Известия вузов. Математика
2013, №6, с. 37–44

http://old.kpfu.ru/journals/izv_vuz/
e-mail: izvuz.matem@kpfu.ru

Р.Б. САЛИМОВ

К ПОВЕДЕНИЮ СИНГУЛЯРНОГО ИНТЕГРАЛА С ЯДРОМ ГИЛЬБЕРТА ВБЛИЗИ ТОЧКИ СЛАБОЙ НЕПРЕРЫВНОСТИ ПЛОТНОСТИ

Аннотация. Исследуется поведение сингулярного интеграла с ядром Гильберта вблизи фиксированной точки, в которой плотность обращается в нуль как величина, обратная модулю логарифма расстояния от переменной точки до фиксированной, и интеграл может расходиться.

Ключевые слова: сингулярный интеграл, ядро Гильберта, условие Гёльдера, слабая непрерывность.

УДК: 517.54

Рассмотрим сингулярный (в смысле главного значения) интеграл с ядром Гильберта

$$I(\gamma_0) = \int_0^{2\pi} \phi(\gamma) \operatorname{ctg} \frac{\gamma - \gamma_0}{2} d\gamma, \tag{1}$$

в котором плотность $\phi(\gamma)$, заданная в интервале $[0, 2\pi]$, — непрерывная функция, $\gamma_0 \in [0, 2\pi]$, $\phi(0) = \phi(2\pi)$. Как известно ([1], сс. 18, 46), этот интеграл в точке γ_0 существует, если в ней функция $\phi(\gamma)$ удовлетворяет условию Гёльдера — условию H. Если плотность $\phi(\gamma)$ удовлетворяет условию H в некоторой части интервала $[0, 2\pi]$, то в силу теоремы Племеля–Привалова ([1], сс. 59, 61) интеграл $I(\gamma_0)$ удовлетворяет условию H в любом замкнутом интервале, лежащем внутри указанной части. Поведение интеграла (1), когда плотность $\phi(\gamma)$ имеет интегрируемую особенность, устанавливается на основании результатов Н.И. Мусхелишвили ([1], сс. 95, 160), а также работы [2]. Вопрос о связи между модулями непрерывности сингулярного интеграла и его плотности рассмотрен в [3].

Если в фиксированной точке $\gamma = c$ интервала $(0, 2\pi)$ функция $\phi(\gamma)$, будучи непрерывной, не удовлетворяет условию H, то интеграл (1) в ней может расходиться, и возникает необходимость исследовать поведение интеграла (1) при $\gamma_0 \to c$ в таком случае.

В данной статье рассмотрим последний вопрос в предположении, что в содержащем внутри себя точку $\gamma = c$ интервале достаточно малой длины $[c^-, c^+]$, которую пока считаем меньше единицы и уточним далее, для плотности $\phi(\gamma)$ справедливо представление

$$\phi(\gamma) = \frac{\Phi(\gamma)}{\left|\ln \sin^2 \frac{\gamma - c}{2}\right|},$$

Поступила 19.03.2012

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 12-01-00636-а).

где $\Phi(\gamma)$ — заданная функция, удовлетворяющая условию Н в каждом из интервалов $[c^-, c]$, $[c, c^+]$ с неравными, вообще говоря, односторонними пределами $\Phi(c-0)$, $\Phi(c+0)$. Поведение интеграла $I(\gamma_0)$ вблизи точек c^-, c^+ не требует особого рассмотрения, если плотность $\phi(\gamma)$ удовлетворяет условию Н в окрестностях этих точек.

Для простоты считая $c^- > 0$, $c^+ < 2\pi$, интеграл (1) представим в виде

$$I(\gamma_0) = \left(\int_0^{c^-} + \int_{c^+}^{2\pi}\right)\phi(\gamma)\operatorname{ctg}\frac{\gamma-\gamma_0}{2}d\gamma + \int_{c^-}^{c^+}\frac{\Phi(\gamma)-\Phi(c\pm 0)}{\left|\ln\sin^2\frac{\gamma-c}{2}\right|}\operatorname{ctg}\frac{\gamma-\gamma_0}{2}d\gamma +$$
$$+\int_{c^-}^{c^+}\frac{\Phi(c\pm 0)}{\left|\ln\sin^2\frac{\gamma-c}{2}\right|}\operatorname{ctg}\frac{\gamma-\gamma_0}{2}d\gamma = J_1(\gamma_0)+J_2(\gamma_0)+J_3(\gamma_0)+J_4(\gamma_0), \quad \gamma_0\neq c, \tag{2}$$

здесь и в дальнейшем верхние знаки берутся при $\gamma > c$, нижние — при $\gamma < c$.

Интегралы $J_1(\gamma_0), J_2(\gamma_0)$ дифференцируемы в каждой внутренней точке γ_0 интервала $[c^-, c^+]$.

Разность $\Phi(\gamma)-\Phi(c\pm 0)$ удовлетворяет условию Н в каждом из интервалов $[c^-, c]$, $[c, c^+]$, обращается в нуль в точке $\gamma = c$, и производная ограниченной в этих интервалах функции имеет вид

$$\left[\frac{1}{\left|\ln\sin^2\frac{\gamma-c}{2}\right|}\right]'_\gamma = \frac{\operatorname{ctg}\frac{\gamma-c}{2}}{\left(\ln\sin^2\frac{\gamma-c}{2}\right)^2}, \tag{3}$$

поэтому плотность интеграла $J_3(\gamma_0)$ удовлетворяет условию Н в интервале $[c^-, c^+]$ ([1], с. 24). Следовательно, $J_3(\gamma_0)$ удовлетворяет условию Н в любой лежащей внутри интервала $[c^-, c^+]$ окрестности точки $\gamma = c$.

Интеграл $J_4(\gamma_0)$ удовлетворяет условию Н в любом замкнутом интервале, лежащем внутри $[c^-, c]$ или $[c, c^+]$, так как его плотность удовлетворяет условию Н в любой части каждого из этих интервалов, не содержащей точки c.

Остается рассмотреть поведение интеграла $J_4(\gamma_0)$ при $\gamma_0 \to c$. Здесь нам понадобится знание характера поведения производной формулы (3) вблизи точки $\gamma = c$, который зависит от знака $\left[1/\left|\ln\sin^2\frac{\gamma-c}{2}\right|\right]''_{\gamma\gamma}$. Но знак последней производной противоположен знаку производной $\left[\left(\ln\sin^2\frac{\gamma-c}{2}\right)^2\operatorname{tg}\frac{\gamma-c}{2}\right]'_\gamma$.

Замечая, что $\sin x < x$ для $x > 0$, при $0 < \gamma - c < 1$ получаем

$$\left[\left(\ln\sin^2\frac{\gamma-c}{2}\right)^2\operatorname{tg}\frac{\gamma-c}{2}\right]'_\gamma > \left|\ln\sin^2\frac{\gamma-c}{2}\right|\left(-2+\ln\frac{2}{\gamma-c}\right).$$

Здесь в правой части сумма в скобках обращается в нуль при $\gamma = c + 2e^{-2}$, оставаясь положительной для $c < \gamma < c + 2e^{-2}$. Следовательно, при $c < \gamma < c + 2e^{-2}$ имеем

$$\left[\left(\ln\sin^2\frac{\gamma-c}{2}\right)^2\operatorname{tg}\frac{\gamma-c}{2}\right]'_\gamma > 0. \tag{4}$$

(Отметим попутно, что следующий за точкой $\gamma = c+2e^{-2}$ нуль этой производной достаточно близок к точке $\gamma = c + 2e^{-2}$.) Нетрудно проверить, что неравенство (4) справедливо и для точек интервала $c - 2e^{-2} < \gamma < c$. Следовательно, производная, стоящая в левой части формулы (3), есть убывающая функция в интервале $c - 2e^{-2} < \gamma < c + 2e^{-2}$.

В дальнейшем концы последнего интервала возьмем в качестве входящих в формулу (2) чисел

$$c^- = c - 2e^{-2}, \quad c^+ = c + 2e^{-2}. \tag{5}$$

Интегрируя по частям (ср. [4]), последнее слагаемое формулы (2) представим в виде

$$J_4(\gamma_0) = \frac{\Phi(c+0)}{\left|\ln\sin^2\frac{c^+-c}{2}\right|}\ln\sin^2\frac{c^+-\gamma_0}{2} - \frac{\Phi(c-0)}{\left|\ln\sin^2\frac{c^--c}{2}\right|}\ln\sin^2\frac{c^--\gamma_0}{2} + K(\gamma_0), \quad \gamma_0 \neq c, \tag{6}$$

где

$$K(\gamma_0) = \int_{c^-}^{c^+}\frac{\Phi(c\pm 0)}{\left(\ln\sin^2\frac{\gamma-c}{2}\right)^2}\operatorname{ctg}\frac{\gamma-c}{2}\left|\ln\sin^2\frac{\gamma-\gamma_0}{2}\right|d\gamma. \tag{7}$$

Первые два слагаемых правой части формулы (6) дифференцируемы в любой внутренней точке γ_0 интервала (c^-, c^+). Следовательно, нужно исследовать поведение функции $K(\gamma_0)$ при $\gamma_0 \to c$.

Вначале рассмотрим случай $\gamma_0 > c$. При этом будем считать $\gamma_0 < c + e^{-2}$, принимая во внимание, что в дальнейшем разность $\gamma_0 - c$ предполагается бесконечно малой. Тогда с учетом (5) будем иметь $\gamma_0 < 2\gamma_0 - c < c + 2e^{-2} = c^+$.

Формулу (7) запишем в виде

$$K(\gamma_0) = \left(\int_{c^-}^{c} + \int_{c}^{\gamma_0} + \int_{\gamma_0}^{2\gamma_0-c} + \int_{2\gamma_0-c}^{c^+}\right)\frac{\Phi(c\pm 0)}{\left(\ln\sin^2\frac{\gamma-c}{2}\right)^2}\operatorname{ctg}\frac{\gamma-c}{2}\left|\ln\sin^2\frac{\gamma-\gamma_0}{2}\right|d\gamma =$$
$$= \Phi(c-0)K_1(\gamma_0) + \Phi(c+0)[K_2(\gamma_0) + K_3(\gamma_0) + K_4(\gamma_0)]. \tag{8}$$

Рассмотрим сначала поведение интеграла $K_2(\gamma_0)$. Его плотность $\frac{\operatorname{ctg}\frac{\gamma-c}{2}}{\left(\ln\sin^2\frac{\gamma-\gamma_0}{2}\right)^2}$ равна производной, стоящей в левой части формулы (3), и в силу (4) является положительной убывающей функцией в интервале интегрирования (c, γ_0), в котором $\left|\ln\sin^2\frac{\gamma-\gamma_0}{2}\right|$ представляет собой (положительную) возрастающую функцию. Поэтому интеграл $K_2(\gamma_0)$ удовлетворяет неравенству, аналогичному неравенству Чебышева ([5], сс. 179, 180) и справедливому для входящих в него несобственных интегралов,

$$0 < K_2(\gamma_0) \le \frac{1}{\gamma_0 - c}\int_c^{\gamma_0}\left|\ln\sin^2\frac{\gamma-\gamma_0}{2}\right|d\gamma\int_c^{\gamma_0}\frac{\operatorname{ctg}\frac{\gamma-c}{2}}{\left(\ln\sin^2\frac{\gamma-\gamma_0}{2}\right)^2}d\gamma.$$

С учетом (3) это соотношение запишем так:

$$0 < K_2(\gamma_0) \le \frac{1}{\left|\ln\sin^2\frac{\gamma_0-c}{2}\right|}\frac{1}{\gamma_0-c}\left[(\gamma_0-c)\left|\ln\sin^2\frac{c-\gamma_0}{2}\right| + \int_c^{\gamma_0}(\gamma-\gamma_0)\operatorname{ctg}\frac{\gamma-\gamma_0}{2}d\gamma\right].$$

Отсюда, принимая во внимание неравенство

$$0 < \int_c^{\gamma_0}(\gamma-\gamma_0)\operatorname{ctg}\frac{\gamma-\gamma_0}{2}d\gamma < d(\gamma_0-c), \quad d = \text{const}, \tag{9}$$

для $c < \gamma_0 < c^+$, придем к заключению, что интеграл $K_2(\gamma_0)$ — ограниченная функция при $\gamma_0 \to c$, т. е. является ограниченной в некотором интервале достаточно малой длины $(c, c+\varepsilon)$.

Плотность интеграла $K_3(\gamma_0)$ в интервале интегрирования $(\gamma_0, 2\gamma_0 - c)$ является положительной убывающей функцией. В указанном интервале $\left|\ln\sin^2\frac{\gamma-\gamma_0}{2}\right|$ представляет собой также положительную (убывающую) функцию, поэтому

$$0 < K_3(\gamma_0) < \frac{\operatorname{ctg}\frac{\gamma_0-c}{2}}{\left(\ln\sin^2\frac{\gamma_0-c}{2}\right)^2}\int_{\gamma_0}^{2\gamma_0-c}\left|\ln\sin^2\frac{\gamma-\gamma_0}{2}\right|d\gamma =$$

$$= \frac{\operatorname{ctg}\frac{\gamma_0-c}{2}}{\left(\ln\sin^2\frac{\gamma_0-c}{2}\right)^2}\left[(\gamma_0-c)\left|\ln\sin^2\frac{\gamma_0-c}{2}\right| + \int_{\gamma_0}^{2\gamma_0-c}(\gamma-\gamma_0)\operatorname{ctg}\frac{\gamma-\gamma_0}{2}d\gamma\right].$$

Для последнего интеграла этой формулы справедливо неравенство, аналогичное (9). Отсюда приходим к выводу, что $K_3(\gamma_0)\to 0$ при $\gamma_0\to c$.

Учитывая, что при фиксированном значении γ_0 производная $\left(\left|\ln\sin^2\frac{\gamma-\gamma_0}{2}\right|\right)'_\gamma = \operatorname{ctg}\frac{\gamma_0-\gamma}{2}$, имеем

$$K_1(\gamma_0) = -\ln\left|\ln\sin^2\frac{\gamma_0-c}{2}\right| + \ln\left|\ln\sin^2\frac{\gamma_0-c^-}{2}\right| - E_1(\gamma_0), \tag{10}$$

где

$$E_1(\gamma_0) = \int_{c^-}^{c} A(\gamma,\gamma_0,c)\left|\ln\sin^2\frac{\gamma-\gamma_0}{2}\right|d\gamma, \tag{11}$$

$$A(\gamma,\gamma_0,c) = \frac{\operatorname{ctg}\frac{c-\gamma}{2}}{\left(\ln\sin^2\frac{\gamma-c}{2}\right)^2} - \frac{\operatorname{ctg}\frac{\gamma_0-\gamma}{2}}{\left|\ln\sin^2\frac{\gamma-\gamma_0}{2}\right|^2}. \tag{12}$$

В интервале $c^- < \gamma < c$, когда $c < \gamma_0$, знак функции $A(\gamma,\gamma_0,c)$ совпадает со знаком разности

$$\left(\ln\sin^2\frac{\gamma_0-\gamma}{2}\right)^2\operatorname{tg}\frac{\gamma_0-\gamma}{2} - \left(\ln\sin^2\frac{c-\gamma}{2}\right)^2\operatorname{tg}\frac{c-\gamma}{2}, \tag{13}$$

которая представляет приращение функции $\left(\ln\sin^2\frac{\xi-\gamma}{2}\right)^2\operatorname{tg}\frac{\xi-\gamma}{2}$ в интервале $c<\xi<\gamma_0$ при фиксированном γ.

Согласно (4) (после замены γ на ξ и c на γ) имеем

$$\left[\left(\ln\sin^2\frac{\xi-\gamma}{2}\right)^2\operatorname{tg}\frac{\xi-\gamma}{2}\right]'_\xi > 0 \tag{14}$$

в любом из интервалов $\gamma<\xi<\gamma+2e^{-2}$, $\gamma-2e^{-2}<\xi<\gamma$ при фиксированном γ.

При значениях γ из интервала (γ_0-2e^{-2},c), длина которого меньше $2e^{-2}$, так как $c<\gamma_0$, множество интервалов $\gamma<\xi<\gamma+2e^{-2}$ имеет пересечение — интервал $c<\xi<\gamma_0$, для точек которого будет выполняться условие (14). Следовательно, для любого значения $\gamma\in(\gamma_0-2e^{-2},c)$ будет выполняться (14) в интервале $c<\xi<\gamma_0$ и разность (13) вместе с $A(\gamma,\gamma_0,c)$ будет положительной. Поэтому, обозначая

$$c^-_{\gamma_0} = \gamma_0 - 2e^{-2}, \tag{15}$$

когда $c^-_{\gamma_0} < c$ в силу неравенства $\gamma_0 < c+e^{-2}$, $c^-_{\gamma_0} > c^-$, для функции (12) будем иметь $A(\gamma,\gamma_0,c)>0$, $\gamma\in(c^-_{\gamma_0},c)$.

Интеграл (11) запишем в виде

$$E_1(\gamma_0) = \left(\int_{c^-}^{c^-_{\gamma_0}} + \int_{c^-_{\gamma_0}}^{c}\right)A(\gamma,\gamma_0,c)\left|\ln\sin^2\frac{\gamma-\gamma_0}{2}\right|d\gamma = E_{11}(\gamma_0)+E_{12}(\gamma_0). \tag{16}$$

Так как в интервале $c^-_{\gamma_0}<\gamma<c$ оба множителя подинтегральной функции положительны и $\left|\ln\sin^2\frac{\gamma-\gamma_0}{2}\right|$ возрастает, то с учетом явного выражения для интеграла от $A(\gamma,\gamma_0,c)$ по

интервалу $c^-_{\gamma_0} < \gamma < c$ получим

$$0 < E_{12}(\gamma_0) < \left|\ln\sin^2\frac{c-\gamma_0}{2}\right| \int_{c^-_{\gamma_0}}^{c} A(\gamma,\gamma_0,c)d\gamma =$$

$$= \left|\ln\sin^2\frac{c-\gamma_0}{2}\right| \left[-\frac{1}{\left|\ln\sin^2\frac{c-\gamma}{2}\right|} + \frac{1}{\left|\ln\sin^2\frac{\gamma_0-\gamma}{2}\right|}\right]\Bigg|_{\gamma=c^-_{\gamma_0}}^{\gamma=c}. \quad (17)$$

Отсюда

$$0 < E_{12}(\gamma_0) < 1 + \left|\ln\sin^2\frac{c-\gamma_0}{2}\right| \left[\frac{1}{\left|\ln\sin^2\left(\frac{c-\gamma_0}{2}+e^{-2}\right)\right|} - \frac{1}{\left|\ln\sin^2 e^{-2}\right|}\right]. \quad (18)$$

Здесь разность в квадратных скобках при $\gamma_0 \to c$ является бесконечно малой одного порядка с величиной

$$\ln\sin^2 e^{-2} - \ln\sin^2\left(\frac{c-\gamma_0}{2}+e^{-2}\right) = -2\ln\left[1 + (\operatorname{ctg} e^{-2})\sin\frac{c-\gamma_0}{2} - 2\sin^2\frac{c-\gamma_0}{4}\right],$$

которая, в свою очередь, является малой одного порядка с функцией $\sin\frac{c-\gamma_0}{2}$ при $\gamma_0 \to c$.

Поэтому произведение вышеуказанной разности и $\left|\ln\sin^2\frac{c-\gamma_0}{2}\right|$ имеет предел, равный нулю, при $\gamma_0 \to c$. Следовательно, $E_{12}(\gamma_0)$ является ограниченной функцией при $\gamma_0 \to c$.

В силу (15) получаем $c^-_{\gamma_0} \to (c - 2e^{-2}) = c^-$ при $\gamma_0 \to c$, в таком случае интеграл $E_{11}(\gamma_0)$ при $\gamma_0 \to c$ имеет предел, равный нулю. Действительно, у интеграла $E_{11}(\gamma_0)$ формулы (16), в которой $c^- = c - 2e^{-2}$, $c < \gamma_0 < c + e^{-2}$, $c^- < c^-_{\gamma_0} = \gamma_0 - 2e^{-2} < c - e^{-2}$, подинтегральная функция непрерывна в прямоугольнике, для которого $c^- \le \gamma \le c - e^{-2}$, $c \le \gamma_0 \le c + e^{-2}$, поэтому $E_{11}(\gamma_0)$ является непрерывной функцией в интервале $c \le \gamma_0 \le c + e^{-2}$ ([6], с. 679), и при $\gamma_0 \to c$, когда $c^-_{\gamma_0} \to c^-$ и $A(\gamma,\gamma_0,c) \to 0$ в силу (12), будем иметь $E_{11}(\gamma_0) \to 0$.

Таким образом, в формуле (10) для $K_1(\gamma_0)$ слагаемое $E_1(\gamma_0)$ в силу (16) есть функция, ограниченная при $\gamma_0 \to c$, как и второе слагаемое правой части формулы.

Для интеграла $K_4(\gamma_0)$ по аналогии с формулой (10) получим

$$K_4(\gamma_0) = \ln\left|\ln\sin^2\frac{c-\gamma_0}{2}\right| - \ln\left|\ln\sin^2\frac{c^+-\gamma_0}{2}\right| - E_4(\gamma_0), \quad (19)$$

где

$$E_4(\gamma_0) = \int_{2\gamma_0-c}^{c^+} A(\gamma,\gamma_0,c)\left|\ln\sin^2\frac{\gamma-\gamma_0}{2}\right|d\gamma, \quad (20)$$

$A(\gamma,\gamma_0,c)$ из (12), $c^+ = c + 2e^{-2}$.

Как и выше, знак величины $A(\gamma,\gamma_0,c)$ в интервале $2\gamma_0 - c < \gamma < c^+$ для $c < \gamma_0$ совпадает со знаком разности (13). Учтем, что неравенство (14) выполняется в интервале $\gamma - 2e^{-2} < \xi < \gamma$ при фиксированном γ. При значении γ из интервала $(2\gamma_0 - c, c^+)$, длина которого меньше $2e^{-2}$, поскольку $\gamma_0 > c$, множество интервалов $\gamma - 2e^{-2} < \xi < \gamma$ имеет пересечение, представляющее собой интервал $c < \xi < 2\gamma_0 - c$, содержащий внутри себя интервал $c < \xi < \gamma_0$. Следовательно, при любом значении $\gamma \in (2\gamma_0 - c, c^+)$ выполняется неравенство (14) для точек интервала $c < \xi < \gamma_0$ и разность (13) будет положительной вместе с функцией $A(\gamma,\gamma_0,c)$.

Так как в формуле (20) оба множителя подинтегральной функции положительны и $\left|\ln\sin^2\frac{\gamma-\gamma_0}{2}\right|$ убывает в интервале интегрирования, то по аналогии с (17) получаем

$$0<E_4(\gamma_0)<\left|\ln\sin^2\frac{\gamma_0-c}{2}\right|\left[-\frac{1}{\left|\ln\sin^2\frac{c-\gamma}{2}\right|}+\frac{1}{\left|\ln\sin^2\frac{\gamma_0-\gamma}{2}\right|}\right]\Bigg|_{\gamma=2\gamma_0-c}^{\gamma=c^+}.$$

На основании соображений, аналогичных использованным при исследовании соотношения (17), легко проверить, что здесь правая часть стремится к нулю при $\gamma_0\to c$. Поэтому $E_4(\gamma_0)\to 0$ при $\gamma_0\to c$.

Теперь на основании формул (8), (10), (19) получаем представление

$$K(\gamma_0)=[\Phi(c+0)-\Phi(c-0)]\ln\left|\ln\sin^2\frac{\gamma_0-c}{2}\right|+K_0(\gamma_0),$$

где $K_0(\gamma_0)$ — функция, ограниченная при $\gamma_0\to c$.

Из формул (2), (6) видно, что для интеграла $I(\gamma_0)$ справедливо аналогичное представление

$$I(\gamma_0)=[\Phi(c+0)-\Phi(c-0)]\ln\left|\ln\sin^2\frac{\gamma_0-c}{2}\right|+I_1(\gamma_0),\tag{21}$$

где $I_1(\gamma_0)$ — функция, ограниченная при $\gamma_0\to c$.

Остановимся теперь на случае $\gamma_0<c$. Будем считать, что $\gamma_0>c-e^{-2}$, тогда $\gamma_0>2\gamma_0-c>c-2e^{-2}=c^-$. Интеграл формулы (7) по аналогии с (8) запишем так:

$$K(\gamma_0)=-\Phi(c-0)[K_1^*(\gamma_0)+K_2^*(\gamma_0)+K_3^*(\gamma_0)]-\Phi(c+0)K_4^*(\gamma_0),\tag{22}$$

где $K_j^*(\gamma_0)$, $j=1,2,3,4,$ — интегралы, взятые по интервалам $(c^-,2\gamma_0-c)$, $(2\gamma_0-c,\gamma_0)$, (γ_0,c), (c,c^+) соответственно.

Поступая так же, как и при исследовании поведения $K_2(\gamma_0)$, убедимся в том, что $K_3^*(\gamma_0)$ является функцией, ограниченной при $\gamma_0\to c$. Рассуждая так же, как и при оценке поведения $K_3(\gamma_0)$, покажем, что $K_2^*(\gamma_0)\to 0$ при $\gamma_0\to c$.

Нетрудно проверить, что для $K_1^*(\gamma_0)$ справедлива формула, аналогичная (10),

$$K_1^*(\gamma_0)=\ln\left|\ln\sin^2\frac{\gamma_0-c}{2}\right|-\ln\left|\ln\sin^2\frac{\gamma_0-c^-}{2}\right|-E_1^*(\gamma_0),\tag{23}$$

в которой

$$E_1^*(\gamma_0)=\int_{c^-}^{2\gamma_0-c}-A(\gamma,\gamma_0,c)\left|\ln\sin^2\frac{\gamma-\gamma_0}{2}\right|d\gamma,\tag{24}$$

причем здесь выражение $A(\gamma,\gamma_0,c)$ формулы (12) вместе с разностью (13) представляет собой отрицательную функцию в интервале $c^-<\gamma<\gamma_0$, так как для значений $\gamma\in(c^-,\gamma_0)$ выполняется неравенство (14) при $\gamma_0<\xi<c$. На основании рассуждений, аналогичных использованным при исследовании $E_4(\gamma_0)$, покажем, что согласно формуле (24) $E_1^*(\gamma_0)\to 0$ при $\gamma_0\to c$.

Формулой, аналогичной (19), выражается интеграл

$$K_4^*(\gamma_0)=-\ln\left|\ln\sin^2\frac{\gamma_0-c}{2}\right|+\ln\left|\ln\sin^2\frac{\gamma_0-c^+}{2}\right|-E_4^*(\gamma_0),\tag{25}$$

где

$$E_4^*(\gamma_0)=\left(\int_c^{c^+_{\gamma_0}}+\int_{c^+_{\gamma_0}}^{c+}\right)(-A(\gamma,\gamma_0,c))\left|\ln\sin^2\frac{\gamma-\gamma_0}{2}\right|d\gamma=E_{41}^*(\gamma_0)+E_{42}^*(\gamma_0),$$

$c_{\gamma_0}^{+} = \gamma_0 + 2e^{-2} > c$, $c_{\gamma_0}^{+} < c^{+}$, в интервале $c < \gamma < c_{\gamma_0}^{+}$ выполняется неравенство $A(\gamma, \gamma_0, c) < 0$, так как для значений $\gamma \in (c, c_{\gamma_0}^{+})$ выполняется неравенство (14), когда $\gamma_0 < \xi < c$, при котором разность (13) будет отрицательной.

Поступая так же, как при исследовании поведения $E_{12}(\gamma_0)$ для $\gamma_0 \to c$ согласно (17) покажем, что $E_{41}^{*}(\gamma_0)$ есть ограниченная функция при $\gamma_0 \to c$. Нетрудно проверить, что, как и слагаемое $E_{11}(\gamma_0)$ формулы (16), $E_{42}^{*}(\gamma_0) \to 0$ при $\gamma_0 \to c$.

На основании (2), (6), (22), (23), (25) снова получаем представление (21) теперь уже для $\gamma_0 < c$.

Таким образом, справедлива

Теорема. *Если для плотности* $\phi(\gamma)$ *сингулярного интеграла* (1) *в окрестности фиксированной точки* c, $0 < c < 2\pi$, *справедлива формула*

$$\phi(\gamma) = \frac{\Phi(\gamma)}{\left|\ln \sin^2 \frac{\gamma - c}{2}\right|},$$

где $\Phi(\gamma)$ *— заданная функция, удовлетворяющая условию* H *в каждом из интервалов* $[c - 2e^{-2}, c]$, $[c, c + 2e^{-2}]$ *(и имеющая, вообще говоря, разрыв первого рода в точке* c*), то для интеграла* (1) *в окрестности точки* c *справедливо представление*

$$I(\gamma_0) = [\Phi(c+0) - \Phi(c-0)] \ln \left|\ln \sin^2 \frac{\gamma_0 - c}{2}\right| + I_1(\gamma_0),$$

где $I_1(\gamma_0)$ *— функция, ограниченная при* $\gamma_0 \to c$.

Из теоремы непосредственно следует, что в случае, когда $\Phi(c+0) = \Phi(c-0)$, интеграл (1) представляет собой функцию, ограниченную при $\gamma_0 \to c$.

Утверждение теоремы остается в силе, если указанные в ней интервалы заменить на интервалы соответственно $[c - q, c]$, $[c, c + q]$ фиксированной длины q, меньшей $2e^{-2}$, когда значение γ_0 достаточно близко к числу c.

Доказанная теорема определяет поведение интеграла (1) вблизи точки слабой непрерывности плотности специального вида, ее можно рассматривать как аналог вышеупомянутых результатов Н.И. Мусхелишвили, относящихся к поведению сингулярных интегралов вблизи точки разрыва их плотности.

Результаты данной статьи могут быть использованы при исследовании свойств решений различных краевых задач для аналитических функций, в частности, решения краевой задачи Гильберта, которой посвящен ряд научных публикаций, включая работы последних лет [7]–[11].

Литература

[1] Мусхелишвили Н.И. *Сингулярные интегральные уравнения* (Наука, М., 1968).

[2] Салимов Р.Б. *К вычислению сингулярных интегралов с ядром Гильберта*, Изв. вузов. Матем., № 12, 93–96 (1970).

[3] Бари Н.К., Стечкин С.Б. *Наилучшие приближения и дифференциальные свойства двух сопряженных функций*, Тр. Московск. матем. о-ва **5**, 483–522 (1956).

[4] Крикунов Ю.М. *О задаче Трикоми с производными в краевом условии*, Учен. зап. Казанск. ун-та **122** (3), 30–53 (1962).

[5] Фихтенгольц Г.М. *Курс дифференциального и интегрального исчисления.* Т. 3 (Наука, М., 1970).

[6] Фихтенгольц Г.М. *Курс дифференциального и интегрального исчисления.* Т. 2 (Наука, М., 1970).

[7] Mityushev V. *Hilbert boundary value problem for multiply connected domains*, Complex Variables **35** (4), 283–295 (1998).

[8] Безродных С.И., Власов В.И. *Задача Римана–Гильберта в сложной области для модели магнитного пересоединения в плазме*, Журн. вычисл. матем. и матем. физ. **42** (3), 277–312 (2002).

[9] Салимов Р.Б., Шабалин П.Л. *Задача Гильберта со счетным множеством точек разрыва первого рода у коэффициентов и конечным индексом*, Изв. вузов. Матем., №3, 36–47 (2010).

[10] Салимов Р.Б. *Видоизменение нового подхода к решению краевой задачи Гильберта для аналитической функции в многосвязной области*, Изв. вузов. Матем., №11, 46–57 (2011).

[11] Салимов Р.Б. *О поведении сингулярного интеграла с ядром Гильберта вблизи точки слабой непрерывности плотности*, Изв. вузов. Матем., №6, 61–66 (2012).

Р.Б. Салимов

профессор, заведующий кафедрой высшей математики,
Казанский государственный архитектурно-строительный университет,
ул. Зеленая, д. 1, г. Казань, 420043, Россия,

`e-mail:` salimov@5354.ru

R.B. Salimov

Behavior of a singular integral with the Hilbert kernel near a point of weak continuity of its density

Abstract. We study the behavior of a singular integral with the Hilbert kernel near a fixed point, where the density vanishes as the value inverse to the logarithm of the distance from this point to a variable one, and the integral is not necessarily convergent.

Keywords: singular integral, Hilbert kernel, Hölder condition, weak continuity.

R.B. Salimov

Professor, Head of the Chair of Higher Mathematics,
Kazan State Architecture and Building University,
1 Zelyonaya str., Kazan, 420043 Russia,

`e-mail:` salimov@5354.ru