3 = (0,0,1)$, $\overline{X}_4 = (0,0,t)$;

4. $\overline{X}_1 = (1,0,0)$, $\overline{X}_2 = (0,1,0)$, $\overline{X}_3 = (0,0,1)$, $\overline{X}_4 = (t,0,0)$, $\overline{X}_5 = (0,0,t)$;

5. $\overline{X}_1 = (1,0,0)$, $\overline{X}_2 = (x,y,0)$, $\overline{X}_3 = (0,0,1)$, $\overline{X}_4 = (0,0,t)$;

6. $\overline{X}_1 = (1,0,0)$, $\overline{X}_2 = (x,y,0)$, $\overline{X}_3 = (0,0,1)$, $\overline{X}_4 = (0,0,t)$, $\overline{X}_5 = (t,0,0)$;

7. $\overline{X}_1 = (1,0,0)$, $\overline{X}_2 = (2x,y,0)$, $\overline{X}_3 = (x^2,xy,0)$, $\overline{X}_4 = (0,0,1)$, $\overline{X}_5 = (0,0,t)$;

8. $\overline{X}_1 = (1,0,0)$, $\overline{X}_2 = (x,y,0)$, $\overline{X}_3 = (x^2,2xy+y^2,0)$, $\overline{X}_4 = (0,0,1)$, $\overline{X}_5 = (0,0,t)$;

9. $\overline{X}_1 = (0,1,0)$, $\overline{X}_2 = (0,x,0)$, $\overline{X}_3 = (0,y,0)$, $\overline{X}_4 = (0,0,1)$, $\overline{X}_5 = (0,0,t)$;

$$\left.\begin{array}{l}10.\\11.\end{array}\right\}\ \begin{array}{l}\overline{X}_1 = (1+\varepsilon x^2, \varepsilon xy, 0),\ \overline{X}_2 = (\varepsilon xy, 1+\varepsilon y^2, 0),\\ \overline{X}_3 = (y,-x,0),\ \overline{X}_4 = (0,0,1),\ \overline{X}_5 = (0,0,t)\end{array},$$

где $\varepsilon = +1$ для алгебры 10, $\varepsilon = -1$ для 11;

12. $\overline{X}_1 = (1,0,0)$, $\overline{X}_2 = (0,1,0)$, $\overline{X}_3 = (0,x,0)$, $\overline{X}_4 = (0,y,0)$, $\overline{X}_5 = (0,0,1)$, $\overline{X}_6 = (0,0,t)$;

13. $\overline{X}_1 = (1,0,0)$, $\overline{X}_2 = (0,1,0)$, $\overline{X}_3 = (0,y,0)$, $\overline{X}_4 = (0,e^x,0)$, $\overline{X}_5 = (0,0,1)$, $\overline{X}_6 = (0,0,t)$;

14. $\overline{X}_1 = (1,0,0)$, $\overline{X}_2 = (0,y,0)$, $\overline{X}_3 = (0,e^{ax}\cos x,0)$, $\overline{X}_4 = (0,e^{ax}\sin x,0)$, $\overline{X}_5 = (0,0,1)$, $\overline{X}_6 = (0,0,t)$;

15. $\overline{X}_1 = (1,0,0)$, $\overline{X}_2 = (0,1,0)$, $\overline{X}_3 = (0,0,1)$, $\overline{X}_4 = (x,0,0)$, $\overline{X}_5 = (0,x,0)$, $\overline{X}_6 = (y,0,0)$, $\overline{X}_7 = (0,y,0)$, $\overline{X}_8 = (t,0,0)$, $\overline{X}_9 = (0,t,0)$, $\overline{X}_{10} = (0,0,t)$.

Список № 2

1. $\Gamma^i_{jk} = \Gamma^i_{jk}(y)$ — произвольные функции;

2. $\Gamma^1_{11} = \Gamma^1_{12} = \Gamma^2_{11} = \Gamma^2_{21} \equiv 0$ и $\Gamma^1_{22} = \Gamma^1_{22}(y)$, $\Gamma^2_{22} = \Gamma^2_{22}(y)$ — произвольные функции;

3. $\Gamma^i_{jk} = a^i_{jk}$ — произвольные постоянные;

4. $\Gamma^1_{11}=\Gamma^1_{12}=\Gamma^2_{11}=\Gamma^2_{12}\equiv 0$, Γ^1_{22}, Γ^2_{22} — произвольные постоянные;

5. $\Gamma^i_{jk}=(1/y)a^i_{jk}$, где a^i_{jk} — произвольные постоянные;

6. $\Gamma^i_{jk}=(1/y)a^i_{jk}$, где $a^i_{1k}=0$, а a^1_{22}, a^2_{22} — произвольные постоянные;

7. $\Gamma^1_{11}=2b/y^2$, $\Gamma^1_{12}=-1/y$, $\Gamma^1_{22}\equiv 0$, $\Gamma^2_{11}=a/y^3$, $\Gamma^2_{21}=b/y^2$, $\Gamma^2_{22}=-2/y$, где a и b — произвольные постоянные;

8. $\Gamma^1_{11}=2/y$, $\Gamma^1_{12}=\Gamma^1_{22}\equiv 0$, $\Gamma^2_{11}=-4/y$, $\Gamma^2_{21}=b/y^2$, $\Gamma^2_{22}=-2/y$, где b — произвольная константа;

9. $\Gamma^1_{11}=2u(x)$, $\Gamma^1_{12}=\Gamma^1_{22}=\Gamma^2_{11}=\Gamma^2_{22}\equiv 0$, $\Gamma^2_{21}=u(x)$, где $u(x)$ — произвольная функция такая, что $u\neq\frac{-ax+d}{ax^2+bx+c}$ и $u'-u^2\neq 0$ (a, b, c, d — какие-либо константы);

$$\begin{array}{l} 10. \\ 11. \end{array}\left.\begin{array}{l} \Gamma^1_{11}=-2\varepsilon\frac{2x}{v},\ \Gamma^1_{12}=-\varepsilon\frac{y}{v},\ \Gamma^1_{22}=\Gamma^2_{11}\equiv 0, \\ \Gamma^2_{21}=-\varepsilon\frac{x}{v},\ \Gamma^2_{22}=-\varepsilon\frac{2y}{v},\ \text{где } v=1+\varepsilon(x^2+y^2) \end{array}\right\};$$

12. $\Gamma^1_{12}=\Gamma^1_{22}=\Gamma^2_{11}=\Gamma^2_{22}\equiv 0$, $\Gamma^1_{11}=2a$, $\Gamma^2_{21}=a$, $a\neq 0$;

13. $\Gamma^1_{12}=\Gamma^1_{22}=\Gamma^2_{11}=\Gamma^2_{22}\equiv 0$, $\Gamma^1_{11}=\frac{1}{3}+2a$, $\Gamma^2_{21}=-\frac{1}{3}+a$, $a\neq-\frac{2}{3}$, $\frac{1}{3}$;

14. $\Gamma^1_{12}=\Gamma^1_{22}=\Gamma^2_{22}\equiv 0$, $\Gamma^1_{11}=\frac{2}{3}a+2b$, $\Gamma^2_{11}=(1+a^2)y$, $\Gamma^2_{21}=-\frac{2}{3}a+b$;

15. $\Gamma^i_{jk}\equiv 0$.

3. Проективные точечные инфинитезимальные симметрии пульверизации

Условия

$$\partial_{\beta\gamma}\overline{X}^\alpha+\overline{X}^\sigma\partial_\sigma\overline{\Gamma}^\alpha_{\beta\gamma}+(\partial_\beta\overline{X}^\sigma)\overline{\Gamma}^\alpha_{\sigma\gamma}+(\partial_\gamma\overline{X}^\sigma)\overline{\Gamma}^\alpha_{\beta\sigma}-(\partial_\sigma\overline{X}^\alpha)\overline{\Gamma}^\sigma_{\beta\gamma}+\dot{x}^\sigma(\partial_\sigma X^m)\overline{\Gamma}^\alpha_{m\beta\gamma}=\delta^\alpha_\beta\overline{\psi}_\gamma+\delta^\alpha_\gamma\overline{\psi}_\beta+\dot{x}^\alpha\overline{\psi}_{\beta\gamma}$$

являются необходимыми и достаточными для того, чтобы векторное поле $\overline{X}=X^i\partial_i+X^n\partial_n$ в пространстве событий $\overline{M}=M\times R$ пульверизации $(M,f)\equiv(M,\Gamma^i_{jk})$ было точечной проективной квазисимметрией (ПКС) потока f (см. [3] и [4]).

Эти условия распадаются на следующие:

$$\partial_{jk}X^i+X^s\partial_s\overline{\Gamma}^i_{jk}+(\partial_jX^s)\overline{\Gamma}^i_{sk}+(\partial_kX^s)\overline{\Gamma}^i_{js}-(\partial_sX^i)\overline{\Gamma}^s_{jk}+$$
$$+\dot{x}^s\partial_sX^m\overline{\Gamma}^i_{mjk}+\dot{x}^n\partial_nX^m\overline{\Gamma}^i_{mjk}=\delta^i_j\overline{\psi}_k+\delta^i_k\overline{\psi}_j+\dot{x}^i\overline{\psi}_{jk}, \quad (4)$$

$$\partial_{jn}X^i+\partial_nX^s\overline{\Gamma}^i_{js}=\delta^i_j\overline{\psi}_n+\dot{x}^i\overline{\psi}_{jn}, \quad (5)$$

$$\partial_{nn}X^i=\dot{x}^i\overline{\psi}_{nn}, \quad (6)$$

$$\partial_{jk}X^n-\partial_sX^n\Gamma^s_{jk}=\dot{x}^n\overline{\psi}_{jk}, \quad (7)$$

$$\partial_{jn}X^n=\overline{\psi}_j+\dot{x}^n\overline{\psi}_{jn}, \quad (8)$$

$$\partial_{nn}X^n=2\overline{\psi}_n+\dot{x}^n\overline{\psi}_{nn}. \quad (9)$$

Из (4)–(9) получаем $\overline{\psi}_{nn}=\overline{\psi}_{ni}\equiv 0$, $X^i=A^i(x^j)t+B^i(x^j)$, $A^i_{,j}=\delta^i_j\overline{\psi}_n$, где запятая означает дифференцирование в связности Γ^i_{jk}. Следовательно, $\overline{\psi}_n=a(x^j)=A^s_{,s}/(n-1)$, и $X^n=at^2+ut+v$, где a, u и v — функции на M.

Уравнение (7) теперь принимает вид

$$a_{,jk}t^2+u_{,jk}t+v_{,jk}=\psi_{jk},$$

где запятая имеет прежний смысл. Из (8) имеем $\overline{\psi}_j=(2a_{,j})t+u_{,j}$. Отсюда $\overline{\psi}_{jk}=\psi_{jk}(\dot{x}/\dot{t})\frac{1}{\dot{t}}\equiv 0$, $\psi_{jk}=\psi_{jn}\equiv 0$, $\psi_j=\psi_j(x^l,t)$.

Таким образом, доказана

Теорема 3. *Векторное поле $\overline{X}=X^i(x^j,t)\partial_i+X^n(x^j,t)\partial_n$ тогда и только тогда является ПКС пульверизации (M,Γ^i_{jk}), когда*

1. $X^i = tA^i(x^j) + B^i(x^j)$, $X^n = at^2 + ut + v$, *где* A^i *и* B^i *— векторные поля,* a, u, v *— функции на* M;
2. $\underset{A}{L}\Gamma^i_{jk} = \delta^i_j(2a_{,k}) + \delta^i_k(2a_{,j})$, $\underset{B}{L}\Gamma^i_{jk} = \delta^i_j u_{,k} + \delta^i_k u_{,j}$;
3. $A^i_{,j} = \delta^i_j a$, $a_{,jk} = u_{,jk} = v_{,jk} = 0$.

Следствие 1. 1) $a_{,k} = \frac{1}{n+1} K_{[sk]} A^s$, где K_{sk} — сокращенный тензор кривизны КП f, а квадратные скобки означают альтернирование без деления;
2) $A^s \Gamma^i_{jks} = 0$, $a_{,s}\Gamma^s_{ijk} = 0$, $u_{,s}\Gamma^s_{ijk} = 0$, $v_{,s}\Gamma^s_{ijk} = 0$.

Следствие 2. Функция $a = a(x)$ на M постоянна тогда и только тогда, когда векторное поле $A = A^s\partial_s$ на M принадлежит ядру $K_{[sk]}$: $K_{[sk]}A^s \equiv 0$.

В частности, это имеет место для римановой связности Γ^i_{jk}; тензор K_{sk} в этом случае симметричен (и не зависит от направления $\lambda = dx/dt$).

Отметим, что согласно определению тензора (см. [3]) $K_{jk} = K^s_{ks,j}$, следовательно, $K_{[j,k]} = \partial_j\Gamma^s_{sk} + \Gamma^s_k\Gamma^m_{mjs}|_{[j,k]}$.

Если Γ^i_{jk} — аффинная связность (не зависящая от направления), а $\overline{X}$ — собственная проективная симметрия (ПС), тогда $\Gamma^i_{jkl} \equiv 0$, $a = \mathrm{const}$, $u = \mathrm{const}$, $v = \mathrm{const}$, и из предыдущей теоремы вытекает

Теорема 4. *Векторное поле* $\overline{X} = X^i\partial_i + X^n\partial_n$ *в пространстве* $\overline{M} = M \times R$ *событий аффинной связности (пульверизации)* $f \equiv (M, f) \equiv (M, \Gamma^i_{jk}(x^l))$ *тогда и только тогда является точечной ПС этой связности, когда*

1) $X^i = tA^i(x^j) + B^i(x^j)$, $X^n = at^2 + ut + v$, *где* A^i *и* B^i *— векторные поля на* M, a, u, v *— произвольные постоянные*;
2) $\underset{A}{L}\Gamma^i_{jk} = 0$, $\underset{B}{L}\Gamma^i_{jk} = 0$;
3) $A^i_{,j} = \delta^i_j a$.

Следствие. $K_{[sk]}A^s = 0$.

Подчеркнем, что доказательство теоремы 3 (как и других теорем статьи) базируется на пульверизационном моделировании КП; сама же теорема 3 обобщает не только аналогичный результат, полученный в [6] для римановых пространств, но и его гипотетический аналог для аффинносвязного случая, о котором в [6] лишь сказано, что на него могут быть распространены полученные в [6] результаты (см. [6], с. 12).

На эффективность пульверизационного моделирования указывает также тот факт, что теоремы 1, 2 и 3 из [6] являются очевидными следствиями свойств моделирования.

4. Классификация двумерных пространств аффинной связности по допускаемым ими алгебрам точечных проективных симметрий

Из упомянутых в п. 2 результатов Дж. Ливайна [5] и теоремы 4 вытекает

Теорема 5. *Существует ровно* 15 *полных алгебр точечных инфинитезимальных проективных симметрий двумерных пространств* (M, Γ^i_{jk}) *аффинной связности без кручения, перечисленных ниже посредством своих генераторов в списке № 1 под номерами* 1–15. *При этом пространство* (M, Γ^i_{jk}) *тогда и только тогда допускает алгебру* G_r *с генераторами* $\overline{X}_a$, $1 \le a \le r$, *указанными в списке № 1 под некоторым номером, когда* Γ^i_{jk} *имеют вид, приведенный в списке № 2 под тем же номером*

Список № 1

1. $\overline{X}_1 = (1, 0, 0)$, $\overline{X}_2 = (0, 0, 1)$, $\overline{X}_3 = (0, 0, t)$;
2. $\overline{X}_1 = (1, 0, 0)$, $\overline{X}_2 = (t, 0, at^2)$, $\overline{X}_3 = (0, 0, 1)$, $\overline{X}_4 = (0, 0, t)$;

3. $\overline{X}_1 = (1,0,0)$, $\overline{X}_2 = (0,1,0)$, $\overline{X}_3 = (0,0,1)$, $\overline{X}_4 = (0,0,t)$;

4. $\overline{X}_1 = (1,0,0)$, $\overline{X}_2 = (0,1,0)$, $\overline{X}_3 = (t,0,at^2)$, $\overline{X}_4 = (0,0,1)$, $\overline{X}_5 = (0,0,t)$;

5. $\overline{X}_1 = (1,0,0)$, $\overline{X}_2 = (x,y,0)$, $\overline{X}_3 = (0,0,1)$, $\overline{X}_4 = (0,0,t)$;

6. $\overline{X}_1 = (1,0,0)$, $\overline{X}_2 = (x,y,0)$, $\overline{X}_3 = (t,0,0)$, $\overline{X}_4 = (0,0,1)$, $\overline{X}_5 = (0,0,t)$;

7. $\overline{X}_1 = (1,0,0)$, $\overline{X}_2 = (2x,y,0)$, $\overline{X}_3 = (x^2,xy,0)$, $\overline{X}_4 = (0,0,1)$, $\overline{X}_5 = (0,0,t)$;

8. $\overline{X}_1 = (1,0,0)$, $\overline{X}_2 = (x,y,0)$, $\overline{X}_3 = (x^2,2xy+y^2,0)$, $\overline{X}_4 = (0,0,1)$, $\overline{X}_5 = (0,0,t)$;

9. $\overline{X}_1 = (0,1,0)$, $\overline{X}_2 = (0,x,0)$, $\overline{X}_3 = (0,y,0)$, $\overline{X}_4 = (0,0,1)$, $\overline{X}_5 = (0,0,t)$;

$$\left.\begin{array}{l} 10. \\ 11. \end{array}\right\} \begin{array}{l} \overline{X}_1 = (1+\varepsilon x^2, \varepsilon xy, 0),\ \overline{X}_2 = (\varepsilon xy, 1+\varepsilon y^2, 0), \\ \overline{X}_3 = (y,-x,0),\ \overline{X}_4 = (0,0,1),\ \overline{X}_5 = (0,0,t) \end{array},$$

где $\varepsilon = 1$ для алгебры 10 и $\varepsilon = -1$ для алгебры 11;

12. $\overline{X}_1 = (1,0,0)$, $\overline{X}_2 = (0,1,0)$, $\overline{X}_3 = (0,x,0)$, $\overline{X}_4 = (0,y,0)$, $\overline{X}_5 = (0,0,1)$, $\overline{X}_6 = (0,0,t)$;

13. $\overline{X}_1 = (1,0,0)$, $\overline{X}_2 = (0,1,0)$, $\overline{X}_3 = (0,y,0)$, $\overline{X}_4 = (0,e^x,0)$, $\overline{X}_5 = (0,0,1)$, $\overline{X}_6 = (0,0,t)$;

14. $\overline{X}_1 = (1,0,0)$, $\overline{X}_2 = (0,y,0)$, $\overline{X}_3 = (0,e^{bx}\cos x,0)$, $\overline{X}_4 = (0,e^{bx}\sin x,0)$, $\overline{X}_5 = (0,0,1)$, $\overline{X}_6 = (0,0,t)$;

15. $\overline{X}_1 = (1,0,0)$, $\overline{X}_2 = (0,1,0)$, $\overline{X}_3 = (0,0,1)$, $\overline{X}_4 = (x,0,0)$, $\overline{X}_5 = (0,x,0)$, $\overline{X}_6 = (y,0,0)$, $\overline{X}_7 = (0,y,0)$, $\overline{X}_8 = (t,0,0)$, $\overline{X}_9 = (0,t,0)$, $\overline{X}_{10} = (0,0,t)$, $\overline{X}_{11} = (xt,yt,t^2)$.

Список № 2

1. $\Gamma^i_{jk} = \Gamma^i_{jk}(y)$ — произвольные функции;

2. $\Gamma^1_{11} = \Gamma^2_{12} = a$, $\Gamma^1_{12} = \Gamma^2_{11} \equiv 0$, $\Gamma^1_{22} = \Gamma^1_{22}(y)$, $\Gamma^2_{22} = \Gamma^2_{22}(y)$, где $a = \mathrm{const}$;

3. $\Gamma^i_{jk} = a^i_{jk}$ — произвольные постоянные;

4. $\Gamma^1_{11} = \Gamma^2_{12} = a$, $\Gamma^1_{12} = \Gamma^2_{11} \equiv 0$, $\Gamma^1_{22} = a^1_{22}$ и $\Gamma^2_{22} = a^2_{22}$ — произвольные постоянные;

5. $\Gamma^i_{jk} = (1/y)a^i_{jk}$, где a^i_{jk} — произвольные постоянные (не все равные нулю);

6. $\Gamma^1_{11} = \Gamma^1_{12} = \Gamma^2_{11} = \Gamma^2_{21} \equiv 0$, $\Gamma^1_{22} = (1/y)a^1_{22}$, $\Gamma^2_{22} = (1/y)a^2_{22}$, где a^1_{22} и a^2_{22} — произвольные постоянные, из которых хотя бы одна не равна нулю;

7. $\Gamma^1_{11} = \frac{2c}{y^2}$, $\Gamma^1_{12} = -\frac{1}{y}$, $\Gamma^1_{22} \equiv 0$, $\Gamma^2_{11} = \frac{b}{y^3}$, $\Gamma^2_{12} = \frac{c}{y^2}$, $\Gamma^2_{22} = -2/y$, где b и c — произвольные константы;

8. $\Gamma^1_{12} = \Gamma^1_{22} \equiv 0$, $\Gamma^1_{11} = \frac{2}{y}$, $\Gamma^2_{11} = -\frac{4}{y}$, $\Gamma^2_{12} = \frac{b}{y^2}$, $\Gamma^2_{22} = -2/y$, где b — произвольная постоянная;

9. $\Gamma^1_{11} = 2u(x)$, $\Gamma^1_{12} = \Gamma^1_{22} = \Gamma^2_{11} = \Gamma^2_{22} \equiv 0$, $\Gamma^2_{12} = u(x)$, где $u(x)$ — любая функция $u(x) \neq \frac{-ex+d}{ex^2+bx+c}$, $u' - u^2 \neq 0$;

$$\left.\begin{array}{l} 10. \\ 11. \end{array}\right\} \begin{array}{l} \Gamma^1_{11} = -2e\frac{2x}{v},\ \Gamma^1_{12} = -\varepsilon\frac{y}{v},\ \Gamma^1_{22} = \Gamma^2_{11} \equiv 0, \\ \Gamma^2_{12} = -\varepsilon\frac{x}{v},\ \Gamma^2_{22} = -\varepsilon\frac{2y}{v},\ \text{где} v = 1 + \varepsilon(x^2+y^2) \end{array};$$

12. $\Gamma^1_{12} = \Gamma^1_{22} = \Gamma^2_{11} = \Gamma^2_{22} \equiv 0$, $\Gamma^1_{11} = 2b$, $\Gamma^2_{12} = b$ $(b \neq 0)$;

13. $\Gamma^1_{11} = \frac{1}{3} + 2b$, $\Gamma^1_{12} = \Gamma^1_{22} = \Gamma^2_{11} = \Gamma^2_{22} \equiv 0$, $\Gamma^2_{12} = -\frac{1}{3} + b$, где $b \neq -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}$;

14. $\Gamma^1_{11} = \frac{2}{3}b + 2c$, $\Gamma^1_{12} = \Gamma^1_{22} = \Gamma^2_{22} \equiv 0$, $\Gamma^2_{11} = (1+b^2)y$, $\Gamma^2_{12} = -\frac{2}{3}b + c$, где b и c — произвольные постоянные;

15. $\Gamma^i_{jk} \equiv 0$.

Замечание. Результаты Дж. Ливайна [5], использованные при доказательстве теорем 2 и 5, базируются на классификации С. Ли [7] алгебр векторных полей на плоскости.

Литература

1. Игошин В.А. *Пульверизационное моделирование квазигеодезических потоков* // ДАН СССР. – 1991. – Т. 320. – № 3. – С. 531–535.
2. Игошин В.А. *Пульверизационное моделирование.* I // Изв. вузов. Математика. – 1992. – № 6. – С. 63–70.
3. Игошин В.А. *Пульверизационное моделирование.* II // Изв. вузов. Математика. – 1994. – № 10. – С. 26–32.
4. Игошин В.А. *Пульверизационное моделирование.* III // Изв. вузов. Математика. – 1995. – № 5. – С. 39–50.
5. Levine J. *Classification of collineations in projectively and affinely connected spaces of two dimensions* // Ann. Math. – 1950. – V. 52. – № 2. – P. 465–477.
6. Аминова А.В. *Проективные преобразования как симметрии дифференциальных уравнений.* – Казанск. ун-т. – Казань, 1991. – 19 с. – Деп. в ВИНИТИ 22.04.91, № 1707–В91.
7. Lie S., Engel F. *Theorie der Transformationsgruppen.* – Leipzig: Teubner, 1893. – Bd. 3. – 830 s.

Нижегородский государственный университет

Поступила 25.09.1995