ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2002 МАТЕМАТИКА № 12 (487)

УДК 517.977.5

Н.В. АНТИПИНА, В.А. ДЫХТА

ЛИНЕЙНЫЕ ФУНКЦИИ ЛЯПУНОВА–КРОТОВА И ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ ОПТИМАЛЬНОСТИ В ФОРМЕ ПРИНЦИПА МАКСИМУМА

1. Введение и постановка задачи

В данной статье получены достаточные условия сильного и глобального минимума для классической гладкой задачи оптимального управления

$$J = l_0(b) \to \min, \quad b := (t_0, x_0; t_1, x_1), \tag{1}$$

$$l(b) \le 0, \quad k(b) = 0, \tag{2}$$

$$\dot{x} = f(t, x, u), \quad u(t) \in U. \tag{3}$$

Здесь $x_0 = x(t_0)$, $x_1 = x(t_1)$, функции l_0, l, k, f непрерывно дифференцируемы, множество $U \subseteq R^{d(u)}$ произвольно ($d(u)$ означает размерность вектора u). Задачу (1)–(3) обозначим через P.

Предлагаемые условия можно интерпретировать как обращение принципа максимума Л.С. Понтрягина [1] в достаточное условие оптимальности. Они формулируются в терминах существования семейства решений сопряженной системы, каждое из которых обеспечивает выполнение некоторого расширенного условия максимума понтрягиана или гамильтониана системы (3), и включают в себя соответствующую конечномерную концевую задачу минимизации, решением которой должен быть концевой набор $\overline{b}$, отвечающий исследуемой экстремали Понтрягина.

В период становления теории оптимального управления проблеме обращения принципа максимума (ПМ) было посвящено довольно много публикаций. Наиболее общие результаты в этом направлении [2]–[6] использовали, в сущности, общеизвестный факт: если нормальная стационарная точка в задаче минимизации с ограничениями является точкой безусловного минимума лагранжиана при подходящем выборе *одного набора* множителей Лагранжа, то она является решением задачи. Детализация этого факта для задачи P приводит к достаточным условиям оптимальности понтрягинской экстремали, включающим требование вогнутости понтрягиана (по паре (x,u)) или гамильтониана (по x) при *фиксированной* сопряженной траектории из ПМ, а также условие выпуклости допустимого терминального множества (2) и целевого функционала (1).

К этому кругу результатов следует отнести и несколько более тонкие достаточные условия оптимальности экстремали, которые можно получить из теоремы В.Ф. Кротова [7], [8] с линейной вспомогательной функцией (эти условия используют модифицированные концевой лагранжиан и концевую задачу минимизации, позволяющие охватить более широкий класс задач, нежели в [2]–[6]).

Мы не касаемся здесь результатов, связанных с теорией поля экстремалей (см., напр., [9]), поскольку они относятся к теории позиционного, а не программного управления и эквивалентны решению уравнения Гамильтона–Якоби–Беллмана.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 01-01-00869.

Все указанные достаточные условия с обращением ПМ обладают общими недостатками: во-первых, они применимы только к нормальным экстремалям Понтрягина; во-вторых, оперируют лишь с единственным нормированным набором множителей Лагранжа (хотя таких наборов может быть бесчисленное множество); наконец, как правило, они не работают, если динамическая система (3) обладает плохими свойствами управляемости (напр., имеет инвариантные многообразия).

Предлагаемые достаточные условия свободны от отмеченных недостатков (по крайней мере, менее чувствительны к соответствующим особенностям), что иллюстрируют примеры, рассмотренные в п. 4. В то же время их доказательство элементарно и опирается на простейшую версию модифицированных достаточных условий Кротова из ([10], лемма 1.2, с. 31; см. также [11]). В этой версии используется семейство линейных (по x) вспомогательных функций

$$\{\varphi^a(t,x) = \langle\psi^a(t),\ x - \overline{x}(t)\rangle \mid a \in \mathcal{A}\}, \tag{4}$$

невозрастающих вдоль траекторий системы (3) (здесь знак $\langle p,\ q\rangle$ означает скалярное произведение векторов p, q, иногда обозначаемое далее просто через pq, $\psi^a(t)$ — некоторые решения сопряженной системы, соответствующие фазовой координате x). Вообще, любую функцию $\varphi(t,x)$, обладающую указанным свойством, мы называем *функцией Ляпунова–Кротова* для системы (3). В случае гладкости она удовлетворяет *дифференциальному неравенству Ляпунова–Кротова*

$$\varphi_t(t,x) + \varphi_x(t,x)f(t,x,u) \le 0. \tag{5}$$

В обсуждаемых достаточных условиях функции семейства (4) подбираются так, чтобы удовлетворить неравенству (5) на подходящем множестве значений (t,x). Тот факт, что в этом случае семейство (4) порождает соответствующую внешнюю оценку множества достижимости системы (3), лежит в основе достаточных условий.

Уточним теперь постановку задачи и обозначения.

Процессом управляемой системы (3) будем называть набор $\sigma = (x(t), u(t) \mid t \in \Delta)$, включающий некоторый отрезок времени Δ, абсолютно непрерывную траекторию $x(t)$ и измеримое ограниченное управление $u(t)$, которые удовлетворяют на Δ системе (3). Процесс σ назовем *допустимым* в задаче P, если $\Delta = [t_0, t_1]$ и выполнены концевые ограничения (2). По определению полагаем $J(\sigma) = l_0(b)$ для любого допустимого процесса. Допустимый процесс, исследуемый на оптимальность, обозначим через

$$\overline{\sigma} = (\overline{x}(t), \overline{u}(t) \mid t \in \overline{\Delta} = [\overline{t}_0, \overline{t}_1]).$$

2. Принцип максимума и биэкстремали

Обозначим через Q некоторое открытое множество в пространстве переменных (t,x), а через $P(Q)$ — сужение задачи P на множество Q. Таким образом, задача $P(Q)$ получается из P добавлением ограничений

$$(t, x(t)) \in Q, \quad (t_0, x_0; t_1, x_1) \in Q \times Q.$$

Дадим следующие определения.

Определение 1. Допустимый процесс $\overline{\sigma}$ доставляет *сильный минимум* в задаче P, если существует такое открытое множество $Q \subset R^1 \times R^{d(x)}$, содержащее график траектории $\overline{x}(t)$, что $\overline{\sigma}$ является глобальным решением задачи $P(Q)$.

Это определение равносильно условию: не существует допустимой последовательности

$$\sigma_n = (x_n(t), u_n(t) \mid t \in \Delta_n = [t_{0n}, t_{1n}])$$

такой, что

$$J(\sigma_n) < J(\overline{\sigma}) \ \ \forall n,$$

причем

$$t_{0n} \to \overline{t}_0, \quad t_{1n} \to \overline{t}_1, \quad \max_{t \in \Delta_n \cap \overline{\Delta}} |x_n(t) - \overline{x}(t)| \to 0.$$

При Q, совпадающем со всем пространством, определение сильного минимума переходит в определение глобального минимума.

Приведем формулировку необходимого условия оптимальности — принципа максимума для задачи P.

Введем функцию Понтрягина

$$H(t, x, \psi_x, u) = \langle \psi_x, f(t, x, u) \rangle,$$

концевую функцию Лагранжа

$$L(b) = \alpha_0 l_0(b) + \langle \alpha, l(b) \rangle + \langle \beta, k(b) \rangle$$

и обозначим через M множество наборов множителей

$$\lambda = (\alpha_0, \alpha, \beta, \psi(t)), \quad \psi(t) = (\psi_x(t), \psi_t(t)),$$

таких, что

$$\begin{gathered} \alpha_0 \geq 0, \quad \alpha \in R_+^{d(l)}, \quad \beta \in R^{d(k)}, \\ \langle \alpha, l(\overline{b}) \rangle = 0, \quad \alpha_0 + |\alpha| + |\beta| > 0, \\ -\dot{\psi}_q(t) = H_q(t, \overline{x}(t), \psi_x(t), \overline{u}(t)), \quad q = x, t, \\ \psi_x(\overline{t}_0) = L_{x_0}(\overline{b}), \quad \psi_x(\overline{t}_1) = -L_{x_1}(\overline{b}), \\ \psi_t(\overline{t}_0) = L_{t_0}(\overline{b}), \quad \psi_t(\overline{t}_1) = -L_{t_1}(\overline{b}), \end{gathered} \tag{6}$$

$$\begin{gathered} H(t, \overline{x}(t), \psi_x(t), \overline{u}(t)) + \psi_t(t) = 0 \ \text{ на } \ \overline{\Delta}, \\ H(t, \overline{x}(t), \psi_x(t), u) + \psi_t(t) \leq 0 \ \text{ на } \ \overline{\Delta} \times U, \end{gathered} \tag{7}$$

где $\psi(t)$ — липшицевая функция. Зависимость функций H и L от $\lambda \in M$ для краткости опущена, но при необходимости будет отмечаться через H^λ, L^λ.

Принцип максимума для задачи P состоит в утверждении ([1]; [12], с. 8–11; [13], с. 24): если процесс $\overline{\sigma}$ доставляет сильный (и даже понтрягинский [13], с. 23; [14]) минимум в задаче P, то $M \neq \emptyset$.

Обычно процесс $\overline{\sigma}$, удовлетворяющий ПМ, называют *экстремалью Понтрягина* или *понтрягинской экстремалью задачи* P. Экстремаль Понтрягина $\overline{\sigma}$ называют нормальной, если для нее $\alpha_0 > 0 \ \ \forall \lambda \in M$; в противном случае $\overline{\sigma}$ — *анормальная экстремаль Понтрягина.*

Определение 2. Если $\overline{\sigma}$ — экстремаль Понтрягина и $\lambda \in M$, то тройку функций $\gamma = (\psi(t), \overline{x}(t), \overline{u}(t) \mid t \in \overline{\Delta})$ будем называть *биэкстремалью Понтрягина*, а $\psi(t)$ — ее сопряженной компонентой или *коэкстремалью.*

Понятия понтрягинской экстремали и биэкстремали неразрывно связаны с задачей оптимизации P. Но кроме них нам будет полезно использовать понятие *экстремали управляемой системы* в смысле А.А. Милютина ([12], с. 20; [13], с. 43). Оно тоже включает в себя сопряженную компоненту, и мы рискнем переименовать его в биэкстремаль, чтобы термин экстремаль, как обычно, закрепить за процессом, удовлетворяющим необходимому условию первого порядка. При этом соглашении определение А.А. Милютина сводится к следующему.

Определение 3. Назовем *биэкстремалью* любую тройку функций $\gamma = (\psi(t), \overline{x}(t), \overline{u}(t))$, определенную на некотором интервале I и такую, что на I пара $(\overline{x}(t), \overline{u}(t))$ удовлетворяет системе (3), $\psi(t) = (\psi_x(t), \psi_t(t))$ — сопряженной системе (6) и на $I \times U$ выполнены условия максимума (7). Компоненту $\psi(t)$, $t \in I$, биэкстремали γ назовем *сопряженной* или *коэкстремалью*, а компоненту $(\overline{x}(t), \overline{u}(t) \mid t \in I)$ — экстремалью. Биэкстремаль называется *тривиальной*, если $\psi(t) \equiv 0$ на I, и *нетривиальной* — в противном случае.

Обратим внимание, что в задачах с нефиксированным временем биэкстремали рассматриваются на интервале $I \supset \overline{\Delta}$ [11]; при фиксированных t_0, t_1 можно положить $I = \Delta = [t_0, t_1]$.

Кроме того, заметим, что компонента ψ_t определяется через $\psi_x, \overline{x}, \overline{u}$ и функцию H однозначно ($\psi_t = -H$ в силу условия максимума (7)). Поэтому иногда ее не включают в биэкстремальный набор. Но в гладких задачах со свободным временем ее рассмотрение представляется полезным (см. аргументацию в [12], с. 11).

Таким образом, понятия биэкстремали и экстремали связаны только с управляемой системой и не зависят от функционала и концевых ограничений задачи оптимизации. Между тем, решение последней следует искать среди биэкстремалей, удовлетворяющих концевым ограничениям и условиям трансверсальности при выборе отрезка $\overline{\Delta} \subset I$. Ясно также, что тривиальные биэкстремали (которых никак не меньше, чем допустимых процессов системы (3)) представляют мало интереса; в случае тривиальной биэкстремали задачи концы их траекторных компонент находятся не в общем положении относительно функционала и терминальных ограничений (см. [12], с. 23).

Далее будем иметь дело только с множеством биэкстремалей, соответствующим фиксированному процессу $\overline{\sigma}$.

3. Достаточные условия оптимальности

Пусть Q — открытое множество в пространстве (t, x), содержащее график траектории $\overline{x}(t)$, и $\gamma = (\psi(t), \overline{\sigma})$ — некоторая биэкстремаль системы, определенная на интервале $I = \mathrm{pr}_t\, Q \supset \overline{\Delta}$.

Наряду с функцией Понтрягина H введем *гамильтониан*

$$\mathcal{H}(t, x, \psi_x) = \sup\{H(t, x, \psi_x, u) \mid u \in U\}$$

с областью определения

$$\mathrm{dom}\, \mathcal{H} = \{(t, x, \psi_x) \mid \mathcal{H}(t, x, \psi_x) < \infty\}.$$

Отметим, что $\forall\, \lambda \in M$

$$\mathcal{H}(t, \overline{x}(t), \psi_x(t)) = H(t, \overline{x}(t), \psi_x(t), \overline{u}(t)) \quad \text{на} \quad I$$

и $(t, \overline{x}(t), \psi_x(t)) \in \mathrm{dom}\, \mathcal{H}$. Эти условия справедливы также для любой биэкстремали.

Определим для γ и Q следующие *расширенные условия максимума* понтрягиана и гамильтониана, связанные с сопряженной компонентой биэкстремали.

Условие $(MH \mid \gamma, Q)$. Почти всюду на I

$$H(t, \overline{x}(t), \psi_x(t), \overline{u}(t)) + \dot{\psi}_x(t)\overline{x}(t) = \max\{H(t, x, \psi_x(t), u) + \dot{\psi}_x(t)x \mid x \in Q(t),\ u \in U\}.$$

Условие $(M\mathcal{H} \mid \gamma, Q)$. Почти всюду на I

$$\mathcal{H}(t, \overline{x}(t), \psi_x(t)) + \dot{\psi}_x(t)\overline{x}(t) = \max\{\mathcal{H}(t, x, \psi_x(t)) + \dot{\psi}_x(t)x \mid x \in Q(t)\}$$

и справедливо супердифференциальное сопряженное включение

$$-\dot{\psi}_x(t) \in \partial_x \mathcal{H}(t, \overline{x}(t), \psi_x(t)), \quad t \in I. \tag{8}$$

Пусть $\{\gamma^a \mid a \in \mathcal{A}\}$ — произвольное семейство биэкстремалей, каждая из которых удовлетворяет одному из эквивалентных условий максимума $(MH \mid \gamma^a, Q)$ или $(M\mathcal{H} \mid \gamma^a, Q)$. Тогда семейство коэкстремалей $\{\psi^a(t) \mid a \in \mathcal{A}\}$ назовем *порождающим на множестве* Q.

Каждой коэкстремали $\psi^a(t)$ порождающего семейства сопоставим линейную функцию $x \to \varphi(t,x)$, положив

$$\varphi^a(t,x) = \langle \psi_x^a(t), x - \overline{x}(t)\rangle, \quad a \in \mathcal{A}. \tag{9}$$

Легко проверяется, что функции $\varphi^a(t,x)$ обладают свойством Ляпунова–Кротова, т. е. не возрастают вдоль траекторий динамической системы, графики которых проходят по множеству Q. Поэтому для таких траекторий выполняется концевое неравенство

$$\Delta\varphi^a(b) := \varphi^a(t_1, x(t_1)) - \varphi^a(t_0, x(t_0)) \le 0, \quad a \in \mathcal{A}. \tag{10}$$

Основным результатом статьи является

Теорема 1. *Пусть для процесса $\overline{\sigma}$ существует такое порождающее семейство коэкстремалей $\{\psi^a(t) \mid a \in \mathcal{A}\}$ на множестве Q, что точка $\overline{b} = (\overline{t}_0, \overline{x}(\overline{t}_0); \overline{t}_1, \overline{x}(\overline{t}_1))$ является глобальным решением следующей концевой задачи $EP(Q,\mathcal{A})$:*

$$\begin{gathered} l_0(b) \to \min, \quad l(b) \le 0, \quad k(b) = 0, \\ \Delta\varphi^a(b) \le 0 \ \ \forall\, a \in \mathcal{A}, \quad b \in Q \times Q. \end{gathered}$$

Тогда $\overline{\sigma}$ — глобально оптимальный процесс в задаче $P(Q)$, реализующий сильный минимум в задаче P.

Доказательство. Введем *множество достижимости динамической системы в Q*, определив его равенством

$$D(Q) = \{b = (t_0, x_0;\, t_1, x_1) \,\big|\, \exists \text{ траектория } x(t) \mid [t_0, t_1] : (t, x(t)) \in Q, \ \ x(t_0) = x_0, \ \ x(t_1) = x_1\}$$

(т. е. в $D(Q)$ входят пары точек множества Q, соединимых траекториями системы с графиками из Q).

Из неравенств (10) следует, что функции семейства (9) порождают *внешнюю оценку* множества $D(Q)$, т. е. справедливо включение

$$D(Q) \subset \Omega(\mathcal{A}) := \{b \mid \Delta\varphi^a(b) \le 0 \ \forall\, a \in \mathcal{A}\}.$$

Отсюда с очевидностью вытекает справедливость данного утверждения. $\square$

Расширенные условия максимума в определении порождающего семейства (и в теореме 1) могут быть заменены на более жесткие *условия вогнутости* понтрягиана и гамильтониана, которые формулируются следующим образом (в предположении о выпуклости всех сечений $Q(t)$ на интервале I).

Условие $(CH \mid \gamma, Q)$ для задач с выпуклым множеством U. При всех $t \in I$ функция $(x,u) \to H(t, x, \psi_x(t), u)$ вогнута на $Q(t) \times U$.

Условие $(C\mathcal{H} \mid \gamma, Q)$. При $t \in I$ функция $x \to \mathcal{H}(t, x, \psi_x(t))$ вогнута на $Q(t)$ и справедливо сопряженное включение (8).

Имеет место очевидное

Следствие 1. Утверждение теоремы 1 остается справедливым, если в определении порождающего семейства условия максимума $(MH \mid \gamma^a, Q)$ или $(M\mathcal{H} \mid \gamma^a, Q)$ заменить на условия вогнутости $(CH \mid \gamma^a, Q)$ или $(C\mathcal{H} \mid \gamma^a, Q)$ соответственно.

В заключение этого параграфа укажем на связь теоремы 1 с негладкими функциями Ляпунова–Кротова.

Предположим, что множество $\mathcal{A}$ — некоторый компакт, и введем функцию максимума

$$\varphi(t,x) = \max\{\varphi^a(t,x) \mid a \in \mathcal{A}\}, \tag{11}$$

где φ^a — введенные выше линейные функции, соответствующие порождающему семейству. Функция $\varphi(t,x)$ обладает следующими свойствами:

1) $\varphi(t,x)$ — конечная выпуклая функция по x (как верхняя огибающая семейства линейных функций) и, следовательно, локально липшицевая по (t,x);
2) $\varphi(t,x)$ удовлетворяет обобщенному неравенству Ляпунова–Кротова $D^+\varphi(t,x) \le 0$, где слева стоит верхняя правая производная Дини вдоль решений динамической системы ([15], с. 269); следовательно, φ обладает свойством Ляпунова–Кротова, причем $D^+\varphi(t,\overline{x}(t)) = 0$ на Δ;
3) частный субдифференциал по x функции φ вдоль процесса $\overline{\sigma}$ описывается равенством $\partial_x\varphi(t,\overline{x}(t)) = \mathrm{co}\{\psi_x^a(t) \mid a \in \mathcal{A}\}$, $\overline{A} := \{a \in A \mid \exists \lim\limits_{n\to\infty} \Delta\varphi^a(b_n) = 0\}$;
4) ограничение $b \in \Omega(\mathcal{A})$ в концевой задаче $EP(\mathcal{A})$ равносильно неравенству $\Delta\varphi(b) \le 0$, что очевидно.

Из этих свойств вытекает

Следствие 2. Пусть процесс $\overline{\sigma}$ и семейство $\{\psi_x^a(t) \mid a \in \mathcal{A}\}$ удовлетворяют достаточным условиям теоремы 1, причем $\mathcal{A}$ — компакт. Тогда функция $\varphi(t,x)$, определенная равенством (11), обладает свойствами 1)–4), а точка $\overline{b}$ является решением конечномерной задачи

$$l_0(b) \to \min,$$
$$l(b) \le 0, \quad k(b) = 0, \quad \Delta\varphi(b) \le 0.$$

Таким образом, общность теоремы 1 проявляется, в частности, в том, что она гарантирует существование разрешающей функции типа Кротова, которая не обладает свойством гладкости.

4. Иллюстрирующие примеры

Для иллюстрации достаточных условий теоремы 1 рассмотрим ряд примеров, обладающих той или иной аномалией, вызывающей неприменимость методов Беллмана и Кротова, а также негативный пример 5, показывающий ограниченность возможностей порождающего семейства из линейных функций.

Пример 1 ([16], с. 147). $\dot{x}_1 = u_1$, $\dot{x}_2 = u_2$, $u_1^2 + u_2^2 \le 1$, $x_1(0) = x_2(0) = 0$, $x_1(1) = 1$, $J = x_2(1) \to \min$.

В этой линейной задаче имеется единственный допустимый (а значит, и оптимальный) процесс $\overline{\sigma} = (\overline{x}(t) = (t,0),\ \overline{u}(t) = (1,0))$, который является анормальной экстремалью задачи. Вследствие этого даже липшицевой локальной функции Беллмана не существует ([16], с. 147).

Каждый нормированный набор $\lambda \in M$ для $\overline{\sigma}$ характеризуется условиями

$$\psi_{x1} \equiv -\beta \ge 0, \quad \psi_{x2} \equiv -\alpha_0 \le 0, \quad \alpha_0 - \beta = 1$$

(при $\beta = -1$ $\alpha_0 = 0$, что и указывает на анормальность $\overline{\sigma}$). Следуя интерпретации множества $\mathcal{A}$, возьмем порождающие функции вида $\psi_x^a = (-\beta, -\alpha_0)$, где $a = (\alpha_0, \beta)$ и $\alpha_0 \ge 0$, $\beta \le 0$, $\alpha_0 - \beta > 0$ (даже без нормировки). Им соответствует семейство вспомогательных функций $\varphi^a(t,x) = -\beta x_1 - \alpha_0 x_2 + \beta t$. Расширенное условие максимума (MH) здесь выполняется:

$$\max\{-\beta u_1 - \alpha_0 u_2 \mid u \in U\} = -\beta\overline{u}_1 - \alpha_0\overline{u}_2 = -\beta.$$

Из задачи EP

$$x_2(1) \to \min, \quad -\alpha_0 x_2(1) \le 0 \ \ \forall\, \alpha_0 \ge 0$$

получаем $\overline{x}_2(1) = 0$, и процесс $\overline{\sigma}$ глобально оптимален.

Пример 2 ([10], с. 21). Пусть $q_j(\eta_1,\eta_2)$, $j=1,2,3$, — квадратичные формы, каждая из которых не является неотрицательно определенной, но $\max\limits_{1\le j\le 3} q_j(\eta_1,\eta_2)>0\ \ \forall\,\eta=(\eta_1,\eta_2)\ne 0$ (напр., $q_1=\eta_1^2-\eta_2^2$, $q_{2,3}=\pm(\eta_2\mp\eta_1)\eta_1$). Рассмотрим задачу оптимального управления

$$J=x_1(1)\to\min,\quad -x_1(1)+q_j(x_2(1),x_3(1))+c_jx_4(1)\le 0,\quad j=1,2,3,$$
$$\dot x_i=u_i,\quad |u_i|\le N,\quad i=1,2,3,\quad \dot x_4=\sum_{i=1}^{3}x_i^2,$$
$$x_k(0)=0,\quad k=\overline{1,4},$$

где $c_j=\mathrm{const}>0$.

В этом примере процесс $\overline{\sigma}=0$ удовлетворяет ПМ, причем множество M нормированных наборов множителей λ состоит более чем из одной точки и описывается условиями

$$\alpha_0=1,\ \ \sum_{j=1}^{3}\alpha_j=1,\quad \alpha_j\ge 0,\quad \psi_{xi}\equiv 0,\quad i=1,2,3,\quad \psi_{x4}\equiv-\sum_{j=1}^{3}c_j\alpha_j.$$

Теорема 1 помогает найти порождающее семейство коэкстремалей

$$\Big\{\psi_x^a=(0,0,0,-a)\ \Big|\ a=\sum_{j=1}^{3}c_j\alpha_j>0\Big\},$$

которому соответствует семейство вспомогательных функций $\{\varphi^a(x)=-ax_4\mid a>0\}$. Легко проверить, что каждая из порождающих функций обеспечивает расширенное условие максимума (MH) в глобальной форме

$$\max\Big\{\sum_{i=1}^{3}\psi_{xi}u_i+\psi_{x4}\sum_{i=1}^{3}x_i^2\ \Big|\ (x,u)\in R^{d(x)}\times U\Big\}=0.$$

Глобальная задача EP такова:

$$x_1(1)\to\min,\quad -x_1(1)+q_j(x_2(1),x_3(1))+c_jx_4(1)\le 0,$$
$$j=1,2,3,\quad -ax_4(1)\le 0\ \ \forall\,a>0.$$

Из последнего неравенства следует, что $x_4(1)\ge 0$, а остальные ограничения дают оценку снизу функционала

$$x_1(1)\ge\max_{1\le j\le 3}q_j(x_2(1),x_3(1))\ge 0$$

по свойству форм q_j, причем равенство достигается только при $\overline{x}_k(1)=0$, $k=\overline{1,4}$. Отсюда заключаем, что процесс $\overline{\sigma}=(\overline{x}=0,\ \overline{u}=0\mid t\in[0,1])$ доставляет глобальный минимум функционалу при любом $N>0$ и даже при отсутствии ограничений на управления ($U=R^3$). Заметим, что в последнем случае уравнение Гамильтона–Якоби не имеет решений.

В данном примере при неформальном анализе задачи EP “хватило” бы и одной функции $\psi_x=(0,0,0,-1)$. Но при использовании необходимых и достаточных условий минимума в задаче EP, соответствующей только этой функции, это не привело бы к цели: в точке $\overline{x}(1)=0$ оказались бы не выполненными даже необходимые условия локального минимума второго порядка ([14]; [17], с. 289). Причина состоит в неединственности множителей Лагранжа, которая наследуется и концевой задачей. По той же причине здесь не существует гладкой функции Кротова.

Пример 3. $\dot x=0\cdot u,\ \ |u|\le 1,\ J=x(0)x(1)\to\min.$

В этом примере не существует гладкой функции Кротова ([10], с. 22). Экстремали Понтрягина $\overline{\sigma} = 0$ соответствует единственная компонента $\psi_x(t) = 0$ в то время, как ψ_x-компонент биэкстремалей бесчисленное множество в виде любой константы. Порождающее семейство достаточно взять из двух компонент $\psi_x^{1,2} = \pm 1$ и отвечающих им функций $\varphi^{1,2} = \pm x$ (очевидно, удовлетворяющих уравнению Гамильтона–Якоби). Теорема 1 срабатывает и устанавливает глобальную оптимальность $\overline{\sigma}$.

Этот пример показывает важность понятия биэкстремали системы, множественность ψ_x-компонент которой можно использовать в достаточных условиях оптимальности даже в задачах *без терминальных ограничений,* когда сопряженная траектория в ПМ заведомо единственная.

Пример 4 ([13], с. 56). $\dot{x} = u$, $\dot{y} = x^2$, $x(0) = p$, $x(1) = q$, $y(0) = 0$, $|u| \le 1$, $J = y(1) \to \min$, где концевые точки p, q удовлетворяют условиям $p, q > 0$, $p + q < 1$.

Принципу максимума удовлетворяет следующий процесс:

$$\overline{x}(t) = \begin{cases} p - t, & t \in \Delta_1; \\ 0, & t \in \Delta_2; \\ q + t - 1, & t \in \Delta_3, \end{cases} \qquad \overline{u}(t) = \begin{cases} -1, & t \in \Delta_1; \\ 0, & t \in \Delta_2; \\ 1, & t \in \Delta_3, \end{cases}$$

где $\Delta_1 = [0, p]$, $\Delta_2 = [p, 1-q]$, $\Delta_3 = (1-q, 1]$, причем $J(\overline{\sigma}) = \overline{y}(1) = (p^3 + q^3)/3$,

$$\psi_x(t) = \begin{cases} -(p-t)^2, & t \in \Delta_1; \\ 0, & t \in \Delta_2; \\ (q+t+1)^2, & t \in \Delta_3, \end{cases} \quad \psi_y \equiv -1$$

— единственная сопряженная траектория. Для соответствующей ей линейной функции φ выполнены оба условия $(C\mathcal{H})$ и (CH) в глобальной форме, а задача EP элементарна, т. е.

$$y(1) \to \min, \quad y(1) \ge (p^3 + q^3)/3 = J(\overline{\sigma}).$$

Поэтому $\overline{\sigma}$ — глобально оптимальный процесс.

Этот пример показателен тем, что исследуемая экстремаль относится к "смешанному" типу, т. е. имеет интервалы неособого (Δ_1, Δ_3) и особого управления (Δ_2), и ее оптимальность устанавливается без привлечения информации о существовании оптимального решения и единственности экстремали Понтрягина.

Пример 5 (негативный). $\dot{x}_1 = 0$, $\dot{x}_2 = x_1 u$, $x_1(0) = 0$, $|u| \le 1$, $J = x_2(0)x_2(1) \to \min$.

В этом примере липшицевой функции Кротова также не существует из-за наличия инвариантного многообразия $\{x |\ x_1 = 0\}$ и специфики функционала. Здесь $\overline{\sigma} = 0$ — очевидное глобальное решение. Для него условия экстремальности сводятся к тому, что ψ_{x1}, ψ_{x2} — произвольные константы (т. е. биэкстремалей бесчисленное множество), но гамильтониан

$$\mathcal{H} = |x_1 \psi_{x1}| = |\psi_{x1}| \cdot |x_1|$$

является выпуклым для всех $\psi_x = (\psi_{x1}, \psi_{x2})$. Следовательно, здесь невозможно построить порождающее семейство линейных функций и теорема 1 не работает.

В то же время нетрудно проверить, что уравнение Гамильтона–Якоби

$$|x_1 \varphi_{x_2}| + \varphi_t = 0$$

имеет, в частности, два гладких решения $\varphi^{1,2} = \pm x_1$ и пару обобщенных, липшицевых решений $\varphi^{3,4} = \pm x_2 - t|x_1|$, понимаемых в смысле ([18]; [19], с. 454). Они образуют разрешающее семейство в канонической теории, причем разрешающей будет также единственная липшицевая функция $\varphi(t, x) = \max\limits_{1 \le j \le 4} \varphi^j(t, x)$. Очевидно, что ее можно представить и как максимум семейства из шести линейных (по x) функций. Это показывает, что обращение следствия 2 не имеет места.

5. Приложение: квадратичные достаточные условия оптимальности в задаче быстродействия

Детализируем теорему 1 для двухточечной задачи быстродействия:

$$J = t_1 - t_0 \to \min, \quad x(t_0) = x_0, \quad x(t_1) = x_1,$$
$$\dot{x} = f(t, x, u), \quad u(t) \in U.$$

Обозначим ее через P_T (можно считать $T = t_1 - t_0$).

Для нее $\lambda = (\alpha_0, \beta_0, \beta_1, \psi(t))$,

$$L^\lambda = \alpha_0(t_1 - t_0) + \beta_0(x(t_0) - x_0) + \beta_1(x(t_1) - x_1)$$

и условия трансверсальности из ПМ дают равенства

$$\psi_x(\bar{t}_0) = \beta_0, \quad \psi_x(\bar{t}_1) = -\beta_1, \quad \psi_t(\bar{t}_0) = \psi_t(\bar{t}_1) = -\alpha_0, \tag{12}$$

так что первое из условий максимума (7) при $t = \bar{t}_0, \bar{t}_1$ примет вид

$$H^\lambda\,[\,\bar{t}_0] = H^\lambda\,[\,\bar{t}_1] = \alpha_0 \geq 0. \tag{13}$$

Здесь запись $H^\lambda\,[t]$ означает подсчет функции H^λ вдоль исследуемого процесса $\overline{\sigma}$ и соответствующей коэкстремали.

Из (12) следует, что множители β_0, β_1 могут быть исключены, так что набор λ можно отождествить с $(\alpha_0, \psi(t))$. Таким образом, ПМ для задачи P_T сводится к условию существования нетривиального решения $\psi(t)$ системы (6), для которого выполняются соотношения условия максимума (7) и условия трансверсальности (13). Соответственно, множество M в задаче P_T состоит из наборов $\lambda = (\alpha_0, \psi(t))$ с указанными свойствами.

Пусть $\{\psi^a(t) \mid a \in \mathcal{A}\}$ — некоторое порождающее семейство коэкстремалей на множестве Q, причем множество “индексов” $\mathcal{A}$ является компактом. Рассмотрим локальные условия оптимальности точки $\bar{b} = (\bar{t}_0, \bar{t}_1)$ в концевой задаче EP

$$\begin{gathered} t_1 - t_0 \to \min, \quad t_0, t_1 \in I = \mathrm{pr}_t\ Q, \\ \psi^a_x(t_1)(x_1 - \overline{x}(t_1)) - \psi^a_x(t_0)(x_0 - \overline{x}(t_0)) \leq 0 \ \ \forall\, a \in \mathcal{A}. \end{gathered} \tag{14}$$

Предположим, что управление $\overline{u}(t)$ является гладким в окрестности точек $\bar{t}_0$, $\bar{t}_1$. Тогда (14) — конечномерная задача оптимизации с функциями из C^2, с континиумом ограничений и функцией Лагранжа

$$\Phi(t_0, t_1) = \alpha_0(t_1 - t_0) + \int_{\mathcal{A}} \Delta\varphi^a(t_0, t_1)da,$$

где da — вероятностная мера на $\mathcal{A}$.

Необходимые условия первого порядка для задачи (14) состоят в следующем ([14]; [20]; [21], сс. 7, 9): существует набор множителей $\mu = (\alpha_0, c, \gamma_1, \ldots, \gamma_k)$, $k \leq 3$, и точки $a_1, \ldots, a_k$ из $\mathcal{A}$ такие, что выполняются условия

$$\alpha_0 \geq 0, \quad c \geq 0, \quad \alpha_0 + c > 0, \quad \gamma_i \geq 0, \quad \sum_{i=1}^{k} \gamma_i = 1, \tag{15}$$

$$-\alpha_0 + c\sum_{i=1}^{k} \gamma_i H^{a_i}\,[\,\bar{t}_0] = -\alpha_0 - c\sum_{i=1}^{k} \gamma_i \psi_t^{a_i}\,[\,\bar{t}_0] = 0, \tag{16}$$

$$\alpha_0 - c\sum_{i=1}^{k} \gamma_i H^{a_i}\,[\,\bar{t}_1] = \alpha_0 + c\sum_{i=1}^{k} \gamma_i \psi_t^{a_i}\,[\,\bar{t}_1] = 0, \tag{17}$$

где $H^a\,[t] = H(t, \overline{x}(t), \psi^a_x(t), \overline{u}(t))$. Равенства (16), (17) — это условия обращения в нуль квазиградиента функции Φ в точке $\bar{b}$.

Положим $\psi(t) = (\psi_x(t), \psi_t(t))$, где

$$\psi_q(t) = c\sum_{i=1}^{k} \gamma_i \psi_q^{a_i}(t), \quad q = x, t. \tag{18}$$

Тогда $\psi(t)$ — коэкстремаль на интервале I в силу линейности сопряженной системы для функции $\psi \to H$ и неотрицательности c, γ_i. Более того, из (16), (17) следует, что $\psi(t)$ удовлетворяет условиям трансверсальности (13) и, следовательно, $(\alpha_0, \psi(t)) \in M$, если только $\psi(t) \not\equiv 0$ (если порождающее семейство обеспечивает выполнение достаточных условий, то такие $\psi(t)$ из (18) с необходимостью найдутся). Из (18) заключаем, что *коническая оболочка порождающего семейства обязательно содержит коэкстремали Понтрягина* (этот факт имеет место и в задаче P [11]).

Если множество коэкстремалей Понтрягина обозначить через Ψ (оно совпадает с образом оператора проектирования $\lambda \in M \to \psi(t)$), а порождающее семейство — через $\Psi(\mathcal{A})$, то сказанное означает, что

$$\overline{\Psi} := \operatorname{con} \Psi(\mathcal{A}) \cap \Psi \neq \emptyset \tag{19}$$

($\operatorname{con} C$ — коническая оболочка множества C). Такова связь достаточных условий оптимальности с ПМ (в первом порядке).

Перейдем теперь к достаточным условиям локального минимума в концевой задаче (14), предположив дополнительно, что множество $\mathcal{A}$ конечно: $\mathcal{A} = \{1, \ldots, m\}$.

Наиболее простое из таких условий (фактически первого порядка) состоит в отсутствии ненулевых критических вариаций $(\delta t_0, \delta t_1)$ в точке $\overline{b}$ [14]. Критический конус $\mathcal{K}_T$ для задачи (14) получается ее линеаризацией и описывается условиями

$$\delta t_1 - \delta t_0 \leq 0, \quad H^a(t_0)\delta t_0 - H^a(t_1)\delta t_1 \leq 0, \quad a = \overline{1, m}. \tag{20}$$

Условие $\mathcal{K}_T \setminus \{0\} = \emptyset$ гарантирует локальный минимум в точке $\overline{b}$.

Рассмотрим частный случай, когда $\Psi(\mathcal{A}) = \{\psi(t) \in \Psi\}$ — одноэлементное множество из коэкстремали ПМ (с одним из расширенных условий максимума). Тогда из (13) и (20) получим

$$\mathcal{K}_T : \delta t_1 - \delta t_0 \leq 0, \quad \alpha_0(\delta t_0 - \delta t_1) \leq 0.$$

При $\alpha_0 > 0$ этот конус переходит в прямую $\delta t_1 = \delta t_0$, но если один из моментов времени t_0 или t_1 фиксирован, то он сводится к нулевой вариации. Следовательно, для таких задач нормальность экстремали ПМ плюс расширенное условие максимума гарантируют наличие сильного минимума.

Рассмотрим теперь квадратичные достаточные условия минимума в задаче (14) при конечном множестве $\mathcal{A}$ и нетривиальном конусе $\mathcal{K}_T$. Положив в этом случае

$$\nu_i = c\gamma_i \geq 0, \quad \omega = (\alpha_0, \nu) \in R_+^1 \times R_+^m, \tag{21}$$

перепишем лагранжиан Φ в следующем виде:

$$\Phi^\omega(t_0, t_1) = \alpha_0(t_1 - t_0) + \sum_{i=1}^{m} \nu_i \Delta\varphi^i(t_0, t_1).$$

Ясно, что его стационарность в точке $\overline{b}$ равносильна условиям (15)–(18) (с учетом обозначений (21)) и сводится к условию $M \neq \emptyset$, причем множество Ω наборов множителей Лагранжа для точки $\overline{b}$ можно отождествить с $\overline{\Psi}$. Второй дифференциал лагранжиана, как нетрудно проверить, имеет вид

$$d^2\Phi^\omega(\overline{b})\,[\delta t_0, \delta t_1] = C_0(\psi)\delta t_0^2 - C_1(\psi)\delta t_1^2,$$

где постоянные $C_0(\psi)$, $C_1(\psi)$ определены равенством

$$C_s(\psi) = \dot{H}^\lambda\,[\,\overline{t}_s] + \langle \dot{\psi}_x(\overline{t}_s), \dot{\overline{x}}(\overline{t}_s) \rangle, \quad s = 0, 1.$$

Как известно [14], неравенство

$$\max_{\psi \in \overline{\Psi}} d^2\Phi^\omega(\overline{b})\,[\delta t_0, \delta t_1] > 0 \,|\, \mathcal{K}_T \setminus \{0\}$$

гарантирует строгий локальный минимум в точке $\overline{b}$ в задаче EP.

Подведем итоги проведенному анализу.

Теорема 2. *Пусть для процесса $\overline{\sigma}$ в задаче P_T существует такое конечное порождающее семейство коэкстремалей $\Psi(\mathcal{A})$ на открытом множестве Q, что выполняются равенство* (19) *и неравенство*

$$\max_{\psi \in \overline{\Psi}} [C_0(\psi)\delta t_0^2 - C_1(\psi)\delta t_1^2] > 0 \,|\, \mathcal{K}_T \setminus \{0\}.$$

Тогда $\overline{\sigma}$ реализует сильный минимум в задаче P_T.

Следствие 3. Любое из следующих двух условий достаточно для сильного минимума на процессе $\overline{\sigma}$ в задаче P_T:

(а) $\mathcal{K}_T \setminus \{0\} = \emptyset$;

(б) один из моментов времени t_0, t_1 фиксирован, $\Psi(\mathcal{A}) = \{\psi(t) \in \Psi\}$ — одноэлементное порождающее множество, причем набор $\lambda = (1, \psi(t)) \in M$ (т. е. $\overline{\sigma}$ — нормальная экстремаль ПМ).

Отметим, что из (б) $\Rightarrow$ (а), но не наоборот.

6. Заключение

Анализ полученных в данной статье достаточных условий оптимальности и приведенных примеров показывает, насколько эффективным может быть применение семейства функций Ляпунова–Кротова даже самой простой линейной структуры. Представляет интерес исследование возможностей канонической теории из ([10], с. 31; [11]) с более богатым семейством линейно-квадратичных решений дифференциального неравенства Ляпунова–Кротова. Ясно, что соответствующие достаточные условия будут иметь более широкий спектр приложений, поскольку они более тонким образом, нежели теорема 1, будут гарантировать выполнение усиленного условия Якоби (отсутствия сопряженных точек) вдоль исследуемой экстремали Понтрягина, т.е. станут ближе примыкать к квадратичным необходимым условиям оптимальности [13], [14].

Литература

1. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. *Математическая теория оптимальных процессов.* – М.: Физматгиз, 1961. – 388 с.
2. Mangasarian O.L. *Control problems with kinks* // IEEE Trans. AC-15. – 1970. – P. 570–575.
3. Arrow K.J. *Application of control theory to economic growth* // Lect. in Appl. Math. / Math. of the decision sci. II. – 1968. – V. 12. – P. 85–119.
4. Эрроу К. *Применение теории управления к экономическому росту* // Математическая экономика / Под ред. Б.С. Митягина. – М.: Мир, 1974. – С. 7–45.
5. Благодатских В.И. *Достаточное условие оптимальности* // Дифференц. уравнения. – 1973. – Т. 9. – № 3. – С. 416–422.
6. Благодатских В.И., Филиппов А.Ф. *Дифференциальные включения и оптимальное управление* // Тр. МИАН СССР. – 1985. – Т. 169. – С. 195–252.
7. Кротов В.Ф., Гурман В.И. *Методы и задачи оптимального управления.* – М.: Наука, 1973. – 446 с.
8. Krotov V.F. *Global methods in optimal control theory.* – New York: Marcel Dekker, 1996. – 408 p.
9. Величенко В.В. *О методе поля экстремалей и достаточных условиях оптимальности* // Журн. вычисл. матем. и матем. физики. – 1974. – Т. 14. – № 1. – С. 45–67.

10. Дыхта В.А. *Принцип расширения в качественной теории управления* // Методы решения задач теории управления на основе принципа расширения / В.А. Батурин, В.А. Дыхта, А.И. Москаленко и др. – Новосибирск: Наука, 1990. – С. 5–48.
11. Dykhta V.A., Antipina N.V. *Sufficient optimality conditions for classical and impulsive optimal control problems* //Proc. of 10th IEEE Mediterranean Conf. on Control and Automation, (MED2002). – July 9 – July 12, 2002. – Lisbon, Portugal. – 10 p.
12. Афанасьев А.П., Дикусар В.В., Милютин А.А., Чуканов С.А. *Необходимое условие в оптимальном управлении.* – М.: Наука, 1990. – 319 с.
13. Milyutin A.A., Osmolovskii N.P. *Calculus of variations and optimal control*// Amer. Math. Soc. – Providence. Rhode Island. – 1998. – 372 p.
14. Левитин Е.С., Милютин А.А., Осмоловский Н.П. *Условия высших порядков в задачах с ограничениями* // УМН. – 1978. – Т. 33. – Вып. 6. – С. 85–147.
15. Руш Н., Абетс П., Лалуа М. *Прямой метод Ляпунова в теории устойчивости.* – М.: Мир, 1980. – 300 с.
16. Кларк Ф. *Оптимизация и негладкий анализ.* – М.: Наука, 1988. – 280 с.
17. Алексеев В.М., Тихомиров В.М., Фомин С.В. *Оптимальное управление.* – М.: Наука, 1979. – 429 с.
18. Vinter R.B. *Dynamic programming for optimal control problems with terminal constraints* // Lect. Notes Math. – 1985. – P. 190–202.
19. Vinter R.B. *Optimal control.* – Boston–Basel–Berlin: Burkhäuser. – 2000. – 504 p.
20. Дубовицкий А.Я., Милютин А.А. *Задачи на экстремум при наличии ограничений* // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. – 1965. – Т. 5. – № 3. – С. 395–453.
21. Пшеничный Б.Н. *Необходимые условия экстремума.* – М.: Наука, 1982. – 143 с.

Байкальский государственный
университет экономики и права

Поступила
02.09.2001