ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2000 МАТЕМАТИКА № 5 (456)

УДК 517.925

*М.К. БУГИР*

# УСЛОВИЯ НЕКОЛЕБЛЕМОСТИ РЕШЕНИЙ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

**1.** В работе получены условия неколеблемости для систем дифференциальных уравнений вида

$$Lu + P(x)u = 0 \tag{1}$$

в пространствах постоянной кривизны $X$, где $P(x)$ — непрерывная самосопряженная матрица порядка $n \times n$ в области $D \subset X$, $L$ — оператор Лапласа–Бельтрами, выраженные через собственные числа матрицы $P(x)$ и геометрические характеристики области.

В частном случае, когда $X = E^n$ ($n$-мерное евклидово пространство), $L$ — оператор Лапласа $\Delta$, система уравнений (1) будет системой уравнений эллиптического типа $\Delta u + P(x)u = 0$. Для простоты сначала остановимся на примере системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$My = y'' + P(t)y = 0. \tag{2}$$

**Определение 1.** Нетривиальное решение $y(t)$ системы уравнений (2) будем называть колеблющимся на интервале $j = [a, \omega)$, $\omega \leq \infty$, если найдутся по крайней мере две точки $t_1$ и $t_2$ такие, что $y(t_1) = 0 = y(t_2)$, и неколеблющимся в противном случае.

**Определение 2.** Нетривиальное решение $u(x)$ системы уравнений (1) будем называть колеблющимся в области $D \subset X$, если хотя бы для одной точки $P_0 \in D$ нетривиальная вектор-функция

$$M_r[u(x), P_0] = \frac{1}{A(r)} \int \cdots \int_{S_r} u(x) ds \tag{3}$$

колеблющаяся, где $A(r)$ — нормирующий множитель ($M_r[1, p_0] = 1$), $S_r \in D$ — сфера радиуса $r$ с центром в точке $P_0 \in X$, и неколеблющимся в противном случае.

**Определение 3.** Систему уравнений (1) или (2), у которой все решения неколеблющиеся, будем называть неколеблющейся.

**Замечание 1.** Вектор-функция $M_r[u(x), P_0]$, которую в дальнейшем будем обозначать сокращенно $M(r)$, если это не вызовет недоразумений, зависит от решения $u(x)$ и двух переменных $r$ и $P_0$, следовательно, по определению решение $u(x)$ будет неколеблющимся в области $D$, если для любой точки $P_0 \in D \subset X$ и любого $r$ функция (3) неколеблющаяся.

Функция $v(t) = \sqrt{y_1^2(t) + \cdots + y_n^2(t)}$ имеет производные $v'(t) = (y, y')/v$ и

$$v''(t) = [(y'', y)y^2 + y'^2 y^2 - (y', y)^2]/v^3. \tag{4}$$

Функция $v(t)$ обращается в нуль тогда и только тогда, когда $y_1(t) = \cdots = y_n(t) = 0$, следовательно, функции $y(t)$ и $v(t)$ колеблются или не колеблются одновременно. Имеем $v'^2 = (y', y)^2/y^2 \leq y'^2$ по неравенству Коши–Шварца. Если $y^2(t_0) = y'^2(t_0) = 0$, то в силу единственности решения задачи Коши $y(t) \equiv 0$ и $v(t) \equiv 0$ в силу определения функции $v$. Кроме того, функция $v(t)$ сохраняет кратность нулей решения $y(t)$, в частности, для системы уравнений (2) $\lim\limits_{t \to t_0} v'(t)^2 = y'^2(t_0)$, если $y(t_0) = 0$. Умножим систему уравнений (2) скалярно на $y(t)$, тогда $(y, y'') = -(P(t)y, y)$. Из (4) запишем

$$v'' + (P(t)y, y)/v = f(t), \tag{5}$$

где $f(t) = [y'^2 y^2 - (y', y)^2]/v^3$. По неравенству Коши–Шварца $f(t) \geq 0$. Непрерывность правой части уравнения (5) на решениях системы уравнений (2) проверяется по правилу Лопиталя. Преобразуем уравнение (5) следующим образом:

$$v'' + \lambda_{\max}(t)v = ((\lambda_{\max}(t)E - P(t))y, y)/v + f(t), \tag{6}$$

где $\lambda_{\min}(t)$ и $\lambda_{\max}(t)$ — наименьшее и наибольшее собственные числа матрицы $P(t)$, $E$ — единичная матрица. Правая часть (6) на решениях системы уравнений (2) непрерывная и неотрицательная. Собственные числа $\lambda_i(t)$ самосопряженной матрицы $P(t)$ согласно соотношениям Релея ([1], с. 135) можно упорядочить

$$\lambda_{\min}(t) = \lambda_1(t) \leq \cdots \leq \lambda_n(t) = \lambda_{\max}(t). \tag{7}$$

**Теорема 1.** *Пусть непрерывная на интервале $j = [a, \omega)$, $\omega \leq \infty$, матрица $P(t)$ самосопряженная. Для того чтобы система уравнений (2) была неколеблющейся на $j$, необходимо и достаточно, чтобы неколеблющимися там же были скалярные уравнения*

$$z_i'' + \lambda_i(t) z_i = 0 \quad (i = 1, \ldots, n). \tag{8}$$

Отметим, что полученные условия отличаются от известных [2], [3] даже в случае системы обыкновенных дифференциальных уравнений (2), например, отсутствием пробной матрицы $Y > 0$, для которой $MY < 0$. Матричное неравенство $A > 0$ следует понимать как $(Ae, e) > 0$ для произвольного $n$-мерного единичного вектора $e$.

**Замечание 2.** Для систем уравнений с постоянными коэффициентами теорема 1 почти очевидна. Действительно, в этом случае существует неособенная матрица $T$ такая, что $\widetilde{P} = T^{-1}PT$ имеет диагональный вид, а колеблемость системы уравнений для постоянной диагональной матрицы $\widetilde{P}$

$$w_i + T^{-1}PTw_i = 0 \quad (i = 1, \ldots, n) \tag{9}$$

зависит от знака собственных значений матрицы $\lambda_i$. Так как $w = Ty$, то системы уравнений (2) и (9) имеют одинаковую колеблемость.

**Доказательство.** Теорему достаточно доказать для $i = n$, т. к. согласно (7) по теореме сравнения Штурма неколеблемость уравнений (8) следует из неколеблемости уравнения

$$z_n'' + \lambda_{\max}(t) z_n = 0. \tag{10}$$

По этой же причине достаточность теоремы следует из теоремы сравнения Штурма для систем уравнений типа (2) ввиду неравенства $P(t) \leq \lambda_{\max}(t)E$.

Необходимость докажем от противного. Допустим, что система уравнений (2) неколеблющаяся, а уравнение (10) колеблющееся. Обозначим правую часть (6) через $\mu(t)$, $\mu(t) \geq 0$. Используя функцию Коши для уравнения (10), решение уравнения (6), обращающееся в нуль в точке $t_0$, запишем в форме

$$v(t) = z_n(t) + \int_{t_0}^{t} K_n(t, s)\mu(s)ds, \tag{11}$$

где $z_n(t)$ — решение уравнения (10) с условием $z_n(t_0) = 0$, $K_n(t,s)$ — его функция Коши, $t_0$ — произвольная точка из интервала $j$. Предположим, что $t_0$ и $t_1$ — соседние нули решения $\widetilde{z}_n(t)$, и рассмотрим решение (11)

$$\widetilde{v}(t) = \widetilde{z}_n(t)c + \int_{t_0}^{t} K_n(t,s)\mu(s)ds.$$

Так как $K_n(t,s) > 0$, $s < t$, на интервале $(t_0, t_1)$, то в зависимости от знака решения $\widetilde{z}_n(t)$ на $(t_0, t_1)$ можно выбрать произвольно малое $\varepsilon$ и постоянную $c$ ($c > 0$ или $c < 0$) такими, что $\widetilde{v}(t_1+\varepsilon) = \widetilde{z}_n(t_1+\varepsilon)c + \int\limits_{t_0}^{t_1+\varepsilon} K_n(t_1+\varepsilon, s)\mu(s)ds = 0$. Последнее невозможно из-за отсутствия двух нулей в решениях $v(t)$. $\square$

**Замечание 3.** Интерпретируя теорему 1 как аналог теоремы сравнения (ввиду неравенства $P(t) \le \lambda_{\max}(t)E$) и используя неравенства Чаплыгина [4], дадим ей геометрическое обоснование. Рассмотрим дифференциальные неравенства

$$v_1'' + \lambda_1(t)v_1 \le f(t), \quad v_n'' + \lambda_n(t)v_n \ge f(t).$$

Решения последних неравенств и функция $v(t)$, построенные по одинаковым начальным условиям в точке $t_0$, на некотором интервале $(t_0, t_0 + l)$ удовлетворяют неравенствам

$$v_n(t) \le v(t) \le v_1(t). \tag{12}$$

Из (12) следует, что из обращения в нуль решения $v_1(t)$ в точке $t_1 > t_0$ следует, что $v(t)$ и $v_n(t)$ также обращаются в нуль в некоторой точке $\widetilde{t} < t_1$, т. е. система уравнений (2) колеблющаяся, и наоборот, если $v_n(t) > 0$ для $t > t_0$, то система уравнений (2) неколеблющаяся.

**2.** Аналогичные рассуждения остаются верными и для системы уравнений с частными производными (1). Действительно, рассмотрим функцию

$$v(x) = \sqrt{u_1^2(x) + \dots + u_n^2(x)}.$$

Вычислив первые и вторые производные по отдельным аргументам и просуммировав, получим нелинейное скалярное уравнение вида

$$Lv + (P(x)u, u)/v = f(x),$$

где $(P(x)u,u) = \sum\limits_{i,j=1}^{n} p_{ij}u_iu_j$. Построим уравнение, аналогичное уравнению (6),

$$Lv + \lambda_{\max}(x)v = \psi(x), \quad \psi(x) \ge 0.$$

Если проинтегрируем последнее уравнение по сфере $S_r$ пространства $X$ и используем формулу из работ [5], [6] $\int\limits_{S_r}\cdots\int Lu\,ds = \frac{d}{dr}\left[A(r)\frac{dM}{dr}\right]$, то получим уравнение

$$\frac{d}{dr}\left[A(r)\frac{dM}{dr}\right] + \int\limits_{S_r}\cdots\int \lambda_{\max}(x)v(x)ds = \int\limits_{S_r}\cdots\int \Psi(x)ds. \tag{13}$$

Используя теорему о среднем значении для $v > 0$

$$\int\limits_{S_r}\cdots\int \lambda_{\max}(x)v\,ds = \lambda_n[x^*(r)]\int\limits_{S_r}\cdots\int v(x)ds, \quad x^*(r) \in S_r,$$

уравнение (13) можно переписать в виде обыкновенного дифференциального уравнения

$$\frac{d}{dr}\left[A(r)\frac{dM}{dr}\right] + A(r)\lambda_n(x^*(r))M = \int\limits_{S_r}\cdots\int \Psi(x)ds.$$

Отсюда аналогично теореме 1 доказывается

**Теорема 2.** *Пусть непрерывная в области $D \subseteq X$ матрица $P(x)$ самосопряженная. Тогда для того чтобы система уравнений (1) была неколеблющейся в области $D \subseteq X$, необходимо и достаточно неколеблемости там же скалярных уравнений*

$$Lu_i + \lambda_i(x)u_i = 0.$$

Используя теоремы 2 и сравнения Штурма, из неколеблемости уравнения

$$\frac{d}{dr}\left[A(r)\frac{dM_n}{dr}\right] + A(r)\lambda_{\max}(r)M_n = 0 \tag{14}$$

получим достаточные признаки неколеблемости системы уравнений (1). В частности, преобразование $M(r) = A^{-1/2}(r)\varphi(r)$ приводит уравнение (14) для гиперболического пространства $H^n$ кривизны $-\lambda^2$ к уравнению

$$\varphi'' + \left\{\lambda_n(r) - \frac{\lambda^2}{4}\left[(n-1)^2 + \frac{(n-1)(n-3)}{\operatorname{sh}^2\lambda r}\right]\right\}\varphi = 0. \tag{15}$$

Используя достаточные признаки неколеблемости [2], теорему сравнения Штурма и уравнение $y'' = 0$, получим простое достаточное условие неколеблемости (1) в гиперболическом пространстве $H^n$.

**Следствие 1.** Если в пространстве $H^n$ выполняется неравенство

$$\lambda_n(r) \le \frac{\lambda^2}{4}(n-1)^2, \tag{16}$$

где $n$ — размерность пространства, то система уравнений (2) неколеблющаяся.

Условие (16) указывает на то, что для уравнений из $H^n$ при изучении неколеблемости приходится учитывать и размерность пространства. Кроме того, с использованием свойств функций Лежандра в [5] показано, что условие (16) является и необходимым.

В сферических пространствах достаточным условием неколеблемости будет $\lambda_{\max}(x) \le 0$; для чего формально в (15) вместо $\lambda$ следует положить $i\lambda$ и учесть, что уравнение $\frac{d}{dr}[A(r)\frac{dM}{dr}] = 0$ неколеблющееся для всех пространств постоянной кривизны.

С другой стороны, можно получить достаточные условия неколеблемости решений системы уравнений (1) в компактных пространствах постоянной кривизны через геометрические характеристики области, как это сделано для евклидова пространства в [7]. Имеет место

**Теорема 3.** *Пусть самосопряженная матрица $P(x)$ непрерывна в выпуклой области $D$ и выполняется условие*

$$\max_{x\in D}\lambda_{\max}(x) \le \left[\frac{\pi}{2A(r)}\right]^2. \tag{17}$$

*Тогда система уравнений (1) неколеблющаяся в области $D$.*

**Доказательство.** Сделав в уравнении (14) замену

$$w = \frac{A(r)M'}{M}, \quad w' = \frac{(A(r)M')'}{M} - \frac{w^2}{A(r)},$$

преобразуем его в уравнение Риккати

$$Rw = w' + \frac{w^2}{A(r)} + A(r)\lambda_n(x^*) = 0.$$

Положим $w(r) = \frac{\pi}{2}\operatorname{ctg}\left[\frac{\pi}{2}\int\limits_0^r A^{-1}(s)ds\right]$, тогда $w' + \frac{w^2}{A(r)} = -\left(\frac{\pi}{2}\right)^2\frac{1}{A(r)}$. Из осцилляционной теории [2] известно, что разрешимость уравнения (17) равносильна разрешимости неравенства $Rw \leq 0$, поэтому

$$\lambda_{\max}(x^*) - \left[\frac{\pi}{2A(r)}\right]^2 \leq 0.$$

Последнее неравенство выполняется при условии (17). Для пространства $E^n$ имеем $A(r) = r^{n-1}$, и оценка (17) принимает вид

$$\max_{x\in D}\lambda_{\max}(x) \leq \left[\frac{\pi}{2r^{n-1}}\right]^2.$$

Так как точка $x^*$ произвольная из области $D$, а наибольшая сфера имеет центр, через который проходит диаметр области [7], то справедливо неравенство

$$\max_{x\in D}\lambda_{\max}(x) \leq \left(\frac{\pi}{d}\right)^{2(n-1)}\left(\frac{2}{\pi}\right)^{2(n-2)}. \tag{18}$$

Отметим, что для плоской области оценка (18) принимает простой вид

$$\max_{x\in D}\lambda_{\max}(x) \leq \left(\frac{\pi}{d}\right)^2,$$

и в случае скалярного уравнения совпадает с оценкой, полученной в [7]. Для пространства $P^n - A(r) = (\sin\lambda r/\lambda)^{n-1}$. Из неравенства (17) получим

$$\max_{x\in D}\lambda_{\max}(x) \leq \left(\frac{\lambda\pi}{2\sin\lambda r}\right)^{2(n-1)}\left(\frac{2}{\pi}\right)^{2n-4}.$$

Если через $d_P$ обозначить диаметр области $D$ в сферическом пространстве, то получим, как и в случае евклидова пространства для выпуклой области, оценку неколеблемости (18), где $d_P = 2\sin\lambda r/\lambda$, которая при $n = 2$ принимает вид $\max\limits_{x\in D}\lambda_n(x) \leq \left[\frac{\pi}{d_P}\right]$. $\square$

Для гиперболических пространств оценки вида (17) малоэффективны, поскольку “сферы” $S_r$ в этом случае неограничены.

Обозначим через $A_0(r)$ площадь выпуклой области $Q$, а через $K_0(r)$ — ее объем, тогда аналогично предыдущей теореме доказывается

**Следствие 2.** Пусть $P(x)$ — непрерывная самосопряженная матрица в выпуклой области $Q \subset E^2$ и выполняется оценка

$$\max_{x\in Q}\lambda_n(x) \leq \left(\frac{\pi}{4}\frac{A_0(r)}{K_0(r)}\right)^2. \tag{19}$$

Тогда система уравнений (1) неколеблющаяся в области $Q \subset E^2$.

В скалярном случае оценка (19) совпадает с оценкой из [7].

Для доказательства неравенства (19) положим

$$w(r) = \frac{\pi}{4}\frac{A_0(r)}{K_0(r)}\operatorname{ctg}\left[\frac{\pi}{2}\int_r^0\frac{A_0(s)}{K_0(s)}ds\right]$$

и используем свойство монотонности функции $A_0(r)/K_0(r)$.

**3.** Последние утверждения обобщаются и на нелинейные уравнения типа

$$\Delta u + c(x)f(u) = 0, \tag{20}$$

где на функцию $f(u)$ накладываются характерные для осцилляционных свойств нелинейных уравнений ограничения, например, [5]

$$uf(u) > 0, \quad f'_u(u) \geq 0 \ \text{ для } \ u \neq 0. \tag{21}$$

Частный случай этого уравнения

$$\Delta u + c(x)|u|^{\alpha}\mathrm{sgn}\, u = 0 \tag{20$'$}$$

имеет физическое приложение и удовлетворяет сформулированным ниже условиям. Вместо уравнения (20) рассмотрим систему уравнений

$$Lu + P(x)f(u) = 0, \tag{22}$$

где $f(u)$ — вектор, и функция $\varphi(v) = (f(u), u)$ удовлетворяет условиям (21). По аналогии с предыдущими рассуждениями рассмотрим уравнение

$$Lv + \lambda_{\max}(x)\varphi(v) = ((\lambda_n(x)E - P(x))f(u), u)/v + \widetilde{f}(u). \tag{23}$$

Проинтегрируем (23) по сфере $S_r$, тогда

$$\frac{d}{dr}\left[A(r)\frac{dM}{dr}\right] + \int \cdots \int_{S_r} \lambda_n(x)\varphi(v)ds = \Psi(r). \tag{24}$$

По условию (21) функция $\varphi(v) > 0$ для $v > 0$ и, кроме того, предположим, что она выпуклая, что не противоречит условиям (21). Тогда по неравенству Йенсена $M[f(v)] \geq f[M(v)]$ и по теореме о среднем значении вместо (24) можем записать неравенство $(A(r)M')' + A(r)\lambda_n(x^*)\varphi(M) \leq \Psi(r)$, $x^*(r) \in S_r$. Преобразуем последнее неравенство в неравенство Риккати. Для этого сделаем замену

$$w = \frac{A(r)M'}{\varphi(M)}, \quad w' + \frac{w^2\varphi'_v(v)}{A(r)} + A(r)\lambda_n(x^*) \leq \Psi(r). \tag{25}$$

Для функции $w = \frac{\pi}{2}\,\mathrm{ctg}\left[\frac{\pi}{2}\varphi\Big(\int\limits_0^r A^{-1}(s)ds\Big)\right]$ имеем

$$w' + \frac{w^2\varphi'_v(v)}{A(r)} = -\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \frac{1}{\sin^2 t}\,\frac{\varphi'_v(v)}{A(r)} + \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \frac{\mathrm{ctg}^2\, t}{A(r)}\varphi'_v(v) = -\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \frac{\varphi'_v(v)}{A(r)}.$$

Тогда неравенство (25) перепишется так:

$$-\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \frac{\varphi'_v(v)}{A(r)} + A(r)\lambda_n(x^*) \leq \Psi(r) \quad \text{или} \quad \frac{\lambda_{\max}(x^*)}{\varphi'_v(v)} \leq \left(\frac{\pi}{2A(r)}\right)^2.$$

Поскольку $x^*$ — произвольная точка, то имеет место

**Теорема 4.** *Если $\varphi(v)$ является выпуклой функцией, выполняются условия* (21) *и неравенства*

$$((\lambda_n(x)E - P(x))f(u), u) > 0, \quad \max_{x\in D} \frac{\lambda_{\max}(x)}{\varphi'(v)} \leq \left(\frac{\pi}{2A(r)}\right)^2, \tag{26}$$

*то система уравнений* (22) *неколеблющаяся.*

Так как в оценке (26) присутствует функция $\varphi(v)$, то следует выделять классы решений, для которых выполняются условия (21) и (26). Для уравнения (20$'$)

$$\frac{\lambda_n(x)}{\varphi'_v(v)} = \alpha^{-1}\lambda_n(x)|v|^{1-\alpha}\operatorname{sgn} v, \quad 0 < \alpha < 1.$$

Последнее выражение будет ограниченным в классе функций, непрерывных в замкнутой области $D$.

## Литература


1. Беллман Р. *Введение в теорию матриц.* – М.: Наука, 1976. – 352 с.
2. Swanson C.A. *Comparison and oscillation theory of linear differential equations.* – N. Y.–London: Acad. Press, 1968. – 224 p.
3. Reid W.T. *Sturmian theory for ordinary differential equations.* – N. Y.–Heidelberg–Berlin: Springer-Verlag, 1981. – 559 p.
4. Чаплыгин С.А. *Новый метод приближенного интегрирования дифференциальных уравнений.* – М.–Л.: ГИТТЛ, 1950. – 102 с.
5. Бугир М.К. *Осцилляционные свойства решений уравнений в частных производных на многообразиях постоянной кривизны* // Препринт № 27 АН УССР. Ин-т матем. – 1991. – 58 с.
6. Хелгасон С. *Преобразование Радона.* – М.: Мир, 1983. – 150 с.
7. Бобык Е.И., Бондарчук П.И., Пташнык Б.И., Скоробогатько В.Я. *Элементы качественной теории дифференциальных уравнений с частными производными.* – Киев: Наук. думка, 1976. – 175 с.



*Тернопольская Академия народного хозяйства*



*Поступили*
*первый вариант* 28.02.1995
*окончательный вариант* 20.09.1999