ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
КАЗАНСКИЙ (ПРИВОЛЖСКИЙ) ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ ИМ Н.И. ЛОБАЧЕВСКОГО

КАФЕДРА ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ И ПРИБЛИЖЕНИЙ

Специальность: 010100 – Математика

Специализация: действительный анализ

Выпускная квалификационная работа

(Магистерская)

Формулы суммирования Пуассона и их приложения

Работа завершена:
«____»________________**2015 г.** ____________**Бородавко У.В.**

Работа допущена к защите:
Научный руководитель
д.ф.-м.н., профессор
«____»________________**2015 г.** ____________**Авхадиев Ф.Г.**
Заведующий кафедрой
д.ф.-м.н, профессор
«____»________________**2015 г.** ____________**Авхадиев Ф.Г.**

Казань – 2015г.

Содержание

1 Введение

Математика — это наука, имеющая большое практическое значение. Её история начинается с незапамятных времён. С тех пор многие разделы математики были разработаны и углублены до нынешнего состояния.

Мне всегда нравилась математика, строгая и лаконичная наука. Способность четко мыслить, полноценно логически рассуждать и ясно излагать свои мысли в настоящее время необходимы каждому. Математика имеет огромные возможности для воспитания личности, развития мышления и четкой, логически совершенной речи. Поэтому я пришла обучаться в Институт математики и механики им. Лобачевского Казанского Федерального Университета, который полностью соответствует моим пожеланиям.

В процессе обучения Фарит Габидинович показал мне формулу:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-n^2\pi x} = \frac{1}{\sqrt{x}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-n^2\frac{\pi}{x}}$$

и попросил её доказать. Она оказалась для меня совершенно незнакомой и поначалу даже крайне непонятной, тем самым вызвав интерес. Я решила вывести эту формулу самостоятельно. Пробовала методы вычетов, интегрирования и дифференцирования по параметру, ... К сожалению, у меня ничего не вышло. Стала искать её в литературе, и мои усилия увенчались успехом, когда я читала книги Е. К. Титчмарша и А. Зигмунда. Оказалось, что это формула суммирования Симеона Ден Пуассона, выдающегося французского математика, механика и физика. С его именем связано множество достижений. В частности, и эта формула, играющая важную роль в механике, информатике, радиофизике и других науках (см., например,[5], [8], [9], [10]), применяется также при решении задач в теории упругости, теплопроводности, электродинамики и иных разделах математической физики.

Именно этой формуле, которая называется формулой суммирования Пуассона, и посвящена данная работа.

Первая часть работы посвящена применению формулы Пуассона при исследовании дзета-функции Римана. Во второй части изложены общие сведения о преобразовании Фурье, его интегральной формуле по Титчмаршу и формуле суммирования Пуассона по Зигмунду. В третьей-я самостоятельно получила ряд новых тождеств для конкретных функций с применением формулы суммирования Пуассона для косинус-преобразования Фурье. А именно рассмотрела 6 различных функций, для которых преобразование Фурье можно определить в явном виде, и получила 6 новых тождеств на основании формулы суммирования Пуассона.

На этом я хотела закончить свои исследования, пока Е. К. Липачев не провел крайне интересную лекцию о вейвлетах. Конечно же, у меня сразу возникла мысль: не связаны ли вейвлеты с анализом Фурье и формулой суммирования Пуассона. Когда оказалось, что связь, действительно, есть, я решила посвятить часть дипломной работы и вейвлет-анализу, в чем меня поддержал Фарит Габидинович.

2 Применения формулы суммирования Пуассона при исследовании дзета-функции Римана.

2.1 Альтернативы с формулой Пуассона.

По Е. К. Титчмаршу (см., [1], [2], [11],) в основе некоторых доказательств лежит формула суммирования Пуассона

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(u)\, cos\, 2\pi\, nu\, du. \tag{1}$$

Некоторые следующие доказательства основаны на применении формулы Пуассона. Формулы (4) и (6) есть следствия формулы Пуассона.

2.2 Другой возможный способ

Риман в своем доказательстве использовал именно этот способ. При $\sigma > 0$ имеем

$$\int_0^\infty x^{\frac{s}{2}-1}\, e^{-n^2\pi x}\, dx = \frac{\Gamma(\frac{s}{2})}{n^s\, \pi^{\frac{s}{2}}}.$$

Откуда при $\sigma > 1$ следует, что

$$\frac{\Gamma(\frac{s}{2})\, \tau(s)}{\pi^{\frac{s}{2}}} = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^\infty x^{\frac{s}{2}-1}\, e^{-n^2\pi x}\, dx = \int_0^\infty x^{\frac{s}{2}-1} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2\pi x}\, dx.$$

(Изменение порядка суммирования и интегрирования допустимо, так как сходимость абсолютная.)

Предположим

$$\psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2\pi x}, \tag{2}$$

получаем

$$\tau(s) = \frac{\pi^{\frac{s}{2}}}{\Gamma(\frac{s}{2})} \int_0^\infty x^{\frac{s}{2}-1}\, \psi(x)\, dx \quad (\sigma > 1). \tag{3}$$

Мы знаем, что для x>0

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-n^2\pi x} = \frac{1}{\sqrt{x}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-n^2\frac{\pi}{x}},$$

поэтому,

$$2\psi(x) + 1 = \frac{1}{\sqrt{x}}\, [2\psi\,(\frac{1}{x}) + 1]. \tag{4}$$

Из (3) получаем

$$\pi^{-\frac{s}{2}}\, \Gamma(\frac{s}{2})\, \tau(s) = \int_0^1 x^{\frac{s}{2}-1}\, \psi(x)\, dx + \int_1^\infty x^{\frac{s}{2}-1}\, \psi(x)\, dx =$$

$$= \int_0^1 x^{\frac{s}{2}-1} \left[\frac{1}{\sqrt{x}}\, \psi\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{2}\right] dx + \int_1^\infty x^{\frac{s}{2}-1}\psi(x)dx + \frac{1}{s-1} - \frac{1}{s} + \int_0^1 x^{\frac{s}{2}-\frac{3}{2}}\psi\left(\frac{1}{x}\right) dx + \int_1^\infty x^{\frac{s}{2}-1}\psi($$

$$= \frac{1}{s(s-1)} + \int_1^\infty \left(x^{-\frac{s}{2}-\frac{1}{2}} + x^{\frac{s}{2}-1}\right)\, \psi(x)\, dx.$$

Последний интеграл сходится для всех s, следовательно, выведенная формула, по принципу аналитического продолжения, имеете место быть для всех s. Но правая часть не изменяется от замены s на 1-s. Поэтому,

$$\pi^{-\frac{s}{2}}\, \Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\, \tau(s) \;=\; \pi^{-\frac{1}{2}+\frac{s}{2}}\, \Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)\, \tau\,(1-s),$$

Это одна из форм функционального уравнения для дзета-функции Римана.

2.3 Следующий вариант

Представление Титчмарша

$$\Gamma(s)\,\tau(s) = \int_0^1 \left(\frac{1}{e^x - 1} \;-\; \frac{1}{x} \;+\; \frac{1}{2}\right)\, x^{s-1}\,dx \;-\; \frac{1}{2s} \;+\; \int_1^\infty \left(\frac{1}{e^x - 1} \;-\; \frac{1}{x}\right)\, x^{s-1}\,dx,$$

справедливое по принципу аналитического продолжения для σ>-1. Но

$$\int_1^\infty \frac{1}{2}\, x^{s-1}\,dx \;=\; -\frac{1}{2s} \qquad (-1 < \sigma < 0).$$

Следовательно,

$$\Gamma(s)\,\tau(s) \;=\; \int_0^\infty \left(\frac{1}{e^x - 1} \;-\; \frac{1}{x} \;+\; \frac{1}{2}\right)\, x^{s-1}\,dx \qquad (-1 < \sigma < 0). \tag{5}$$

Далее,

$$\frac{1}{e^x - 1} = \frac{1}{x} \;-\; \frac{1}{2} \;+\; 2x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2\,\pi^2 + x^2}, \tag{6}$$

отсюда имеем

$$\Gamma(s)\,\tau(s) = \int_0^\infty 2x\, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2\,\pi^2 + x^2}\, x^{s-1}\,dx =$$

$$= 2\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^\infty \frac{x^s\,dx}{4n^2\,\pi^2 + x^2} = 2\sum_{n=1}^{\infty} (2\pi n)^{s-1}\, \frac{\pi}{2cos\ \frac{\pi s}{2}} = \frac{2^{s-1}\,\pi^s}{cos\ \frac{\pi s}{2}}\,\tau\,(1-s),$$

функциональное уравнение выведено. Изменение порядка суммирования и интегрирования допустимо ввиду абсолютной сходимости при -1<σ<0.

3 Общие сведения о преобразованиях Фурье и формула суммирования Пуассона.

3.1 Преобразование Фурье и формула суммирования Пуассона по Зигмунду.

Следуя А. Зигмунду (см., [3], [4]), кратко опишем вывод формулы суммирования Пуассона. Понятие преобразования Фурье

$$\gamma(u) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\, e^{-iux}\, dx$$

функции g(x), определённой на $(-\infty, +\infty)$, используется в теории рядов Фурье.

Для начала сделаем преположение: g(x) абсолютно интегрируема на $(-\infty, +\infty)$. Тогда ряд

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} g\,(x + 2k\pi) \tag{7}$$

абсолютно сходится для почти всех x на [0,2π], что показывает неравенство

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \int_0^{2\pi} |g\,(x + 2k\pi)|\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} |g(x)|\, dx < \infty$$

Пусть G_n(x)–n-ая симметрическая частичная сумма ряда (7) и $G(x) = \lim G_n(x)$. Функция G(x) периодична, и она существует для почти всех x. По скольку G_n(x) мажорируются интегрируемой функцией, то коэффиценты Фурье c_ν от G есть

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} G_n(x)\, e^{-i\nu x}\, dx = lim_{n\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-2n\pi}^{2(n+1)\pi} g(x)\, e^{-i\nu x}\, dx = \gamma(\nu).$$

Следовательно, при предполагаемых допущениях коэффициенты Фурье c_ν суммы G(x) равны преобразованию Фурье $\gamma(\nu)$ функции g(x).

Если, помимо предыдущего, $\sum c_\nu e^{i\nu x} = S[G]$ сходится в точке x=0, и его сумма равна сумме ряда (7) в точке x=0, то мы получаем равенство

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} g\,(2k\pi) = \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\, e^{-i\nu x}\, dx \tag{8}$$

Это часто используемое равенство называется формулой суммирования Пуассона. Сумма, стоящая справа, определяется как предел симметрических частных сумм.

Предположим, что g(x) не только абсолютно интегрируема на $(-\infty, +\infty)$, но и имеет ограниченное изменение, причём $2g(x) = g(x+0) + g(x-0)$ для всех x. При этих предположениях и будем доказывать формулу (8).

Пусть V_k – полное изменение g на отрезке $I_k = [2k\pi, 2(k{+}1)\pi]$, k=0, +(-)1,... Так как ряд (8) сходится абсолютно в некоторой точке x_0 из I_0, то из неравенств $|g(x{+}2k\pi) - g(x_0{+}2k\pi)| \le V_k$, при $x \in I_0$ и $\sum V_k < \infty$, ясно, что ряд (7) сходится абсолютно и равномерно на I_0 к сумме

G(x) с ограниченым изменением и такой, что $2\,G(x) = G\,(x+0) + G\,(x-0)$. Тогда формула (8) есть следствие следующего утверждения.

Теорема. *Предположим, что f(x) имеет ограниченное изменение на* $[0{,}2\pi]$. *Тогда*

(I) *в каждой точке* x_0 *ряд S[f] сходится к значению* $\frac{1}{2}[f(x_0+0)+f(x_0-0)]$*; в частности, S[f] сходится к f(x) в каждой точке непрерывности f;*

(II) *если, кроме того, f непрерывна в каждой точке отрезка I, то S[f] сходится равномерно на I.*

В данной теореме

$$S[f] = \sum_{-\infty}^{+\infty} c_\nu e^{i\nu x}$$

или

$$S[f] = \sum_{-\infty}^{+\infty} c_\nu e^{i\nu x} \text{ или } S[f] = \frac{1}{2}a_0 + (a_1\, cosx + b_1\, sinx) + ... + a_n\, cosnx + b_n\, sinnx) + ...\ ,$$

где

$$a_\nu = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, cos\, \nu t\, dt;$$

$$b_\nu = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, sin\, \nu t\, dt\ ;$$

$$c_\nu = \frac{1}{2}\,(a_\nu - ib_\nu).$$

3.2 Интегральная формула Фурье.

Ряд вида

$$f(x) = \frac{1}{2}\,a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\,cos\,\frac{nx}{\lambda}\;+\;b_n\,sin\,\frac{nx}{\lambda})$$

представляет функцию с периодом $2\pi\lambda$,

где

$$a_n = \frac{1}{\pi\lambda}\int_{-k\lambda}^{k\lambda} f(t)\,cos\,\frac{nt}{\lambda}\,dt, \quad b_n = \frac{1}{\pi\lambda}\int_{-\pi\lambda}^{\pi\lambda} f(t)\,sin\,\frac{nt}{\lambda}\,dt$$

Его можно записать в следующем виде:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi\lambda}\int_{-\pi\lambda}^{\pi\lambda} f(t)\,dt + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\pi\lambda}\int_{-\pi\lambda}^{\pi\lambda} f(t)\,cos\,\frac{n\,(x-t)}{\lambda}\,dt$$

Теперь представим, что $\lambda \to \infty$. Стоящий справа ряд имеет много общего с суммами, при помощи которых определяется интеграл Римана. Действительно, он может быть записан как

$$\sum_{n=1}^{\infty}(u_{n+1} - u_n)\,\varphi(u_n),$$

где $u_n = \frac{n}{\lambda}$ и

$$\varphi(u) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi\lambda}^{\pi\lambda} f(t)\,cos\,u(x-t)\,dt$$

Если игнорировать то, что $\varphi(u)$ зависит от λ и что аппроксимирующие суммы являются бесконечными рядами, то мы получим при $\lambda \to \infty$:

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} du \int_{-\infty}^{\infty} cos\,u(x-t)\,f(t)\,dt$$

Мы получили интегральную формулу Фурье. Она представляет функцию, определённую в интервале $(-\infty,\infty)$ таким же образом, что и ряд Фурье представляет функцию с конечным периодом.

Мы встретились бы со значительными трудностями, если бы попытались провести на этом пути строгое доказательство. Но прямое изучение формулы сравнительно нетрудно.

Предположим, что функция f(x) интегрируема по Лебегу в интервале$(-\infty,\infty)$. Тогда интервал

$$\int_{-\infty}^{\infty} cos\,u(x-t)\,f(t)\,dt$$

сходится равномерно относительно u в любом конечном интервале. Значит, мы можем проинтегрировать его по u в интервале (0,U) и обратить порядок интегрирования. Это даст:

$$\int_{0}^{U} du \int_{-\infty}^{\infty} cos\,u(x-t)\,f(t)\,dt = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{sin\,U(x-t)}{x-t}\,f(t)\,dt$$

.

Для заданного ϵ существует столь большое T, такое что

$$\int_{-\infty}^{-T} |f(t)|\,dt < \epsilon, \int_{T}^{\infty} |f(t)|\,dt < \epsilon$$

При этом можно считать, что $T > |x| + 1$, где x – фиксированное значение. Для всех значениях U:

$$\left|\int_{-\infty}^{-T} \frac{sin\,U(x-t)}{x-t}\,f(t)\,dt\right| < \epsilon, \qquad \left|\int_{T}^{\infty} \frac{sin\,U(x-t)}{x-t}\,f(t)\,dt\right| < \epsilon$$

При фиксированном T интегралы

$$\int_{-T}^{x-\delta} \frac{sin\,U(x-t)}{x-t}\,f(t)\,dt, \qquad \int_{x+\delta}^{T} \frac{sin\,U(x-t)}{x-t}\,f(t)\,dt$$

стремятся по теореме Римана-Лебега к нулю, когда $U \to \infty$. Это значит, что

$$\frac{1}{\pi}\int_0^U du \int_{-\infty}^{\infty} cos\,u(x-t)\,f(t)\,dt = \frac{1}{\pi}\int_{x-\delta}^{x+\delta} \frac{sin\,U(x-t)}{x-t}\,f(t)\,dt + o(1) =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\delta} \frac{sin\,Ut}{t}[f(x+t) + f(x-t)]\,dt + o(1).$$

В следствие этого, значение предела (при U$\to\infty$) зависит только от поведения функции f(t) в окрестности точки t=x, и проблема сводится к изучению интеграла, подобного интегралу Дирихле. К этой проблеме применимы все критерии сходимости. *В частности,*

$$\lim_{U\to\infty} \frac{1}{\pi}\int_0^U du \int_{-\infty}^{\infty} cos\,u(x-t)\,f(t)\,dt = \frac{1}{2}\,[f(x+0) + f(x-0)],$$

если функция f(t) интегрируема в интервале (-∞,∞) и имеет ограниченную вариацию в некотором интервале, содержащем точку t=x.

3.3 Преобразования Фурье

Следуя Е. К. Титчмаршу (см., [1], [2], [11]), расскажем о преобразование Фурье. Если f(x) есть четная функция, то интеграл Фурье принимает вид:

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty cos\, xu\, du \int_0^\infty cos\, ut\, f(t)\, dt; \tag{9}$$

член, содержащий sin ut, тождественно равен нулю. Это косинус-формула Фурье. Подобным образом получим синус-формулу Фурье для нечётной функции:

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty sin\, xu\, du \int_0^\infty sin\, ut\, f(t)\, dt. \tag{10}$$

Если предположить, что

$$g(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty cos\, xt\, f(t)\, dt, \tag{11}$$

то формула (9) примет вид:

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty cos\, xt\, g(t)\, dt. \tag{12}$$

Отношения между функциями f(x) и g(x) являются взаимно обратными. О двух функциях, связанных между собой в каком-либо смысле формулами (11), (12), говорят, что они получаются друг из друга *косинус-преобразованием Фурье.* Если, например, f(x) принадлежит к L(0,∞) и имеет ограниченную вариацию во всяком конечном интервале, то инетеграл (11) абсолютно сходится, и формула (12) верна в том смысле, что её правая часть сходится (не обязательно) абсолютно к

$$\frac{1}{2}\,[f(x+0) + f(x-0)].$$

Аналогичным способом из соотношения (10) мы получаем взаимно обратные формулы:

$$h(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty sin\, xt\, f(t)\, dt, \quad f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty sin\, xt\, h(t)\, dt; \tag{13}$$

функции f(x) и h(x) связаны между собой *синус-преобразованием Фурье*

3.4 Интегрирование интегралов Фурье.

Е. К. Титчмарш сформулировал следующую теорему (см., [1], [2], [11]).

Формула

$$\int_0^{\xi} f(x)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} \frac{sin\,\xi u}{u}\,du\,\int_0^{\infty} cos\,ut\,f(t)\,dt,$$

получающаяся при интегрировании соотношения (9), справедлива для всякой функции f(t), интегрируемой в интервале (0,∞).

Мы имеем, в силу равномерной сходимости:

$$\int_0^{U} \frac{sin\,\xi u}{u}\,du\,\int_0^{\infty} cos\,ut\,f(t)\,dt = \int_0^{\infty} f(t)\,dt\,\int_0^{u} \frac{sin\,\xi u\,cos\,ut}{u}\,du.$$

Внутренний интеграл справа ограничен для всех значений U и t; действительно, он равен

$$\frac{1}{2}\int_0^{U} \frac{sin\,(\xi+t)\,u}{u}\,du\,+\,\frac{1}{2}\int_0^{U} \frac{sin\,(\xi-t)\,u}{u}\,du = \frac{1}{2}\int_0^{U(\xi+t)} \frac{sin\,v}{v}\,dv\,\pm\,\frac{1}{2}\int_0^{U|\xi-t|} \frac{sin\,v}{v}\,dv$$

(знак есть знак разности ξ-t), а интеграл

$$\int_0^{V} \frac{sin\,v}{v}\,dv$$

есть ограниченная функция от V. Следовательно, по теореме Лебега об ограниченной сходимости мы можем перейти под знаком интеграла к пределу при U→ ∞. Так как

$$\int_0^{\infty} \frac{sin\,\xi\,cos\,ut}{u}\,du \begin{cases} = \frac{1}{2}\pi & (t<\xi) \\ = 0 & (t>\xi) \end{cases}$$

то отсюда получается нужный результат.

Аналогичный результат можно получить из синус-формулы Фурье.

3.5 Преобразования Фурье в классе L^2.

Опишем преобразование Фурье в классе L^2, также следуя Титчмаршу (см., [1], [2], [11]),. Исследование, проведённое в пункте "Преобразования Фурье даёт условия, при которых справедливы взаимно обратные формулы Фурье. У полученных результатов недостаток в том, что, в то время как формулы симметричны относительно функций f(x) и g(x), условия, которым удовлетворяют эти функции, совершенно различны. Другие условия, уже вполне симметричные, можно получить, рассматривая функции класса L^2 и пользуясь теорией сходимости в среднем.

Пусть функция f(x) принадлежит к классу $L^2\,(0{,}\infty)$. *Тогда формулы (11), (12) справедливы в том смысле, что при* $a \to \infty$ *интеграл*

$$g_a(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^a cos\, xt\, f(t)\, dt \tag{14}$$

сходится в среднем к некоторой функции g(x) класса $L^2\,(0{,}\infty)$,*а интеграл*

$$f_a(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^a cos\, x\, tg\,(t)\, dt \tag{15}$$

сходится в среднем к f(x).

Мы докажем это методом, подсказанным формальными рассмотрениями пункта "Интегральная формула Фурье". Положим:

$$a_n = \int_{\frac{n}{\lambda}}^{\frac{n+1}{\lambda}} f(x)\, dx \quad (n = 1{,}2{,}...)$$

Когда $\lambda \to \infty$, сумма

$$\Phi_{m,n} = \sum_{\nu=m+1}^{n} a_\nu\, cos\, \frac{\nu x}{\lambda}$$

стремиться к интегралу

$$\int_a^b cos\, ux\, f(u)\, du,$$

если 0$\leq$ a<b и m=$[\lambda a]$, $n = [\lambda b] - 1$. Действительно, разность между этим интегралом и Φ_m,n равна

$$\sum_{\nu=m+1}^{n} \int_{\frac{\nu}{\lambda}}^{\frac{\nu+1}{\lambda}} (cos\, ux - cos\, \frac{\nu x}{\lambda})\, f(u)\, du \;+\; \int_a^{\frac{m+1}{\lambda}} cos\, ux\, f(u)\, du \;+\; \int_{\frac{n+1}{\lambda}}^{b} cos\, ux\, f(u)\, du.$$

Так как

$$|cos\, ux \;-\; cos\, \frac{\nu x}{\lambda}| \;\leq\; \frac{|x|}{\lambda},$$

то сумма есть $O(\frac{1}{\lambda})$, последние же два интеграла стремятся к нулю. Также ясно, что сходимость равномерна относительно x при 0$\leq$x$\leq$X.

Теперь мы можем применить к $\Phi_{m,n}$ рассуждение, подобное тому, которым мы пользовались при доказательстве теоремы Рисса-Фишера. Мы имеем:

$$a_n^2 \;\leq\; \int_{\frac{n}{\lambda}}^{\frac{n+1}{\lambda}} [f(x)]^2\, dx \int_{\frac{n}{\lambda}}^{\frac{n+1}{\lambda}} dx = \frac{1}{\lambda} \int_{\frac{n}{\lambda}}^{\frac{n+1}{\lambda}} [f(x)]^2\, dx;$$

следовательно,

$$\int_0^{\pi\lambda} \Phi_{m,n}^2\, dx = \frac{1}{2}\,\pi\lambda \sum_{\nu=m+1}^{n} a_\nu^2 \;\leq\; \frac{1}{2}\pi \int_{\frac{m+1}{\lambda}}^{\frac{n+1}{\lambda}} [f(x)]^2\, dx \;\leq\; \frac{1}{2}\pi\; \int_a^b [f(x)]^2\, dx,$$

и если $\pi\lambda > X$, то и подавно

$$\int_0^X \Phi_{m,n}^2\, dx \;\leq\; \frac{1}{2}\pi \int_a^b [f(x)]^2\, dx.$$

Фиксируя X и заставляя λ стремится к ∞, мы получаем:

$$\int_0^X [g_b(x) - g_a(x)]^2\, dx \;\leq\; \int_a^b [f(x)]^2\, dx;$$

заставляя теперь X стремиться к ∞, получаем:

$$\int_0^\infty [g_b(x) - g_a(x)]^2\, dx \;\leq\; \int_a^b [f(x)]^2\, dx. \tag{16}$$

Правая часть, а с ней и левая стремятся к нулю, когда $a \to \infty$,$b \to \infty$. Таким образом, $g_a(x)$ сходится в среднем к некоторой функции g(x) класса $L^2(0,\infty)$.

Это же рассуждение показывает, что и интеграл (15) сходится в среднем к некоторой функции класса L^2, назовем её, например, $\varphi(x)$. Мы покажем, что φ(x)=f(x) почти всюду; для этого достаточно доказать, что при любом значении ξ

$$\int_0^\xi \varphi(x)\, dx = \int_0^\xi f(x)\, dx. \tag{17}$$

Мы имеем:

$$\int_0^\xi \varphi(x)\, dx \;=\; \lim_{a\to\infty} \int_0^\xi f_a(x)\, dx \;=\; \lim_{a\to\infty} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\xi dx \int_0^a cos\, xt\; g(t)\, dt \;=$$

$$= \lim_{a\to\infty} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^a \frac{sin\, \xi t}{t}\, g(t)\, dt = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \frac{sin\, \xi t}{t}\, g(t)\, dt$$

С другой стороны, при 0$<\xi < a$

$$\int_0^\xi f(x)\, dx = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{sin \xi u}{u}\, du \int_0^a cos\, ut\; f(t)\, dt \;=\; \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \frac{sin \xi u}{u}\, g_a(u)\, du;$$

На этом равенство (17) доказано, и доказательство теоремы доведено ло конца.

Конечно, такая же теорема справедлива и для формулы (13).

Можно получить также формулу, соответствующую теореме Парсеваля. Полагая в неравенстве (16) a=0, мы находим:

$$\int_0^\infty [g_b(x)]^2\, dx \;\leq\; \int_0^b [f(x)]^2\, dx \;\leq\; \int_0^\infty [f(x)]^2\, dx,$$

и, заставляя b и стремиться к ∞, получаем:

$$\int_0^\infty [g(x)]^2\, dx \;\leq\; \int_0^\infty [f(x)]^2\, dx.$$

Но так как отношение между f(x) и g(x) является взаимным, то верно и противоположное неравенство. Таким образом, в действительности

$$\int_0^\infty [g(x)]^2 \, dx = \int_0^\infty [f(x)]^2 \, dx. \tag{18}$$

Наконец, если φтакже принадлежит к L^2 и ψ(x) получается из φ(x)преобразованием Фурье, то g(x)+ψ(x) получается преобразованием Фурье из f(x)+φ(x). Следовательно,

$$\int_0^\infty [g(x) + \psi(x)]^2 \, dx = \int_0^\infty [f(x) + \varphi(x)]^2 \, dx,$$

и вычитая отсюда (18) и соответствующее равенство для φ и ψ, мы получаем:

$$\int_0^\infty g(x) \, \psi(x) \, dx = \int_0^\infty f(x) \, \varphi(x) \, dx. \tag{19}$$

4 Формулы суммирования Пуассона для конкретных функций

Введем формулу суммирования Пуассона по Титчмаршу. Пусть f(x) – принадлежащая к L $(0, \infty)$ непрерывная функция, монотонно убывающая и стремящаяся к нулю при x$\to \infty$ (или разность двух функций такого типа). Пусть $\alpha{>}0$, $\alpha\beta = 2\pi$, и пусть g(x) — функция, получающаяся из f(x) косинус – преобразованием Фурье. Тогда

$$\sqrt{\alpha}\ \left[\frac{1}{2}\,f(0)+\sum_{n=1}^{\infty}f(n\alpha)\right]\ =\ \sqrt{\beta}\ \left[\frac{1}{2}\,g(0)+\sum_{n=1}^{\infty}g(n\beta)\right].$$

Это равенство называется формулой Пуассона. Убедимся:

$$\sqrt{\beta}\left[\frac{1}{2}\,g(0)+\sum_{m=1}^{n}g(m\beta)\right]=$$

$$=\frac{\sqrt{\alpha}}{2\pi}\int_0^{\pi}f\left(\frac{t}{\beta}\right)\ \frac{sin\ (n+\frac{1}{2})\ t}{sin\ \frac{1}{2}\ t}\ dt+\frac{\sqrt{\alpha}}{2\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\int_{(2m-1)\pi}^{(2m+1)\pi}f\left(\frac{t}{\beta}\right)\ \frac{sin\ (n+\frac{1}{2})\ t}{sin\ \frac{1}{2}\ t}\ dt.$$

Это выражение отличается от левой части формулы Пуассона на

$$\frac{\sqrt{\alpha}}{2\pi}\int_0^{\pi}\left[f\ (\frac{t}{\beta})-f(0)\right]\frac{sin\ (n+\frac{1}{2})\ t}{sin\ \frac{1}{2}\ t}\ dt+$$

$$+\frac{\sqrt{\alpha}}{2\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\int_{(2m-1)\pi}^{(2m+1)\pi}\left[f\left(\frac{t}{\beta}\right)-f\left(\frac{2m\pi}{\beta}\right)\right]\ \frac{sin\ (n+\frac{1}{2})\ t}{sin\ \frac{1}{2}\ t}\ dt.$$

Условия, которые мы наложили раннее, обеспечивают равномерную относительно n сходимость этого ряда. Действительно, из второй теоремы о среднем значении легко вывести, что общий член ряда есть $O(f[\frac{(2m-1)\,\pi}{\beta}])$ и что он сходится равномерно относительно n. Далее каждый член ряда стремиться к нулю при n$\to \infty$. Формула доказана.

Выпишем функции и их образы , взятые из [6], [7], в виде таблицы.

f(t)	$g(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty}f(t)\,cos\,xt\,dt$
$e^{-\frac{t^2}{2}}$	$e^{-\frac{x^2}{2}}$
$\frac{1}{1+(2-t)^2}+\frac{1}{1+(2+t)^2}$	$\sqrt{2\pi}\frac{cos\,(2x)}{e^x}$
$\frac{1+t}{4+(1+t)^2}+\frac{1-t}{4+(1-t)^2}$	$\sqrt{2\pi}\frac{sin\,x}{e^{2x}}$
$\frac{1}{e^t}$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{1+x^2}$
$e^{-t}sin\ 2t$	$\frac{2+x}{\sqrt{2\pi}[1+(2+x)^2]}+\frac{2-x}{\sqrt{2\pi}[1+(2-x)^2]}$
$\frac{1}{t^2+1}$	$\frac{\pi}{2e^x}$

И покажем, как применяется преобразование Фурье на примере одной из них.

Пусть $f(t)=e^{-\frac{t^2}{2}}$ и $g(x)=e^{-\frac{x^2}{2}}$ при $g(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty}f(t)\,cos\,xt\,dt$, тогда g(x) называется косинус преобразованием Фурье для f(x).

$g(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\ \int_0^\infty e^{-\frac{t^2}{2}}\ cos\ xt\ dt$
$dv = -te^{-\frac{t^2}{2}};\quad dt = de^{-\frac{t^2}{2}}$
$g'(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\ \int_0^\infty\ te^{-\frac{t^2}{2}}\ sin\ xt\ dt = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty sin\ xt\ de^{-\frac{t^2}{2}} =$
$= (\sqrt{\frac{2}{\pi}}\ e^{-\frac{t^2}{2}}\ sin\ xt)_{t=0}^{t=\infty} - \sqrt{\frac{2}{\pi}}\ x \int_0^\infty e^{-\frac{t^2}{2}}\ cos\ xt\ dt$
$\lim_{t\to 0} \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, e^{-\frac{t^2}{2}}\ sin\ xt = 0,$ т. к. $\lim_{t\to 0} sin\ xt = 0$
$\lim_{t\to \infty} \sqrt{\frac{2}{\pi}}\ e^{-\frac{t^2}{2}}\ sin\ xt = 0$ по теореме:
Произведение ограниченной функции на бесконечно малую функцию есть функция бесконечно малая.
Действительно, $\lim_{t\to\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} = 0$ и $|sin\ xt| \leq 1$.
Получили: g'(x)= - x g(x). Следовательно, $\frac{g'(x)}{g(x)} = -x$.
$ln\ g(x) = -\frac{x^2}{2} + C$
$g(x) = e^C\ e^{-\frac{x^2}{2}} = e^{-\frac{x^2}{2}}$
$g(0) = C = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty e^{-\frac{t^2}{2}}\ dt = I$
$I * I = I^2 = \int_0^\infty e^{-\frac{x^2}{2}}\ dx\ \int_0^\infty e^{-\frac{y^2}{2}}\ dy = \int \int_0^\infty e^{-(\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2})}\ dx\ dy =$
$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta\ \int_0^\infty e^{-\frac{r^2}{2}}\ r\ dr = \frac{\pi}{2} \int_0^\infty e^{-t}\ dt = -\frac{\pi}{2}\ e^{-t}|_0^\infty = \frac{\pi}{2}$
$I = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$
$C = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\ I = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sqrt{\frac{\pi}{2}} = 1$
$g(x) = Ce^{-\frac{x^2}{2}} = e^{-\frac{x^2}{2}}$
Косинус преобразование Фурье функции $e^{-\frac{x^2}{2}}$ совпадает с нею же самой.

Теперь перейдём к основной части работы. Будем подстаывлять функции и их образы из таблицы в формулу суммирования Пуассона, которую привели выше:

$$\sqrt{\alpha}\ \left[\frac{1}{2}\, f(0) + \sum_{n=1}^{\infty} f\ (n\alpha)\right] = \sqrt{\beta}\ \left[\frac{1}{2}\, g(0) + \sum_{n=1}^{\infty}\ g(n\beta)\right]$$

Пример 1. Возьмём функцию f(t)=$e^{-\frac{t^2}{2}}$, и её образ g(x)=$e^{-\frac{x^2}{2}}$.
Далее заменим t на $n\alpha$, а x – на $n\beta$:

$f(n\alpha) = e^{-\frac{(n\alpha)^2}{2}},\quad g(n\beta) = e^{-\frac{(n\beta)^2}{2}}$

f(0)=g(0)=1

и это всё подставим в формулу суммирования Пуассона:

$\sqrt{\alpha}\,[\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^\infty e^{-\frac{(n\alpha)^2}{2}}] = \sqrt{\beta}\,[\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^\infty e^{-\frac{(n\beta)^2}{2}}]$

Воспользуемся условиями, которые были наложены на формулу Пуассона выше:
$\alpha>0,\ \alpha\beta = 2\pi$
Выберем $\alpha = 4x$. Тогда $\beta = \frac{2\pi}{\alpha} = \frac{2\pi}{4x} = \frac{\pi}{2x}$.
И подставим α и β в исходную формулу:

$\sqrt{4x}\,[\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^\infty e^{-\frac{(4nx)^2}{2}}] = \sqrt{\frac{\pi}{2x}}\,[\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^\infty e^{-\frac{n^2\pi^2}{8x^2}}]$

Конечный результат:

$$\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}e^{-8x^2n^2}=\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}x}\left[\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}e^{-\frac{\pi^2n^2}{8x^2}}\right]$$

Пример 2. Теперь пусть f(t)=$\frac{1}{1+(2-t)^2}+\frac{1}{1+(2+t)^2}$, g(x)= $\sqrt{2\pi}\frac{cos\,(2x)}{e^x}$.

Заменим аргументы:

$$f(n\alpha)=\frac{1}{1+(2-n\alpha)^2}+\frac{1}{1+(2+n\alpha)^2}\ ,\quad g(n\beta)=\sqrt{2\pi}\ \frac{cos\,(2n\beta)}{e^{n\beta}}$$

Снова подставим в формулу:

$$\sqrt{\alpha}\left[\frac{1}{5}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{1+(2-n\alpha)^2}+\frac{1}{1+(2+n\alpha)^2}\right)\right]=\sqrt{\beta}\left[\sqrt{\frac{\pi}{2}}+\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{2\pi}\frac{cos\,(2n\beta)}{e^{n\beta}}\right]$$

Выберем α и β, которые будут соответствовать условиям: $\alpha\beta=2\pi$, $\alpha>0$:

$$\alpha=\frac{\pi^3x}{2},\quad \beta=\frac{4}{\pi^2x}$$

И подставляем:

$$\sqrt{\frac{\pi^3x}{2}}\left[\frac{1}{5}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{1+(2-\frac{\pi^3nx}{2})^2}+\frac{1}{1+(2+\frac{\pi^3nx}{2})^2}\right)\right]=\sqrt{\frac{4}{\pi^2x}}\left[\sqrt{\frac{\pi}{2}}+\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{2\pi}\frac{cos\,(\frac{8n}{\pi^2x})}{e^{n\beta}}\right]$$

$$\pi^2x\sqrt{\frac{\pi}{2}}\left[\frac{1}{5}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{1+(2-\frac{\pi^3nx}{2})^2}+\frac{1}{1+(2+\frac{\pi^3nx}{2})^2}\right)\right]=2\left[\sqrt{\frac{\pi}{2}}+\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{2\pi}\frac{cos\,(\frac{8n}{\pi^2x})}{e^{n\beta}}\right]$$

Пример 3.Тоже самое проделаем с третьей функцией и её образом.

f(t)=$\frac{1+t}{4+(1+t)^2}+\frac{1-t}{4+(1-t)^2}$, g(x)= $\sqrt{2\pi}\frac{sin\,x}{e^{2x}}$

Заменим переменные:

$$f(n\alpha)=\frac{1+n\alpha}{4+(1+n\alpha)^2}+\frac{1-n\alpha}{4+(1-n\alpha)^2},\quad g(n\beta)=\sqrt{2\pi}\frac{sin\,n\beta}{e^{2n\beta}}$$

Подставим:

$$\sqrt{\alpha}\left[\frac{1}{5}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1+n\alpha}{4+(1+n\alpha)^2}+\frac{1-n\alpha}{4+(1-n\alpha)^2}\right)\right]=\sqrt{\beta}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{2\pi}\frac{sin\,n\beta}{e^{2n\beta}}\right)$$

Выберем подходящие α и β:
$\alpha=5x,\quad \beta=\frac{2\pi}{5x}$
И получим:

$$\sqrt{5x}\left[\frac{1}{5}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1+5nx}{4+(1+5nx)^2}+\frac{1-5nx}{4+(1-5nx)^2}\right)\right]=\sqrt{\frac{2\pi}{5x}}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{2\pi}\frac{sin\,\frac{2n\pi}{5x}}{e^{\frac{4n\pi}{5x}}}\right)$$

$$5x\left[\frac{1}{5}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1+5nx}{4+(1+5nx)^2}+\frac{1-5nx}{4+(1-5nx)^2}\right)\right]=\sqrt{2\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{2\pi}\frac{sin\,\frac{2n\pi}{5x}}{e^{\frac{4n\pi}{5x}}}\right)$$

Пример 4.Пусть f(t)=$\frac{1}{e^t}$, g(x)=$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{1+x^2}$

Заменим t на $n\alpha$, а x на — $n\beta$:

$f(n\alpha) = \frac{1}{e^{n\alpha}}, \quad g(n\beta) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{1+n^2\beta^2}.$

f(0)=1, g(0)=$\sqrt{\frac{2}{\pi}}$.

Запишем получившееся равенство:

$\sqrt{\alpha}\left[\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{e^{n\alpha}}\right] = \sqrt{\beta}\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}+\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+n^2\beta^2}\right]$

Снова выберем переменные: $\alpha = 2x, \quad \beta = \frac{\pi}{x}$

$\sqrt{2x}\left[\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{e^{2nx}}\right] = \sqrt{\frac{\pi}{x}}\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}+\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+\frac{n^2\pi^2}{x^2}}\right]$

И получим ещё одну новую формулу:

$\sqrt{2}x\left[\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{e^{2nx}}\right] = \frac{1}{\sqrt{2}}+\sqrt{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+\frac{n^2\pi^2}{x^2}}$

Пример 5. Следующая функция $f(t) = \frac{sin\,2t}{e^t}$ и её образ $g(x) = \frac{2+x}{\sqrt{2\pi}[1+(2+x)^2]}+\frac{2-x}{\sqrt{2\pi}[1+(2-x)^2]}$.

Делаем замену переменных:

$f(n\alpha) = \frac{sin\,2n\alpha}{e^{n\alpha}}, \quad g(n\beta) = \frac{2+n\beta}{\sqrt{2\pi}[1+(2+n\beta)^2]}+\frac{2-n\beta}{\sqrt{2\pi}[1+(2-n\beta)^2]}.$

$f(0) = 0, \quad g(0) = \frac{\sqrt{8\pi}}{5}.$

Подставляем:

$\sqrt{\alpha}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{sin\,2n\alpha}{e^{n\alpha}} = \sqrt{\beta}\left[\frac{\sqrt{2\pi}}{5}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2+n\beta}{\sqrt{2\pi}[1+(2+n\beta)^2]}+\frac{2-n\beta}{\sqrt{2\pi}[1+(2-n\beta)^2]}\right]$

Пусть $\alpha = 2x$ и $\beta = \frac{\pi}{x}$.

$\sqrt{2x}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{sin\,4nx}{e^{2nx}} = \sqrt{\frac{\pi}{x}}\left[\frac{\sqrt{2\pi}}{5}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2+\frac{n\pi}{x}}{\sqrt{2\pi}[1+(2+\frac{n\pi}{x})^2]}+\frac{2-\frac{n\pi}{x}}{\sqrt{2\pi}[1+(2-\frac{n\pi}{x})^2]}\right]$

Новая формула:

$\sqrt{2}x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{sin\,4nx}{e^{2nx}} = \sqrt{\pi}\left[\frac{\sqrt{2\pi}}{5}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2+\frac{n\pi}{x}}{\sqrt{2\pi}[1+(2+\frac{n\pi}{x})^2]}+\frac{2-\frac{n\pi}{x}}{\sqrt{2\pi}[1+(2-\frac{n\pi}{x})^2]}\right]$

Пример 7. Возьмём $f(t) = \frac{1}{1-t^2}, \quad g(x) = \frac{\sqrt{\pi}\,sin\,x}{\sqrt{2}}.$

Запишем через другие переменные:

$f(t) = \frac{1}{1-n^2\alpha^2}, \quad g(x) = \frac{\sqrt{\pi}\,sin\,n\beta}{\sqrt{2}}.$

Посчитаем f(0) и g(0):

$f(0) = 1, \quad g(0) = 0$

и подставим в формулу Пуассона:

$\sqrt{\alpha}\left[\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1-n^2\alpha^2}\right]=\sqrt{\beta}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{\pi}\,sin\,n\beta}{\sqrt{2}}.$

Пусть $\alpha = 2x, \quad \beta = \frac{\pi}{x}.$

$\sqrt{2x}\left[\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1-4n^2x^2}\right]=\sqrt{\frac{\pi}{x}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{\pi}\,sin\,n\frac{\pi}{x}}{\sqrt{2}}.$

$\sqrt{2}x\left[\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1-4n^2x^2}\right]=\sqrt{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{\pi}\,sin\,n\frac{\pi}{x}}{\sqrt{2}}.$

Таким образом, при помощи формулы суммирования Пуассона и преобразования Фурье мы вывели семь новых формул.

5 От анализа Фурье к вейвлет-анализу

Для чего вообще нужен этот переход и сам вейвлет-анализ? Потому что методы Фурье имеют значительные недостатки. А именно,теория вейвлетов содержит арсенал чрезвычайно полезных средств, позволяющих осуществить разложение функций эффективным и одновременно теоретически обоснованным способом, то есть с помощью вейвлет-анализа намного удобнее и проще представлять функции набором коэффициентов, каждый из которых дает некую ограниченную информацию о положении функции и о её частоте. Если говорить в общем, то вейвлет-представление функции состоит из общего грубого приближения и уточняющих коэффициентов, позволяющих работать с функцией при различных масштабах. Таким образом следствием развития анализа Фурье стал вейвлет-анализ.

Опишем переход от анализа Фурье к вейвлет-анализу согласно [12], [13].Обозначим через $L^2(0{,}2\pi)$ множество всех измеримых функций f, определенных на интервале (2;2π) и таких, что

$$\int_0^{2\pi} |f(x)|^2 \, dx \, < \, \infty$$

Можно считать, что f кусочно-непрерывные функции. Также предположим, что функции из $L^2(0;2\pi)$ периодически продолжаемы на всю вещественную ось

$$R := (-\infty{,}\infty),$$

а именно: $f(x) \; = \; F(x - 2\pi)$ для всех x. Поэтому множество $L^2(0{,}2\pi)$ часто называют пространством $2\pi-$периодических функций, интегрируемых с квадратом. В этом можно легко убедиться, проверив, что $L^2(0{,}2\pi)$-векторное пространство. Любую f из $L^2(0{,}2\pi)$ можно представить рядом Фурье

$$f(x) \; = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}, \tag{20}$$

где константы c_n, именуемые коэффициентами Фурье, определяются формулой

$$c_n \; = \; \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-inx} \, dx \tag{21}$$

Сходимость рядов (20) в пространстве $L^2(0;2\pi)$ значит, что

$$\lim_{M,N\to\infty} \int_0^{2\pi} \left| f(x) \; - \sum_{n=-M}^{N} c_n e^{inx} \right|^2 \, dx \; = \; 0.$$

При разложении в ряды Фурье (20) есть две явные особенности:

1) f разлагается в бесконечную сумму взаимно ортогональных компонент $g_n; = c_n e^{inx}$, где ортогональность:

$$< g_m, g_n >^* = 0 \qquad m \neq \; n, \tag{22}$$

где

$$< g_m, g_n >^* : -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g_m(x) \overline{g_n(x)} \, dx, \tag{23}$$

черта над функцией обозначает комплексное сопряжение. Условие (22) - следствие факта, что

$$\omega_n(x) := e^{inx}, \quad n = ..., -1,0,1,..., \tag{24}$$

образует ортонормированный базис в $L^2(0,2\pi)$;

2) ортонормированный базис $\{\omega_n\}$ порождается растяжением единственной функции

$$\omega(x) := e^{ix}, \tag{25}$$

так, что $\omega_n(x) = \omega(nx)$ для всех целых n. Это и есть целочисленное растяжение.

Итог.*Каждая 2π-периодическая, интегрируемая с квадратом функция порождается "суперпозицией"целочисленных растяжений базисной функции $\omega(x) = e^{ix}$.*

Разложение в ряд Фурье (20) удовлетворяет равенству Парсеваля, что следует из свойств базиса $\{\omega_n\}$

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(x)|^2\,dx = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2. \tag{26}$$

Допустим, что l^2 - это пространство всех суммируемых с квадратом бесконечных последовательностей; то есть, $\{c_n\}$ включает в себя l^2 тогда и только тогда, когда

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 < \infty$$

.

Следовательно, в случае, когда квадратный корень величины, стоящей в левой части (26), является "нормой"для измерения функций из $L^2(0,2\pi)$ и одновременно квадратный корень величины в правой части (26) используется как норма в l^2, то пространоство функций $L^2(0,2\pi)$ и пространство последовательностей l^2 изометричны друг другу. Но, если учесть (20), то можно сказать, что 2π-*периодическая интегрируемая с квадратом функция представляет собой l^2-линейную комбинациюцелочисленных растяжений базисной функции* $\omega(x) = e^{ix}$. Следует обратить внимание, что базисная функция

$$\omega(x) = e^{ix} = \cos x + i \sin x,$$

которая является синусоидальной волной,-это только одна функция, требуемая для порождения всех 2π-периодических интегрируемых с квадратом функций. Для любого целого, большого по абсолютной величине n волна $\omega_n(x) = \omega(nx)$ имеет высокую *частоту*, а для малых по абсолютной величине значений n волна $\omega_n(x)$ имеет низкую частоту. Таким образом, каждая функция из $L^2(0,2\pi)$ состоит из волн различных частот.

Теперь рассмотрим пространство $L^2(R)$ измеримых функций f, определенных на вещественной оси R, удовлетворяющих неравенству

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2\,dx < \infty.$$

видно, что два пространства функций $L^2(0,2\pi)$ и $L^2(R)$ сильно отличаются. Каждая функция, а точнее её локальное среднее значение, из $L^2(R)$ дол"затухать"до нуля при x, стремящемся к $\pm\infty$, но синусоидальные (волны) функции $\omega_n(x)$ не принадлежат $L^2(R)$. Если мы хотим использовать "волны порождающие $L^2(R)$, то эти волны должны были бы затухать до нуля при $x \to \pm\infty$, и из всех практических соображений это затухание должно было бы быть очень быстрым. Твк мы подощли к рассмотрению малых волн, илиtextitвейвлетов, для порождения $L^2(R)$. Так же, как и в случае $L^2(0{,}2\pi)$, где одна функция $\omega(x) = e^{ix}$ порождает целое пространство, предпочтительнее иметь одну функцию для порождения пространства $L^2(R)$. Обозначим её через ψ. Но если вейвлет ψ имеет очень быстрое затухание, то как он может покрыть всю вещественную ось? Благодаря сдвигу ψ вдоль R.

Пусть Z обозначает множество целых чисел:

$$Z = ..., -1{,}0{,}1{,}....$$

Простейший способ для ψ покрыть все множество Rсостоит в рассмотрении всех *целочисленных сдвигов* ψ, а именно

$$\psi(x-k), \quad k \in Z.$$

Далее, так же как и в синусоидальном случае, нужно рассматривать волны различных частот. Будем использовать для частотного разбиения целые степени 2 ради вычелительной эффективности. В результате мы рассматриваем малые волны

$$\psi\,(2^j\,x\,-\,k), \quad j{,}k \in Z. \tag{27}$$

Обратим внимание, что $\psi\,(2^j\,x\,-\,k)$ получена из одной "вейвлет-функции"ψ в результате *двоичного растяжения* и *двухпараметрического сдвига* (на $k/2^j$).

Итак введем обозначения для скалярного произведения и нормы в пространстве $L^2(R)$:

$$< f{,}g > := \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\overline{g(x)}\,dx; \tag{28}$$

$$||f||_2 \, := < f{,}f >^{1/2}, \tag{29}$$

где $f{,}g \in (R)$. Отметим, что для любых $j{,}k \in Z$ мы имеем

$$||f(2^jx-k)||_2 \;=\; \left\{\int_{-\infty}^{infty} |f(2^jx-k)|^2\,dx\right\}^{1/2} \;=\; 2^{-j/2}\,||f||_2.$$

Если функция $\psi \in L^2(R)$ имеет единичную норму, то все функции $\psi_{j,k}$, определенные формулой

$$\psi_{j,k}(x) \;:=\; 2^{j/2}\,\psi(2^jx-k), \quad j{,}k \in Z. \tag{30}$$

также имеют единичную норму, а именно

$$||\psi_{j,k}||_2 \;:=\; ||\psi||_2 \;=\; 1, \quad j.k \in Z. \tag{31}$$

Далее мы будем использовать символ Кронекера:

$$\delta_{j,k} \;:=\; \begin{cases} 1 & j \;=\; k, \\ 0 & j \;\neq\; k, \end{cases} \tag{32}$$

определенный в ZxZ.

Мы знаем, что функция $\psi \in L^2(R)$ называется ортогональным вейвлетом, если семейство $\{\psi_{j,k}\}$, определенное формулой (30), является ортонормированным базисом в $L^2(R)$; что означает следующее:

$$< \psi_{j,k},\psi_{l,m} > = \delta_{j,l} \cdot \delta_{k,m}, \quad j,k,l,m \in Z, \tag{33}$$

и любая $f \in L^2(R)$ может быть представлена в следующем виде:

$$f(x) = \sum_{j,k=-\infty}^{\infty} c_{j,k}\psi_{j,k}(x), \tag{34}$$

где ряд (34) сходится в $L^2(R)$, а именно

$$\lim_{M_1,N_1,M-2,N_2\to\infty} \left\| f - \sum_{j=-M_2}^{N_2} \sum_{k=-M_1}^{N_1} c_{j,k}\psi_{j,k} \right\|_2 = 0.$$

Ряды, представленные функцией (34), называются вейвлет-рядами. Также, как и коэффициенты Фурье, вейвлет-коэффициенты обозначаются

$$c_{j,k} = < f,\psi_{j,k} > . \tag{35}$$

Если же мы интегральноое преобразование W_ψ в $L^2(R)$ определим как

$$(W_\psi f)(b,a) := |a|^{-\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, \overline{\psi\left(\frac{x-b}{a}\right)}\, dx, \quad f \in L^2(R), \tag{36}$$

то вейвлет=коэффициенты в (34) и (35) примут вид

$$c_{j,k} = (W_\psi f)\left(\frac{k}{2^j}, \frac{1}{2^j}\right). \tag{37}$$

Линейное преобразование W_ψ есть интегральное вейвлет-преобразование относительно "базисного вейвлета"ψ. Следовательно, (j,k)-й вейвлет-коэффициент функции f определяется интегральным вейвлет-преобразованием f, вычмсленным в точке двухпараметрического сдвига $b = k/2^j$ с двоичным рвстяжением $a = 2^{-j}$, где тот же ортогональный вейвлет ψ используется для порождения вейвлет-ряда (34) и для определения интегрального вейвлет-преобразования(36).

Это интегральное преобразование значительно обобщает интегральное преобразование Фурье F, определяемое формулой

$$(F,f)(y) := \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iyx} f(x)\, dx, \quad f \in L^2(R). \tag{38}$$

Отметим тот факт, что ряд Фурье и преобразование Фурье явно не связаны друг с другом, а вейвлет-ряд (34) и интегральное вейвлет-преобразование (36) тесно связаны друг с другом, как это описывается формулой (37).

Список литературы

[1] Титчмарш Е. К. Теория функций, М: Изд-во Наука, 1980.-463с.

[2] Титчмарш Е. К. Теория дзета-функции Римана, М: Изд-во иностранной литературы, 1953.-408 с.

[3] Зигмунд А. Тригонометрические ряды, том I, М: Изд-во Мир, 1965.-616с.

[4] Зигмунд А. Тригонометрические ряды, том II, М: Изд-во Мир, 1965.-с.

[5] Lyubarskii Yu. and Madych W. R. Irregular Poisson Type Summation, SAMPLING THEORY IN SIGNAL AND IMAGE PROCESSING, Vol. 7, No. 2, May 2008, pp. 173-186

[6] Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления, том III, М: ГИФМЛ, 1963.-656

[7] Бейтмен А. и Эрдейи А. Таблицы интегральных преобразований, том I, М: Изд-во Наука, 1969.-344

[8] Natterer F. The Mathematics of Computerized Tomography, Teubner, Stuttgart, 1986.

[9] Heil C. An introduction to weighted Wiener amalgams, in Wavelets and Their Application, M. Krishma, R. Radha, and S. Thangavelu, eds., Allied, New Delhi, 183-216, 2013.

[10] Christensen O. An Introduction to Frames and Riesz Bases, Applied and Numerical Harmonic Analysis, Birkhauser, Boston,2003.

[11] Титчмарш Э. Ч. Дзета-функция Римана, М:USSR, 2010.-154с.

[12] Чуи К. Введение в вейвлеты: Пер. с англ.- М: Мир, 2001.-412с.

[13] Смоленцев Н.К. Введение в теорию вейвлетов.-Ижевск:РХД. 2010.-292с.

[14] Столниц Э., ДеРоуз Т., Салезин Д. Вейвлеты в компьютерной графике: Пер. с англ.- Ижевск: НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика 2002.-272с.