ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2000 МАТЕМАТИКА № 12 (463)

УДК 517.977

В.А. СРОЧКО, Е.И. ПУДАЛОВА

МЕТОДЫ НЕЛОКАЛЬНОГО УЛУЧШЕНИЯ ДОПУСТИМЫХ УПРАВЛЕНИЙ В ЛИНЕЙНЫХ ЗАДАЧАХ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

В настоящее время перспективным направлением теории вычислительных методов оптимального управления является разработка итерационных процедур со свойством нелокального улучшения допустимых управлений по целевому функционалу. Это значит, что соответствующие методы не связаны с операцией варьирования управлений, т.е. реализуются без параметрического поиска, что является существенным фактором повышения эффективности расчетов. Для обыкновенных динамических систем такие методы построены и апробированы в классе квадратичных задач оптимального управления [1], [2]. Их теоретической основой служат нелокальные аппроксимации целевого функционала вместе с техникой его фазовой регуляризации.

В данной работе исследуются возможности такого подхода на уровне управляемых систем с постоянным запаздыванием по состоянию. Предварительный анализ показал, что построение и конструктивное использование нелокальных формул приращения в квадратичных задачах с запаздыванием встречает принципиальные трудности. В определенной степени это является отражением тех проблем, которые возникали в теории необходимых условий оптимальности второго порядка для систем с запаздыванием в части дифференциального описания сопряженной матричной функции [3]. Поэтому нелокальный анализ задач с запаздыванием проводится пока для линейных моделей: линейный терминальный функционал, линейная по состоянию система с управлением в коэффициентах. В этом классе построены точные формулы приращения функционала, на основе которых конструируются две нелокальные процедуры улучшения и объединяющий их метод приращений. Метод не вырождается, вообще говоря, на особых управлениях, не использует параметрическое варьирование и представляется наиболее эффективным средством численного решения линейных задач с запаздыванием (экономичность, простота реализации, потенциал улучшения). Для построения альтернативного метода в билинейной задаче с выпуклым множеством допустимых управлений проводится регуляризация функционала по управлению. В результате получается метод проекций со свойствами нелокального улучшения и сходимости по невязке принципа максимума.

1. Постановка задачи. Формула приращения функционала

Рассмотрим задачу минимизации функционала

$$\Phi(u) = \langle c,\, x(t_1)\rangle \to \min, \tag{1}$$

определенного на траекториях линейной по состоянию системы с постоянным запаздыванием $h > 0$

$$\begin{gathered} \dot{x}(t) = A_1(u(t),t)x(t) + A_2(u(t),t)x(t-h) + b(u(t),t), \\ x(t) = x^0(t), \quad t \in [t_0 - h, t_0], \end{gathered} \tag{2}$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 99-01-400).

в классе допустимых управлений V, состоящем из кусочно-непрерывных на $T=[t_0,t_1]$ вектор-функций $u(t)$ со значениями в заданном множестве $U\subset R^r$:

$$u(t)\in U,\quad t\in T=[t_0,t_1]. \tag{3}$$

Пусть матричные функции $A_1(u,t)$ и $A_2(u,t)$ и вектор-функция $b(u,t)$ в системе (2) непрерывны по совокупности своих аргументов на прямом произведении $U\times T$, множество U компактно в R^r. Предположим, что начальная функция $x^0(t)$ непрерывна на $[t_0-h,t_0)$.

Получим формулу приращения функционала в задаче (1)–(3). Введем обозначение для правой части системы (2)

$$f(x,y,u,t)=A_1(u,t)x+A_2(u,t)y+b(u,t)$$

и образуем функцию Понтрягина с сопряженной переменной $\psi\in R^n$

$$H(\psi,x,y,u,t)=\langle\psi,\,f(x,y,u,t)\rangle\,.$$

Пусть $u(t)$, $v(t)$ — допустимые управления в задаче (1)–(3), $x(t,u)$, $x(t,v)$ — соответствующие им фазовые траектории. Для приращения $\Delta x(t)=x(t,v)-x(t,u)$ справедливо уравнение

$$\begin{gathered}\Delta\dot x(t)=f(x(t,v),x(t-h,v),v(t),t)-f(x(t,u),x(t-h,u),u(t),t),\\ \Delta x(t)=0,\quad t\in[t_0-h,t_0].\end{gathered}$$

Отсюда

$$\begin{aligned}\Delta\dot x(t)=\;&\Delta_{v(t)}f(x(t,v),x(t-h,v),u(t),t)+\\ &+\left(f(x(t,v),x(t-h,v),u(t),t)-f(x(t,u),x(t-h,u),u(t),t)\right),\end{aligned}\tag{4}$$

где символ $\Delta_{v(t)}$ означает частное приращение по управляющей переменной на паре $u(t)$, $v(t)$.

Положим $x(t,v)=x(t,u)+\Delta x(t)$ и, учитывая линейность вектор-функции f по x и y, представим уравнение (4) в виде

$$\begin{aligned}\Delta\dot x(t)=\;&f_x(x(t,u),x(t-h,u),u(t),t)\Delta x(t)+\\ &+f_y(x(t,u),x(t-h,u),u(t),t)\Delta x(t-h)+\Delta_{v(t)}f(x(t,v),x(t-h,v),u(t),t).\end{aligned}$$

Поскольку $f_x=A_1(u,t)$, $f_y=A_2(u,t)$, то получаем систему в приращениях

$$\begin{gathered}\Delta\dot x(t)=A_1(u(t),t)\Delta x(t)+A_2(u(t),t)\Delta x(t-h)+\Delta_{v(t)}f(x(t,v),x(t-h,v),u(t),t),\\ \Delta x(t)=0,\quad t\in T_0=[t_0-h,t_0].\end{gathered}\tag{5}$$

Далее, рассмотрим приращение функционала (1) на паре управлений u и v

$$\Delta_v\Phi(u)=\langle c\,,\Delta x(t_1)\rangle.$$

Пусть $\psi(t)$, $t\in T$, — произвольная кусочно-дифференцируемая функция с условием $\psi(t_1)=-c$. В силу уравнения (5) найдем производную

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\langle\psi(t),\Delta x(t)\rangle=\;&\langle\dot\psi(t),\Delta x(t)\rangle+\langle A_1(u(t),t)^T\psi(t),\Delta x(t)\rangle+\\ &+\langle A_2(u(t),t)^T\psi(t),\Delta x(t-h)\rangle+\Delta_{v(t)}H(\psi(t),x(t,v),x(t-h,v),u(t),t)\,.\end{aligned}$$

Тогда после интегрирования по $t\in T$

$$\begin{aligned}\Delta_v\Phi(u)=&-\int_{t_0}^{t_1}\langle\dot\psi(t),\Delta x(t)\rangle dt-\int_{t_0}^{t_1}\langle A_1(u(t),t)^T\psi(t),\Delta x(t)\rangle dt-\\ &-\int_{t_0}^{t_1}\langle A_2(u(t),t)^T\psi(t),\Delta x(t-h)\rangle dt-\int_{t_0}^{t_1}\Delta_{v(t)}H(\psi(t),x(t,v),x(t-h,v),u(t),t)dt.\end{aligned}$$

Преобразуем интеграл, содержащий $\Delta x(t-h)$ $(\tau = t-h)$,

$$\int_{t_0}^{t_1} \langle A_2(u(t),t)^T\psi(t), \Delta x(t-h)\rangle dt = \int\limits_{t_0-h}^{t_1-h} \langle A_2(u(\tau+h),\tau+h)^T\psi(\tau+h), \Delta x(\tau)\rangle d\tau.$$

Дополнительно предположим, что $\psi(t)=0$, $t\in(t_1,t_1+h]$. Тогда

$$\int_{t_0}^{t_1} \langle A_2(u(t),t)^T\psi(t), \Delta x(t-h)\rangle dt = \int\limits_{t_0}^{t_1} \langle A_2(u(t+h),t+h)^T\psi(t+h), \Delta x(t)\rangle dt.$$

Таким образом, приращение функционала имеет вид

$$\Delta_v\Phi(u) = -\int_{t_0}^{t_1} \langle \dot\psi(t) + A_1(u(t),t)^T\psi(t), \Delta x(t)\rangle dt -$$
$$- \int_{t_0}^{t_1} \langle A_2(u(t+h),t+h)^T\psi(t+h), \Delta x(t)\rangle dt - \int_{t_0}^{t_1} \Delta_{v(t)} H(\psi(t), x(t,v), x(t-h,v), u(t),t)dt.$$

Определим вектор-функцию $\psi(t)=\psi(t,u)$, $t\in T$, с помощью дифференциального уравнения

$$\dot\psi(t) = -A_1(u(t),t)^T\psi(t) - A_2(u(t+h),t+h)^T\psi(t+h), \quad t\in T, \tag{6}$$

с начальным условием

$$\psi(t) = \begin{cases} -c, & t=t_1; \\ 0, & t\in(t_1,t_1+h]. \end{cases} \tag{7}$$

В результате формула приращения функционала (1) принимает окончательный вид

$$\Delta_v\Phi(u) = -\int_{t_0}^{t_1} \Delta_{v(t)} H(\psi(t,u), x(t,v), x(t-h,v), u(t),t)dt. \tag{8}$$

“Симметричный” вариант формулы (8) получается с помощью замены $u \Leftrightarrow v$

$$\Delta_v\Phi(u) = -\int_{t_0}^{t_1} \Delta_{v(t)} H(\psi(t,v), x(t,u), x(t-h,u), u(t),t)dt. \tag{9}$$

Полученные формулы являются точными в том смысле, что не содержат остаточных членов тех или иных разложений.

Подинтегральные выражения в (8), (9) суть частные приращения по управлению функции Понтрягина для определенной совокупности аргументов. Такое представление дает возможность нелокального улучшения управления $u(t)$ через операцию на максимум функции H, что является основой для последующих процедур и методов улучшения.

Определим максимизирующее управление для функции H

$$u^*(\psi,x,y,t) = \arg\max_{u\in U} H(\psi,x,y,u,t), \quad \psi,x,y\in R^n, \quad t\in T. \tag{10}$$

Предположим, что соотношение (10) определяет вектор-функцию $u^*(\psi,x,y,t)$, которая является кусочно-непрерывной по своим аргументам, т. е. может иметь конечное число поверхностей разрыва. Каждая такая поверхность задается уравнением вида $g(\psi,x,y,t)=0$, и вектор-функция $u^*(\psi,x,y,t)$ определяется неоднозначно только на поверхности разрыва.

Принцип максимума для управления $u(t)$, $t\in T$, в задаче (1)–(3) можно представить в виде

$$u(t) = u^*(\psi(t,u), x(t,u), x(t-h,u), t), \quad t\in T.$$

На основе формул приращения (8), (9) нетрудно получить достаточные условия оптимальности для управления $u(t)$ в задаче (1)–(3).

Согласно первой из формул (8) неравенство

$$\Delta_{v(t)} H(\psi(t,u), x(t,v), x(t-h,v), u(t), t) \le 0\,, \quad t \in T\,,\ v(t) \in U, \tag{11}$$

является достаточным условием оптимальности управления $u(t)$, $t \in T$.

Введем множество достижимости системы (2) в момент времени $t \in T$ в заданном классе допустимых управлений $D(t) = \{x(t,u),\ u \in V\}$, $t \in T$. Достаточным условием выполнения неравенства (11) является соотношение

$$\Delta_v H(\psi(t,u), x, y, u(t), t) \le 0, \quad v \in U, \quad t \in T, \quad x \in D(t), \quad y \in D(t-h).$$

Представим его в экстремальной форме

$$u(t) = \arg\max_{v \in U} H(\psi(t,u), x, y, v, t), \quad t \in T, \quad x \in D(t), \quad y \in D(t-h). \tag{12}$$

Это достаточное условие оптимальности управления $u(t)$ в задаче (1)–(3). В частности, из (12) при $x = x(t,u)$, $y = x(t-h,u)$ получаем принцип максимума для управления $u(t)$.

Отметим, что в условии (12) может фигурировать любая оценка по включению для $D(t)$, т. е. множество $D : D(t) \subset D$, $t \in T$.

Согласно формуле приращения (9) условие оптимальности $\Delta_v \Phi(u) \ge 0$ обеспечивается неравенством

$$\Delta_{v(t)} H(\psi(t,v), x(t,u), x(t-h,u), u(t), t) \le 0, \quad t \in T, \quad v(t) \in U. \tag{13}$$

Пусть $Q(t) = \{\psi(t,u),\ u \in V\}$ — множество достижимости сопряженной системы (6)–(7) в момент $t \in T$. Тогда неравенство (13) обеспечивается условием

$$\Delta_v H(\psi, x(t,u), x(t-h,u), u(t), t) \le 0, \quad v \in U, \quad t \in T, \quad \psi \in Q(t).$$

Таким образом, экстремальное соотношение

$$u(t) = \arg\max_{v \in U} H(\psi, x(t,u), x(t-h,u), v, t), \quad t \in T, \quad \psi \in Q(t), \tag{14}$$

является достаточным условием оптимальности управления $u(t)$ в задаче (1)–(3). При $\psi = \psi(t,u)$ получаем принцип максимума для управления $u(t)$.

Выделим частный случай задачи (1)–(3), когда матричные функции $A_i(u,t)$, $i = 1,2$, не зависят от управления u: $A_i(u,t) \equiv A_i(t)$. Тогда принцип максимума и условия (12), (14) эквивалентны. Действительно, в этом случае сопряженная система (6)–(7) не зависит от управления и имеет единственное решение $\psi(t)$, т. е. $Q(t) = \{\psi(t)\}$, $t \in T$. Это значит, что условие (14) эквивалентно принципу максимума. Поскольку

$$H = \langle \psi, A_1(t)x + A_2(t)y + b(u,t) \rangle\,,$$

то условие (12) также эквивалентно принципу максимума.

В рамках общей линейной задачи (1)–(3) соотношения (12), (14) могут служить основой для построения процедур улучшения управления $u(t)$.

Замечание 1. Принцип максимума в рассматриваемой задаче не является достаточным условием оптимальности.

Замечание 2. Традиционная формула приращения функционала в задаче (1)–(3) легко получается из (8) и имеет вид [4]

$$\Delta_v \Phi(u) = -\int_{t_0}^{t_1} \Delta_{v(t)} H(\psi(t,u), x(t,u), x(t-h,u), u(t), t)dt + \eta,$$

$$\eta = -\int_{t_0}^{t_1} (\langle \Delta_v H_x, \Delta x(t) \rangle + \langle \Delta_v H_y, \Delta x(t-h) \rangle)dt.$$

Эта формула лежит в основе доказательства принципа максимума и носит локальный характер (не позволяет организовать нелокальное улучшение).

2. Процедуры улучшения допустимых управлений

Решим задачу улучшения для управления $u(t)$ (найти управление $v(t)$ с условием $\Phi(v) \le \Phi(u)$) на основе формулы приращения (8).

Первая процедура улучшения:

по данному $u \in V$ найдем сопряженную траекторию $\psi(t,u)$, $t \in T$;

образуем максимизирующее управление

$$v^*(x,y,t) = u^*(\psi(t,u),x,y,t), \quad x,y \in R^n, \quad t \in T;$$

найдем решение $x(t)$, $t \in T$, фазовой системы

$$\dot{x}(t) = f(x(t), x(t-h), v^*(x(t), x(t-h), t), t),$$
$$x(t) = x^0(t), \quad t \in [t_0 - h, t_0],$$

вместе с управлением $v(t) = v^*(x(t), x(t-h), t)$, $t \in T$.

Покажем, что новое управление $v(t)$ обеспечивает свойство улучшения $\Phi(v) \le \Phi(u)$. Отметим, что траектория $x(t)$ определяется системой

$$\dot{x}(t) = A_1(v(t),t)x(t) + A_2(v(t),t)x(t-h) + b(v(t),t),$$
$$x(t) = x^0(t), \quad t \in [t_0 - h, t_0],$$

т. е. соответствует управлению $v(t)$. При этом $v(t)$ удовлетворяет условию максимума

$$v(t) = \arg\max_{w \in U} H(\psi(t,u), x(t,v), x(t-h,v), w, t)\,.$$

Следовательно,

$$\Delta_{v(t)} H(\psi(t,u), x(t,v), x(t-h,v), u(t), t) \ge 0, \quad t \in T.$$

Отсюда в силу формулы (8) заключаем, что $\Delta_v \Phi(u) \le 0$, т. е. первая процедура для любого $u \in V$ вырабатывает новое управление $v \in V$ со свойством нестрогого улучшения. Равенство $v(t) = u(t)$, $t \in T$, означает, что исходное управление $u(t)$ удовлетворяет принципу максимума.

Трудоемкость реализации первой процедуры улучшения — две задачи Коши (для сопряженной и фазовой систем). При этом считается, что условие максимума функции H реализуется аналитически.

Отметим, что данная процедура позволяет, вообще говоря, улучшать управления, удовлетворяющие принципу максимума.

Пример 1.

$$\Phi(u) = x_2(1) \to \min,$$
$$\dot{x}_1(t) = u(t) + x_1(t-h), \quad \dot{x}_2(t) = -u(t)x_1(t),$$
$$x(t) = 0, \quad t \in T_0 = [-h, 0], \quad h = \frac{1}{2},$$
$$|u(t)| \le 1, \quad t \in [0,1].$$

В данном случае $H(\psi,x,y,u,t) = \psi_1(u+y_1) - \psi_2 u x_1$, сопряженная система

$$\dot{\psi}_1(t) = \psi_2(t)u(t) - \psi_1(t+h), \quad \dot{\psi}_2(t) = 0,$$
$$\psi_1(t) = 0, \quad t \in [1,\, 1+h],$$
$$\psi_2(t) = \begin{cases} -1, & t = 1; \\ 0, & t \in (1, 1+h]. \end{cases}$$

Максимизирующее управление $u^*(\psi,x,y,t)=\operatorname{sign}(\psi_1-\psi_2x_1)$. Понятно, что $\psi_2(t)=-1$, $t\in[0,1]$.

Рассмотрим управление $u(t)=0$. Ему соответствуют траектории $x(t,u)=0$, $\psi_1(t,u)=0$, $t\in T$. Данное управление яляется особым: $H_u(\psi(t,u),x(t,u),x(t-h,u),t)=0$, т. е. удовлетворяет принципу максимума с вырождением.

Применим первую процедуру улучшения. Вспомогательное управление $v^*(x,t)=\operatorname{sign}x_1$. Рассмотрим первое фазовое уравнение при $u=v^*$

$$\dot{x}_1(t)=\operatorname{sign}x_1(t)+x_1(t-h),\quad x_1(t)=0,\quad t\in T_0.$$

Оно имеет особое решение $x_1(t)=0$ (с соответствующим управлением $u(t)=0$). Кроме того, уравнение имеет еще два решения:

$$x_1(t)=\begin{cases}\pm t, & t\in[0,h];\\ \pm\frac{1}{8}(2t+1)^2, & t\in[h,1],\end{cases}$$

с порождающими управлениями $v(t)=\pm1$. При этом выполняется свойство строгого улучшения, поскольку $\Phi(v)=-\int\limits_0^1|x_1(t)|dt$, $\Phi(u)=0$.

Опишем "симметричную" процедуру улучшения, отправляясь от формулы приращения (9).

Вторая процедура улучшения:

по данному $u\in V$ найдем фазовую траекторию $x(t,u)$, $t\in T$;

сформируем экстремальное управление

$$v^*(\psi,t)=u^*(\psi,x(t,u),x(t-h,u),t),\quad \psi\in R^n,\quad t\in T;$$

найдем решение $\psi(t)$, $t\in T$, сопряженной системы

$$\dot{\psi}(t)=-A_1(v^*(\psi(t),t),t)^T\psi(t)-A_2(v^*(\psi(t+h),t+h),t+h)^T\psi(t+h),$$
$$\psi(t)=\begin{cases}-c, & t=t_1;\\ 0, & t\in(t_1,t_1+h],\end{cases}$$

вместе с управлением $v(t)=v^*(\psi(t),t)$, $t\in T$.

В данном случае $\psi(t)=\psi(t,v)$, $t\in T$,

$$\Delta_{v(t)}H(\psi(t,v),x(t,u),x(t-h,u),u(t),t)\geq 0,\quad t\in T,$$

и улучшение обеспечивается на основании формулы (9).

Трудоемкость реализации второй процедуры улучшения — две задачи Коши (аналогично первой процедуре улучшения).

Пример 2.

$$\Phi(u)=x_3(2)\to\min,$$
$$\dot{x}_1(t)=u(t),\quad \dot{x}_2(t)=x_1(t-1),$$
$$\dot{x}_3(t)=(x_2(t)+x_2(t-1)+x_3(t-1))u(t),$$
$$x_i(t)=0,\quad t\in[-1,0],\quad i=\overline{1,3},$$
$$|u(t)|\leq 1,\quad t\in T=[0,2].$$

Здесь $H(\psi,x,y,u,t)=\psi_1u+\psi_2y_1+\psi_3(x_2+y_2+y_3)u$, сопряженная система

$$\dot{\psi}_1(t)=-\psi_2(t+1),$$
$$\dot{\psi}_2(t)=-\psi_3(t)u(t)-\psi_3(t+1)u(t+1),$$
$$\dot{\psi}_3(t)=-\psi_3(t+1)u(t+1),$$
$$\psi_{1,2}(2)=0,\quad \psi_3(2)=-1,\quad \psi_i(t)=0,\quad t\in(2,3],\quad i=\overline{1,3}.$$

Максимизирующее управление $u^*(\psi, x, y, t) = \mathrm{sign}(\psi_1 + \psi_3(x_2 + y_2 + y_3))$.

Рассмотрим управление $u(t) = 0$ с траекториями $x_i(t,u){=}0$, $i{=}\overline{1,3}$, $\psi_{1,2}(t,u){=}0$, $\psi_3(t,u) = -1$, $t \in T$. Данное управление является особым, т. к.

$$H_u(\psi(t,u), x(t,u), x(t-1,u), t) = 0.$$

Применим вторую процедуру улучшения. Вспомогательное управление $v^*(\psi, t) = \mathrm{sign}\,\psi_1$. На отрезке $[1,2]$ $\psi_1(t) = 0$ независимо от управления. Следовательно, управление $v(t)$ для $t \in [1,2]$ можно выбрать произвольным образом с точностью до ограничения $|v(t)|{\le}1$. Положим $v(t){=}C$, $C \ne 0$, $|C| \le 1$. Соответствующие сопряженные траектории $\psi_1(t,v) = 0$, $\psi_2(t,v) = C(t-2)$, $\psi_3(t,v) = -1$, $t \in [1,2]$. Тогда на отрезке $[0,1]$ появляется возможность определить управление $v(t) = -\mathrm{sign}\,C$ и сопряженные траектории

$$\psi_1(t) = -\frac{C}{2}(t-1)^2,$$
$$\psi_2(t) = \frac{|C|}{2} - Ct - 2C + (t+1)\,\mathrm{sign}\,C,$$
$$\psi_3(t) = C(t-1) - 1, \quad t \in [0,1].$$

Таким образом, выходное управление второй процедуры имеет вид

$$v(t,C) = \begin{cases} -\mathrm{sign}\,C, & t \in [0,1]; \\ C, & t \in [1,2]. \end{cases}$$

Нетрудно подсчитать значение функционала $\Phi(v) = -|C|/6$. Наилучший выбор $C = \pm 1$, что приводит к двум управлениям $v(t) = v(t, \pm 1)$ со свойством строгого улучшения. Заметим, что полученные управления удовлетворяют принципу максимума без вырождения.

3. Метод приращений

Рассмотрим линейную задачу (1)–(3). Построим итерационный метод последовательного улучшения допустимых управлений на основе описанных процедур. Напомним, что максимизирующее управление u^* определяется формулой (10).

Пусть $u^0 \in V$ — начальное управление. Найдем соответствующую траекторию $x^0(t)$ и подсчитаем значение функционала $\Phi(u^0) = \langle c, x^0(t_1)\rangle$.

Пусть на k-й итерации имеется допустимая пара $(u^k(t), x^k(t))$ вместе со значением функционала $\Phi(u^k)$, $k = 0, 1, \ldots$ Найдем при $v^*(t) = u^*(\psi(t), x^k(t), x^k(t-h), t)$ решение $\psi^k(t)$ сопряженной системы

$$\dot\psi(t) = -A_1(v^*(t), t)^T \psi(t) - A_2(v^*(t+h), t+h)^T \psi(t+h),$$
$$\psi(t) = \begin{cases} -c, & t = t_1; \\ 0, & t \in (t_1, t_1 + h], \end{cases}$$

и сформируем управление

$$v^k(t) = u^*(\psi^k(t), x^k(t), x^k(t-h), t), \quad t \in T.$$

Найдем решение $x^{k+1}(t)$, $t \in T$, фазовой системы при $w^*(t) = u^*(\psi^k(t), x(t), x(t-h), t)$

$$\dot x(t) = f(x(t), x(t-h), w^*(t), t),$$
$$x(t) = x^0(t), \quad t \in [t_0 - h, t_0],$$

и образуем соответствующее управление

$$u^{k+1}(t) = u^*(\psi^k(t), x^{k+1}(t), x^{k+1}(t-h), t), \quad t \in T.$$

Подсчитаем значение функционала $\Phi(u^{k+1}) = \langle c, x^{k+1}(t_1)\rangle$. Итерация закончена.

Прокомментируем метод. Управление $v^k(t)$ получено на основе $u^k(t)$ с помощью второй процедуры улучшения, т.е. $\Phi(v^k) \le \Phi(u^k)$. Отметим, что $\psi^k(t) = \psi(t, v^k)$. Переход $v^k \Rightarrow u^{k+1}$ — реализация первой процедуры улучшения для управления v^k, т.е. $\Phi(u^{k+1}) \le \Phi(v^k)$. Заметим, что значение $\Phi(v^k)$ фактически в методе не вычисляется.

В результате итерации получаем двойное улучшение по функционалу

$$\Phi(u^{k+1}) \le \Phi(v^k) \le \Phi(u^k),$$

причем каждое улучшение дается "ценой" решения одной задачи Коши.

В этой связи отметим, что каждая процедура в отдельности обеспечивает одно улучшение за счет двух задач Коши.

Поскольку функционал $\Phi(u)$ в задаче (1)–(3) ограничен снизу (в силу компактности множества U семейство фазовых траекторий линейной системы (2) ограничено), и последовательность $\{\Phi(u^k)\}$ является невозрастающей, то сходимость метода приращений описывается "скромным" соотношением $\Phi(u^k) - \Phi(u^{k+1}) \to 0$, $k \to \infty$. При этом величина приращения $\delta(u^k) = \Phi(u^k) - \Phi(u^{k+1})$ не является, вообще говоря, невязкой принципа максимума для управления u^k, т.е. возможна ситуация, когда $\delta(u^k) = 0$, но управление u^k не удовлетворяет принципу максимума. Для устранения этих недостатков метода приращений будем использовать процедуру регуляризации относительно приращения Δu^k.

4. Билинейная задача. Метод проекций

Рассмотрим билинейную задачу оптимального управления в следующей постановке:

минимизировать линейный (терминальный) функционал

$$\Phi(u) = \langle c, x(t_1) \rangle \to \min \tag{15}$$

на траекториях билинейной системы

$$\begin{gathered} \dot{x}(t) = A_1(u(t), t)x(t) + A_2(u(t), t)x(t-h) + b(u(t), t), \\ x(t) = x^0(t), \quad t \in T_0 = [t_0 - h, t_0], \end{gathered} \tag{16}$$

$$\begin{gathered} A_i(u, t) = A_{i0}(t) + \sum_{j=1}^{r} u_j A_{ij}(t), \quad i = 1, 2, \\ b(u, t) = B(t)u + \mathrm{c}(t) \end{gathered}$$

при ограничениях на управление

$$u(t) \in U, \quad t \in T = [t_0, t_1]. \tag{17}$$

Предположим, что U — выпуклое замкнутое множество.

Пусть $(u^0(t), x(t, u^0))$, $t \in T$, — допустимая пара в задаче (15)–(17). Введем вспомогательный функционал

$$\begin{gathered} \Phi_\alpha(u, u^0) = \Phi(u) + \alpha J(u, u^0), \quad \alpha > 0, \\ J(u, u^0) = \frac{1}{2} \int_T \|u(t) - u^0(t)\|^2 dt. \end{gathered} \tag{18}$$

Функционал Φ_α определяет процедуру регуляризации, связанную с базовым управлением u^0, и использует только приращение $\Delta u^0(t)$.

Поставим задачу улучшения управления u^0 по функционалу Φ_α: найти управление $v^\alpha \in V$ с условием $\Phi_\alpha(v^\alpha, u^0) \le \Phi_\alpha(u^0, u^0)$. При этом имеет место оценка уменьшения исходного функционала Φ

$$\Phi(v^\alpha) - \Phi(u^0) \le -\alpha J(v^\alpha, u^0). \tag{19}$$

Для решения задачи улучшения введем функцию Понтрягина для функционала Φ_α

$$H_\alpha(\psi,x,y,u,t) = \langle \psi, A_1(u,t)x + A_2(u,t)y + b(u,t)\rangle - \frac{\alpha}{2}\|u-u^0\|^2$$

вместе с сопряженной системой, которая не зависит от параметра α и управления u^0,

$$\begin{gathered}\dot\psi(t) = -A_1(u(t),t)^T\psi(t) - A_2(u(t+h),t+h)^T\psi(t+h),\\ \psi(t) = \begin{cases} -c, & t = t_1;\\ 0, & t\in(t_1,t_1+h].\end{cases}\end{gathered} \tag{20}$$

Отметим, что $H_\alpha(\psi,x,y,u,t) = H(\psi,x,y,u,t) - \frac{\alpha}{2}\|u-u^0\|^2$, где $H = H_0$ — функция Понтрягина для задачи (15)–(17). В данном случае функция H линейна по u.

Первая формула приращения функционала Φ_α на управлениях u, u^0 имеет вид

$$\Delta\Phi_\alpha(u,u^0) = -\int_T \Delta_{u(t)}H_\alpha(\psi(t,u^0),x(t,u),x(t-h,u),u^0(t),t)dt. \tag{21}$$

Представление (21) дает возможность построить процедуру нелокального улучшения для функционала Φ_α. Реализуем эту возможность через операцию на максимум гамильтониана H_α. Введем максимизирующее управление

$$u^*_\alpha(\psi,x,y,t) = \arg\max_{u\in U} H_\alpha(\psi,x,y,u,t) = \arg\max_{u\in U}\Big(\langle H_u(\psi,x,y,t),u\rangle - \frac{\alpha}{2}\|u-u^0\|^2\Big).$$

Нетрудно видеть, что управление u^*_α, $\alpha>0$, можно представить в терминах операции проектирования

$$u^*_\alpha(\psi,x,y,t) = P_U\Big(u^0(t) + \frac{1}{\alpha}H_u(\psi,x,y,t)\Big).$$

Здесь P_U — оператор проектирования на множество U в евклидовой метрике.

Отметим, что управление $u^*_\alpha(\psi,x,y,t)$ определяется однозначно: проекция на выпуклое и замкнутое множество U существует и единственна. Кроме того, вектор-функция $u^*_\alpha(\psi,x,y,t)$ непрерывно зависит от ψ, x, y (оператор P_U удовлетворяет условию Липшица, производная $H_u(\psi,x,y,t)$ непрерывна по совокупности (ψ,x,y)).

Сформулируем принцип максимума, используя оператор проектирования: *для оптимальности допустимого управления $u^0(t)$, $t\in T$, необходимо, чтобы для любого $\alpha>0$ выполнялось соотношение*

$$u^0(t) = P_U\Big(u^0(t) + \frac{1}{\alpha}H_u(\psi(t,u^0),x(t,u^0),x(t-h,u^0),t)\Big),\quad t\in T.$$

Возьмем за основу формулу приращения (21) и опишем *первую процедуру улучшения* для управления $u^0(t)$:

найдем решение $\psi(t,u^0)$, $t\in T$, сопряженной системы (20) при $u=u^0$ и сформируем управление $v^*_\alpha(x,y,t) = u^*_\alpha(\psi(t,u^0),x,y,t)$;
найдем решение $x^\alpha(t)$ фазовой системы (16) при $u(t) = v^*_\alpha(x(t),x(t-h),t)$ вместе с управлением $v^\alpha(t) = v^*_\alpha(x_\alpha(t),x_\alpha(t-h),t)$.

Понятно, что $x^\alpha(t) = x(t,v^\alpha)$, $t\in T$, причем управление v^α определяется соотношением

$$v^\alpha(t) = \arg\max_{u\in U} H_\alpha(\psi(t,u^0),x^\alpha(t),x^\alpha(t-h),u,t) = P_U\Big(u^0(t) + \frac{1}{\alpha}H_u(\psi(t,u^0),x^\alpha(t),x^\alpha(t-h),t)\Big).$$

Следовательно, на основании формулы (21) при $u{=}v^\alpha$ имеет место улучшение $\Delta\Phi_\alpha(v^\alpha,u^0){\le}0$, т. е. управление v^α для любого $\alpha>0$ обеспечивает невозрастание функционала $\Phi(u)$ с оценкой (19). Из этой оценки следует, что в случае $v^\alpha\ne u^0$ свойство строгого улучшения гарантируется для любого $\alpha > 0$: $\Phi(v^\alpha) < \Phi(u^0)$. Равенство $v^\alpha = u^0$, $t \in T$, означает, что управление $u^0(t)$ удовлетворяет принципу максимума.

Таким образом, первая процедура (при любом $\alpha > 0$) улучшает любое допустимое управление $u^0(t)$, не удовлетворяющее принципу максимума в задаче (15)–(17).

Величина $\delta_\alpha(u^0) = \Phi(u^0) - \Phi(v^\alpha)$ может служить невязкой принципа максимума для управления u^0: $\delta_\alpha(u^0) = 0 \Leftrightarrow \Phi(u^0) = \Phi(v^\alpha) \Leftrightarrow u^0 = v^\alpha$.

Представим формулу (21) в альтернативном виде

$$\Delta\Phi_\alpha(u, u^0) = -\int_T \Delta_{u(t)} H_\alpha(\psi(t,u), x(t,u^0), x(t-h,u^0), u^0(t), t)dt$$

и опишем *вторую процедуру улучшения*:

образуем экстремальное управление $v_\alpha^*(\psi, t) = u_\alpha^*(\psi, x(t,u^0), x(t-h,u^0), t)$;
найдем решение $\psi^\alpha(t)$ сопряженной системы (20) при $u(t) = v_\alpha^*(\psi(t), t)$ вместе с управлением $v^\alpha(t) = v_\alpha^*(\psi^\alpha(t), t)$, $t \in T$.

В результате имеет место улучшение $\Delta\Phi_\alpha(v^\alpha, u^0) \le 0$ с оценкой уменьшения (19) для функционала $\Phi(u)$.

Свойства данной процедуры аналогичны предыдущему случаю.

Таким образом, регуляризация (18) порождает две независимые процедуры строгого улучшения для любого допустимого управления, не удовлетворяющего принципу максимума. При этом, однако, теряется свойство улучшения для управлений, удовлетворяющих принципу максимума (в силу единственности выходного управления v^α).

Для иллюстрации последнего факта рассмотрим пример 1. Применим первую процедуру к особому управлению $u^0(t) = 0$. В данном случае

$$u_\alpha^*(\psi, x, t) = P_U\left(u^0(t) + \frac{1}{\alpha}(\psi_1 + x_1)\right) = \operatorname{sat}\left(u^0(t) + \frac{1}{\alpha}(\psi_1 + x_1)\right),$$

где

$$\operatorname{sat} z = \begin{cases} \operatorname{sign} z, & |z| > 1; \\ z, & |z| \le 1. \end{cases}$$

Согласно схеме первой процедуры $v_\alpha^*(x_1) = \operatorname{sat} \frac{x_1}{\alpha}$. Далее решается уравнение

$$\dot{x}_1(t) = \operatorname{sat} \frac{x_1(t)}{\alpha} + x_1(t-h), \quad x_1(t) = 0, \quad t \in [-h, 0].$$

Понятно, что для любого $\alpha > 0$ единственным решением является $x_1^\alpha(t) = 0$ с порождающим управлением $v^\alpha(t) = 0$. Исходное управление переходит на выход процедуры без улучшения (других выходных управлений нет).

Объединим описанные выше процедуры в метод последовательных приближений (метод проекций).

Зафиксируем параметр регуляризации $\alpha > 0$. Пусть $k = 0, 1, \ldots$, $(u^k(t), x^k(t))$ — допустимая пара в задаче (15)–(17). Выделим управление

$$v^k(\psi, t) = u_\alpha^*(\psi, x^k(t), x^k(t-h), t)$$

и найдем решение $\psi^k(t)$ сопряженной системы (20) при $u(t) = v^k(\psi(t), t)$. Пусть $v^k(t) = v^k(\psi^k(t), t)$ — промежуточное управление. Образуем управление

$$w^k(x, y, t) = u_\alpha^*(\psi^k(t), x, y, t)$$

и найдем решение $x^{k+1}(t)$ фазовой системы (16) при $u(t) = w^k(x(t), x(t-h), t)$.

Пусть $u^{k+1}(t) = w^k(x^{k+1}(t), x^{k+1}(t-h), t)$ — соответствующее управление.

Пара $(u^{k+1}(t), x^{k+1}(t))$ завершает итерацию метода.

Отметим, что $\Phi(u^{k+1}) \le \Phi(v^k) \le \Phi(u^k)$, причем знак равенства означает принцип максимума для соответствующего управления и может служить критерием остановки.

Обсудим вопрос о сходимости метода. Введем неотрицательную величину $\delta(u^k) = \Phi(u^k) - \Phi(u^{k+1})$. Это невязка принципа максимума для управления u^k.

Сформулируем утверждение о сходимости: *если функционал $\Phi(u)$ ограничен снизу на множестве V, то метод проекций обладает свойством сходимости по невязке принципа максимума* ($\delta(u^k) \to 0,\ k \to \infty$).

Литература

1. Срочко В.А., Душутина С.Н., Пудалова Е.И. *Регуляризация принципа максимума и методов улучшения в квадратичных задачах оптимального управления* // Изв. вузов. Математика. – 1998. – № 12. – С. 82–92.
2. Срочко В.А., Антоник В.Г. *Метод проекций в линейно-квадратичных задачах оптимального управления* // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. – 1998. – Т. 38. – № 4. – С. 564–572.
3. Габасов Р., Кириллова Ф.М., Мансимов К.Б. *Необходимые условия оптимальности второго порядка* (обзор). – Минск.: Ин-т матем. АН БССР, 1982. – 48 с.
4. Габасов Р., Кириллова Ф.М. *Качественная теория оптимальных процессов.* – М.: Наука, 1971. – 508 с.

Иркутский государственный университет

Поступила
28.04.2000