ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2001 МАТЕМАТИКА № 2 (465)

УДК 517.982

В.Г. ЧЕРНОВ

О СВЕРТКАХ, ИНДУЦИРОВАННЫХ АВТОМОРФИЗМАМИ ЛИНЕЙНОЙ СТРУКТУРЫ АЛГЕБРЫ

Ниже рассматривается схема, в которой интегральное преобразование, подлежащее обращению, интерпретируется как мультипликатор в некоторой ("сверточной") алгебре; при этом сама задача обращения оказывается эквивалентной описанию группы единиц этой алгебры. "Сверточным" алгебрам посвящена весьма обширная литература, в силу чего автор ограничился включением в библиографический список лишь тех работ [1]–[7] по этой тематике, которые оказались ему доступны.

1. *Алгебра* $A_{\sigma(*)}$. Рассмотрим некоторую коммутативную ассоциативную алгебру с единицей над полем k. Умножение в этой алгебре будем обозначать символом $*$, а саму алгебру — A_*. Пусть σ — автоморфизм надлежащего линейного пространства A алгебры A_*. Определим в A новое умножение $\sigma(*)$ (*σ-свертка*) правилом

$$x\sigma(*)y = \sigma^{-1}(\sigma(x) * \sigma(y)), \quad x, y \in A. \tag{1}$$

Возникшую алгебраическую систему обозначим символом $A_{\sigma(*)}$. Нетрудно видеть, что $A_{\sigma(*)}$ — ассоциативная коммутативная алгебра с единицей над полем k. Пусть U_* и $U_{\sigma(*)}$ — соответственно группа единиц алгебр A_* и $A_{\sigma(*)}$. Если $x \in A_*$ и $x \in A_{\sigma(*)}$, то $x^{(-1)}$ и $x^{[-1]}$ обозначают далее обратный элемент для x в соответствующей алгебре.

Если τ — некоторый другой автоморфизм линейного пространства A и $A_{\tau(*)}$ — отвечающая ему алгебра, то, очевидно, обе алгебры *изоморфны*.

Зафиксируем элемент $a \in A_{\sigma(*)}$ и определим отображение $R_\sigma(a) : A_{\sigma(*)} \to A_{\sigma(*)}$, полагая $R_\sigma(a)(x) = x\sigma(*)(a)$. Ясно, что $R_\sigma(a)$ — линейный оператор. Будем его далее называть *мультипликатором* алгебры $A_{\sigma(*)}$. Он обратим тогда и только тогда, когда $a \in U_{\sigma(*)}$; при этом $R_\sigma^{-1}(a) = R_\sigma(a^{[-1]})$, или в терминах значений $R_\sigma(a^{[-1]})(x) = x\sigma(*)\sigma^{-1}(\sigma(a)^{(-1)})$, и формула обращения для преобразования, осуществляемого $R_\sigma(a)$, имеет вид

$$x = R_\sigma(a)(x)\sigma(*)\sigma^{-1}(\sigma(a)^{(-1)}).$$

2. *Примеры.* Особый интерес для анализа представляют функциональные алгебры над тем или иным полем, в частности, над полем $\mathbb{C}$. Приведем примеры такого рода.

2.1. Пример 1. Пусть X — произвольное множество, $A_\cdot = A_\cdot(X)$ — некоторая алгебра $\mathbb{C}$-значных функций на X, σ — фиксированный автоморфизм линейного пространства A этой алгебры. В этом случае оператор $R_\sigma(a) : A_{\sigma(\cdot)} \to A_{\sigma(\cdot)}$ обратим тогда и только тогда, когда функция $\sigma(a)$ не имеет нулей. Формула обращения в этом случае принимает вид

$$f = \widehat{f}_a\sigma(\cdot)\sigma^{-1}(1/\sigma(a)),$$

где через $\widehat{f}_a$ обозначается образ $R_\sigma(a)(f)$. Специализируя рассмотренный пример, примем $X = k^n$, где k — либо поле $\mathbb{R}$, либо $\mathbb{C}$, либо локально-компактное поле, либо конечное поле, $A_\cdot$ — алгебра основных функций на k^n (в случае конечного поля — это алгебра всех $\mathbb{C}$-значных функций на k^n). В качестве отображения σ рассмотрим преобразование Фурье F_χ на A, отвечающее нетривиальному аддитивному характеру χ поля k. Поскольку преобразование Фурье F_χ

— автоморфизм линейного пространства A, то в соответствии с (1) получаем алгебру $A_{\sigma(\cdot)}$ с умножением

$$f\sigma(\cdot)g = F_\chi^{-1}(F_\chi f \cdot F_\chi g), \tag{2}$$

и построенная σ-свертка совпадает с общеизвестной сверткой $*$ функций на k^n. Если $a \in U_{\sigma(\cdot)}$, то

$$f = \widehat{f}_a * F_\chi^{-1}(1/F_\chi(a)). \tag{3}$$

Пусть, к примеру, R_M — преобразование Радона, подчиненное множеству $M \subset F_q^n$ [8]. Тогда $R_M f = f * \delta_M \circ s$, где δ_M — характеристическая функция подмножества M, s — симметрия пространства F_q^n относительно точки O. Теперь формула (3) принимает вид $f = \widehat{f}_M * F_\chi^{-1}(1/F_\chi(\delta_M \circ s))$ или

$$f(x) = q^{-n} \sum_{\xi \in F_q^n} \sum_{y \in F_q^n} \frac{\chi(\langle y, \xi \rangle)}{F_\chi(\delta_M)(y)} \widehat{f}_M(x - \xi)$$

при условии, что M — допустимое подмножество [8] в F_q^n (здесь $\widehat{f}_M = R_M f$, а $(\cdot,\cdot)$ — символ скалярного произведения в k^n).

Пример 2. Пусть H — норма Хемминга [9] на k^n, где k, как и ранее, конечное поле, $\lambda \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Положим $R_\lambda(f) = f * H^\lambda$ (аналог преобразования Римана–Лиувилля в пространстве всех $\mathbb{C}$-значных функций на k^n). Так как функция $F_\chi(H^\lambda)$ при $\lambda \geq n$ не имеет нулей [9], то в соответствии с (2) $f = R_\lambda(f) * f_\chi^{-1}(1/F_\chi(H^\lambda))$. Зная явный вид функции $F_\chi(H^\lambda)$ (она выражается через полиномы Кравчука — эта связь отмечена в [9]), легко переписать последнее равенство в терминах значений функций.

2.2. Пусть $X = \mathbb{N}$, $A. = A.(X)$ – алгебра всех $\mathbb{C}$-значных функций на $\mathbb{N}$ с поточечным умножением, A_* — *алгебра Коши* на $\mathbb{N}$ [10] с умножением

$$(f * g)(n) = \sum_{x=1}^{n} f(x) g(n + 1 - x).$$

Известно, что алгебра A_* является коммутативной алгеброй с единицей, роль которой играет функция δ_1: $\delta_1(1) = 1$, $\delta_1(n) = 0$, $n \geq 2$. Заметим, что группа U_* указанной алгебры состоит лишь из тех функций, для которых $f(1) \neq 0$. Определим отображение $\sigma_* : A \to A$, полагая $\sigma_*(f) = f * I$ (I — единичная функция в A_*). Отображение σ_* — автоморфизм линейного пространства A; при этом $\sigma^{-1}(f) = f * I^{-1}$, где I^{-1} — функция, обратная к I в алгебре A_*. Функцию $\mu^* = I^{-1}$ разумно называть *функцией Мебиуса, ассоциированной с алгеброй* A_*. Исходя из соотношения $1 * \mu^* = \delta_1$, нетрудно установить ее явный вид: $\mu^*(1) = 1$, $\mu^*(2) = -1$, $\mu^*(n) = 0$ для $n \geq 3$.

С помощью построенного автоморфизма σ_* определим уже известным образом алгебру $A_{\sigma(\cdot)}$. Из сказанного ранее следует, что алгебры $A.$ и $A^*_{\sigma(\cdot)}$ изоморфны.

Теорема 1. $A_{\sigma_*(\cdot)} \cong A_{\max}$.

Замечание. Из этого факта непосредственно вытекает результат работы [11]: $A_{\max} \cong A$.

В рассматриваемом примере действие мультипликатора $R_{\sigma_*}(a)$ представляется в виде

$$R_{\sigma_*}(a)(f)(n) = (f \max a)(n) = \sum_{\max\{x,y\}=n} f(x) a(y).$$

Предполагая, что $a \in U_{\sigma_*}$, имеем $f = \widehat{f} \max(1/a * I * \mu^*)$ или

$$f(n) = \sum_{\max\{x,y\}=n} \sum_{i=1}^{n} \widehat{f}_a(x) \frac{\mu^*(y + 1 - i)}{(a * I)(i)}.$$

В частности, если $a = I$, то

$$f(n) = \begin{cases} \widehat{f}(1), & n = 1; \\ \frac{1}{n}\Big[\widehat{f}(n) - \frac{1}{n-1}\sum\limits_{i=1}^{n-1}\widehat{f}(i)\Big], & n \geq 2. \end{cases}$$

Последняя формула (см. [9]) представляет собой формулу обращения для преобразования Радона, связанного с "окружностями" $\Omega(n) = \{(x,y) \in \mathbb{N}^2 \mid \max\{x,y\} = n,\ n = 1, 2, \dots\}$,

$$f(n) = \sum_{(x,y)\in\Omega(n)} f(x).$$

2.3. Символы X, A, $A\cdot$ означают в этом пункте то же, что и в предыдущем, A_* — *алгебра Дирихле*, т. е. линейное пространство всех $\mathbb{C}$-значных функций на $\mathbb{N}$, наделенное умножением $\otimes$:

$$(f \otimes g)(n) = \sum_{d|n} f(d)g(n/d).$$

Здесь $U_\otimes = \{f \in A \mid f(1) \neq 0\}$. Таким образом, $I \in U_\otimes$. По аналогии с п. 2.2 назовем функцию $\mu^* = I^{-1}$ (т. е. $\otimes$-обратную к I) *функцией Мебиуса, ассоциированной с алгеброй* $A_\otimes$. Проверка показывает, что $\mu^\otimes$ — классическая функция Мебиуса.

В соответствии с общей схемой строится алгебра $A_{\sigma(\cdot)}$.

Теорема 2. $A_{\sigma(\cdot)} = A_{\text{НОК}}$.

(Относительно алгебры $A_{\text{НОК}}$ см. [11].) Сопоставляя полученное в пп. 2.2, 2.3, заключаем, что $A_{\max} \cong A_{\text{НОК}}$.

Автор выражает признательность проф. Граеву М.И. за обсуждение результатов, в также проф. Какичеву В.А. за высказанные замечания.

Литература

1. Какичев В.А. *О свертках для интегральных преобразований* // Изв. АН БССР. Сер. физ.-матем. наук. – 1967. – № 2. – С. 48–57.
2. Ву Ким Туан. *К теории обобщенных интегральных преобразований в некотором пространстве функций* // ДАН СССР. – 1986. – Т. 286. – № 3. – С. 521–524.
3. Ву Ким Туан, Маричев С.И., Якубович С.Б. *Композиционная структура интегральных преобразований* // ДАН СССР. – 1986. – Т. 286. – № 3. – С. 786–790.
4. Какичев В.А. *О матричном свертывании степенных рядов* // Изв. вузов. Математика. – 1990. – № 2. – С. 53–62.
5. Якубович С.Б. *Об одном конструктивном способе построения интегральных сверток* // ДАН БССР. – 1990. – Т. 34. – № 7. – С. 588–591.
6. Рыко В.С. *Дискретное преобразование Меллина* // Изв. вузов. Математика. – 1991. – № 8. – С. 65–68.
7. Какичев В.А., Нгуен Суан Тхао. *Об одном методе конструирования обобщенных интегральных сверток* // Изв. вузов. Математика. – 1998. – № 1. – С. 31-40.
8. Чернов В.Г. *О преобразовании Радона в пространстве Хемминга* // Изв. вузов. Математика. – 1990. – № 10. – С. 50–55.
9. Чернов В.Г. *О преобразовании Фурье нормы Хемминга* // Укр. матем. журн. – 1992. – Т. 44. – № 8.
10. Чернов В.Г. *Об одной функциональной алгебре* // Укр. матем. журн. – 1990. – Т. 42. – № 3. – С. 372–377.
11. Aizley P. *Identities involving numerical functions* // Ars Combinatoria. – 1983. – V. 18. – P. 81–85.

Коломенский педагогический институт

Поступила
20.09.1999