ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1997 МАТЕМАТИКА № 7 (422)

УДК 517.9

Г.А. СВИРИДЮК, Т.Г. СУКАЧЕВА, Л.Л. ДУДКО

ОТНОСИТЕЛЬНАЯ σ-ОГРАНИЧЕННОСТЬ ЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРОВ

Пусть $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{F}$ — банаховы пространства; оператор L принадлежит $\mathcal{L}(\mathfrak{U},\mathfrak{F})$, т.е. линеен и непрерывен, а оператор $M:\mathrm{dom}\to\mathfrak{F}$ линеен и замкнут с областью определения $\mathrm{dom}\,M$, плотной в $\mathfrak{U}$. Следуя [1], введем в рассмотрение *L-резольвентное* множество $\rho^L(M)=\{\mu\in\mathbb{C}:(\mu L-M)^{-1}\in\mathcal{L}(\mathfrak{F};\mathfrak{U})\}$ и *L-спектр* $\sigma^L(M)\mathbb{C}\setminus\rho^L(M)$ оператора M. Оператор M называется *спектрально ограниченным относительно* оператора L или (L,σ)-*ограниченным* [2], [3], если

$$\exists a>0\ \forall\mu\in\mathbb{C}\ (|\mu|>a)\Longrightarrow(\mu\in\rho^L(M)).$$

Пусть существует оператор $L^{-1}\in\mathcal{L}(\mathfrak{F};\mathfrak{U})$ и $\mathrm{dom}\,M=\mathfrak{U}$. Тогда ввиду ограниченности оператора $L^{-1}M$ (или ML^{-1}) оператор M с очевидностью будет (L,σ)-ограниченным. Проведем анализ этого понятия в случае необратимости оператора L, в частности, когда его ядро $\ker L\neq\{0\}$.

Необходимость такого анализа заключается в следующем. Как показано в ([4], гл. 1) (развитие результатов есть в ([5], гл. 1)), (L,σ)-ограниченный оператор M играет ту же роль при исследовании разрешимости уравнения типа уравнений Соболева [6]

$$L\dot{u}=Mu,\qquad \ker L\neq\{0\},\tag{0.1}$$

что и ограниченный оператор S при исследовании стандартного уравнения $\dot{u}=Su$. К настоящему времени известно большое число начально-краевых задач для уравнений в частных производных, возникших в приложениях [7], которые редуцируются к задаче Коши $u(0)=u_0$ для уравнения (0.1). Более того, понятие относительно σ-ограниченного оператора имеет большое значение при исследовании полулинейных уравнений типа уравнений Соболева [8]. И наконец, ранее рассмотренные задачи [9], [10] можно существенно упростить, используя это понятие.

Однако в приложениях очень неудобно проводить непосредственную проверку (L,σ)-ограниченности оператора M. Поэтому весьма полезными будут достаточные условия относительной σ-ограниченности, которые свяжут сами операторы L и M, минуя обращение к L-резольвентному множеству (или L-спектру) оператора M.

Статья содержит две части: первая посвящена выделению некоторых необходимых условий (L,σ)-ограниченности оператора M, а вторая — доказательству их достаточности.

Условимся о следующем: все исследования проводятся в вещественных банаховых пространствах, но при рассмотрении "спектральных" вопросов вводится их естественная комплексификация; символами $\mathbb{I}$ и $\mathbb{O}$ обозначаются соответственно "единичный" и "нулевой" операторы, область определения которых ясна из контекста.

Работа поддержана программой "Университеты России" по направлению "Фундаментальные проблемы математики и механики", проект 1.5.16; Международным научным фондом Дж.Сороса и частично Государственной научной стипендией.

1. Необходимые условия

Пусть оператор M (L,σ)-ограничен, а $\Gamma\subset\mathbb{C}$ — такой контур, что $\Gamma=\{\mu\in\mathbb{C}:|\mu|=r>a\}$. Рассмотрим интегралы типа интегралов Ф. Рисса

$$P=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma(\mu L-M)^{-1}L\,d\mu,\qquad Q=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma L(\mu L-M)^{-1}d\mu. \tag{1.1}$$

Лемма 1.1. [4], [5]. *Операторы $P\in\mathcal{L}(\mathfrak{U})$ и $Q\in\mathcal{L}(\mathfrak{F})$ — проекторы.*

Положим $\mathfrak{U}^0=\ker P$, $\mathfrak{U}^1=\operatorname{im}P$ и $\mathfrak{F}^0=\ker Q$, $\mathfrak{F}^1=\operatorname{im}Q$. Обозначим через L_k (M_k) сужение оператора L (M) на $\mathfrak{U}^k$ $(\mathfrak{U}^k\cap\operatorname{dom}M)$, $k=0,1$.

Теорема 1.1. (i) $L_k:\mathfrak{U}^k\to\mathfrak{F}^k$, $M_k:\mathfrak{U}^k\cap\operatorname{dom}M\to\mathfrak{F}^k$, $k=0,1$;
(ii) *существует оператор* $L_1^{-1}\in\mathcal{L}(\mathfrak{F}^1;\mathfrak{U}^1)$;
(iii) *существует оператор* $M_0^{-1}\in\mathcal{L}(\mathfrak{F}^0;\mathfrak{U}^0)$;
(iv) *оператор* $M_1\in\mathcal{L}(\mathfrak{U}^1,\mathfrak{F}^1)$.

Доказательство. (i) Ввиду очевидного равенства $LP=QL$ имеет место действие $L_k:\mathfrak{U}^k\to\mathfrak{F}^k$, $k=0,1$. Поскольку

$$\begin{aligned}M(\mu L-M)^{-1}&=\mu L(\mu L-M)^{-1}-I,\\(\mu L-M)^{-1}M&=\mu(\mu L-M)^{-1}L-I,\end{aligned} \tag{1.2}$$

то $M(\mu L-M)^{-1}Lu=L(\mu L-M)^{-1}Mu\ \ \forall u\in\operatorname{dom}M$. Отсюда $MPu=QMu\ \ \forall u\in\operatorname{dom}M$ в силу замкнутости оператора M и "римановости" интегралов (1.1).

(ii) Оператор L_1^{-1} равен сужению оператора

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma(\mu L-M)^{-1}d\mu\in\mathcal{L}(\mathfrak{F};\mathfrak{U})$$

на $\mathfrak{F}^1$.

(iii) Оператор M_0^{-1} равен сужению оператора

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma(\mu L-M)^{-1}\frac{d\mu}{\mu}\in\mathcal{L}(\mathfrak{F};\mathfrak{U})$$

на $\mathfrak{F}^0$.

(iv) В силу (1.2) оператор

$$MP=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma L(\mu L-M)^{-1}M\,d\mu=M_1$$

замкнут и определен на всем $\mathfrak{U}^1$. Значит, $M_1\in\mathcal{L}(\mathfrak{U}^1,\mathfrak{F}^1)$. $\square$

Положим $R=M_0^{-1}L_0\in\mathcal{L}(\mathfrak{U}^0)$, $T=L_1^{-1}M_1\in\mathcal{L}(\mathfrak{U}^1)$. В силу теоремы 1.1 имеет место разложение L-резольвенты $(\mu L-M)^{-1}$ оператора M в ряд Лорана

$$(\mu L-M)^{-1}=-\sum_{q=0}^{\infty}\mu^qR^qM_0^{-1}(I-Q)+\sum_{q=1}^{\infty}\mu^{-q}T^{q-1}L_1^{-1}Q,$$

где $\mu\in\mathbb{C}$, $|\mu|>a$.

Определение 1.1. Точка ∞ называется *устранимой особой точкой, полюсом порядка $p\in\mathbb{N}$, существенно особой точкой* L-резольвенты оператора M, если $R\equiv\mathbb{O}$, $R^p\not\equiv\mathbb{O}$ и $R^{p+1}\equiv\mathbb{O}$, $R^q\neq\mathbb{O}$ $\forall q\in\mathbb{N}$ соответственно.

В дальнейшем вектор $\varphi \in \ker L \setminus \{0\}$ будем называть *собственным вектором оператора* L. Упорядоченное множество $\{\varphi_1, \varphi_2, \dots\} \subset \mathfrak{U}$ называется *цепочкой* M*-присоединенных векторов* собственного вектора φ_0, если

$$L\varphi_{q+1} = M\varphi_q, \quad q = 0, 1, \dots; \qquad \varphi_q \notin \ker L \setminus \{0\}, \quad q = 1, 2, \dots$$

Цепочка может быть бесконечной (в частности, она может быть заполнена нулями, если $\varphi_0 \in \ker L \cap \ker M$), однако она обязательно конечна, если существует такой M-присоединенный вектор φ_p, что либо $\varphi_p \notin \operatorname{dom} M$, либо $M\varphi_p \notin \operatorname{im} L$. В частности, вектор φ_0 не имеет M-присоединенных векторов, если либо $\varphi_0 \notin \operatorname{dom} M$, либо $M\varphi_0 \notin \operatorname{im} L$. Мощность конечной цепочки называется ее *длиной*. Линейная оболочка всех собственных и M-присоединенных векторов оператора L называется M*-корневым линеалом*. Если M-корневой линеал замкнут, то он называется M*-корневым пространством*.

Теорема 1.2. (i) *Пусть* ∞ *— устранимая особая точка* L*-резольвенты оператора* M*. Тогда* $\ker L = \mathfrak{U}^0$, $\operatorname{im} L = \mathfrak{F}^1$ *и ни один собственный вектор оператора* L *не имеет* M*-присоединенных векторов.*

(ii) *Пусть* ∞ *— полюс порядка* $p \in \mathbb{N}$ L*-резольвенты оператора* M*. Тогда* $\mathfrak{U}^0$ *—* M*-корневое пространство оператора* L*, и длина любой цепочки любого собственного вектора оператора* L *не превосходит* p*.*

Доказательство. (i) По построению $\ker L \subset \mathfrak{U}^0$. Пусть $\varphi \in \mathfrak{U}^0 \setminus \ker L$, тогда $L_0\varphi \in \mathfrak{F}^0$ в силу теоремы 1.1 (i). Отсюда $\psi = M_0^{-1}L_0\varphi = R\varphi \neq 0$, что противоречит условию теоремы. Итак, $\ker L = \mathfrak{U}^0$. Из теоремы 1.1 (ii) вытекает, что $L = L_1P$, т. е. $L_1^{-1}L = P$. Значит, $\operatorname{im} L = \mathfrak{F}^1$.

Теперь пусть ψ — M-присоединенный вектор собственного вектора φ оператора L. В силу теоремы 1.1 (i) $M\varphi = L\psi \in \mathfrak{F}^0$. Отсюда $L_0(I - P)\psi + L_1P\psi = L_1P\psi \in \mathfrak{F}^1$. Значит, $P\psi = 0$ и $\psi \in \mathfrak{U}^0 \ker L$. Противоречие.

(ii) Пусть φ_q — M-присоединенный вектор собственного вектора φ_0. Тогда

$$-(\mu L - M)^{-1}L\varphi_q = \varphi_{q-1} + \mu\varphi_{q-2} + \dots + \mu^{q-1}\varphi_0,$$

что легко получить по индукции, используя соотношение $-L\varphi_{k+1} + \mu L\varphi_k = (\mu L - M)\varphi_k$. Отсюда следует, что M-корневой линеал всегда лежит в $\mathfrak{U}^0$. Именно,

$$P\varphi_q = -\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \sum_{k=0}^{q-1} \mu^{q-1-k}\varphi_k d\mu = 0.$$

Пусть $\varphi \in \mathfrak{U}^0$, и пусть $R^p\varphi \neq 0$, а $R^{p+1}\varphi = 0$. В силу конструкции оператора R имеем

$$\begin{array}{ll} R^p\varphi = \varphi_0 \in \ker L \setminus \{0\}, & R^{p-1}\varphi = \varphi_1 \notin \ker L, \quad \dots \\ R\varphi = \varphi_{p-1} \notin \ker L, & \varphi = \varphi_p \notin \ker L, \end{array}$$

Нетрудно заметить, что $\{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_p\}$ — цепочка M-присоединенных векторов собственного вектора φ_0. Отсюда же вытекает и утверждение о длине цепочки. □

Замечание 1.1. В дальнейшем случаи "∞ — устранимая особая точка" и "∞ — полюс порядка p" объединяем в один случай "∞ — несущественная особая точка".

2. Достаточность необходимых условий

Прежде всего заметим, что здесь ограничимся случаем $M \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}, \mathfrak{F})$. Именно этот случай часто встречается в приложениях [8]–[10]. Перечислим необходимые условия (L, σ)-ограниченности оператора M в случае несущественно особой точки в бесконечности.

(A1) Длина любой цепочки M-присоединенных векторов любого собственного вектора оператора L не превосходит числа $p \in \mathbb{N}$.

Обозначим через $\mathfrak{U}^0$ M-корневой линеал оператора L.

(A2) $\mathfrak{U}^0$ — дополняемое подпространство пространства $\mathfrak{U}$.

Обозначим через $\mathfrak{U}^2 = \mathfrak{U} \ominus \mathfrak{U}^0$ некоторое алгебраическое и топологическое дополнение к $\mathfrak{U}^0$. Положим $M[\mathfrak{U}^0] = \mathfrak{F}^0$, $L[\mathfrak{U}^2] = \mathfrak{F}^2$.

(A3) $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}^0 \oplus \mathfrak{F}^2$.

Обозначим через M_0 сужение оператора M на $\mathfrak{U}^0$.

(A4) Существует оператор $M_0^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{F}^0; \mathfrak{U}^0)$.

Итак, пусть выполнены условия (A1)–(A4). Обозначим через L_0 сужение оператора L на $\mathfrak{U}^0$. По построению $L_0 \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}^0; \mathfrak{F}^0)$. Положим $R = M_0^{-1} L_0$. Очевидна следующая

Лемма 2.1. *Оператор R нильпотентен, причем степень нильпотентности не превосходит p.*

Обозначим через L_2 (M_2) сужение оператора L (M) на $\mathfrak{U}^2$, а через P_2 (Q_2) — проектор вдоль $\mathfrak{U}^0$ ($\mathfrak{F}^0$) на $\mathfrak{U}^2$ ($\mathfrak{F}^2$). Заметим, что в силу теоремы Банаха существует оператор $L_2^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{F}^2; \mathfrak{U}^2)$. Введем в рассмотрение оператор S, равный сужению оператора $M_0^{-1}(I - Q_2)M$ на $\mathfrak{U}^2$, и оператор T_2, равный сужению оператора $L_2^{-1} Q_2 M$ на $\mathfrak{U}^2$. Очевидно, $S \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}^2; \mathfrak{U}^0)$, а $T_2 \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}^2)$. Построим множество

$$\mathfrak{U}^1 = \{u \in \mathfrak{U} : u = (I - G)u^2,\ u^2 \in \mathfrak{U}^2\},$$

где оператор

$$G = \sum_{q=0}^{p} R^q S T_2^q \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}^2; \mathfrak{U}^0).$$

Лемма 2.2. *$\mathfrak{U}^1$ — подпространство в $\mathfrak{U}$, дополнительное к $\mathfrak{U}^0$.*

Доказательство. Построим оператор $P = (I - G)P_2$ и покажем, что P — проектор вдоль $\mathfrak{U}^0$ на $\mathfrak{U}^1$.

Непрерывность оператора P очевидна, а идемпотентность следует из того, что $P_2 G = \mathbb{O}$ по построению. Итак, P — проектор, причем $\operatorname{im} P = \mathfrak{U}^1$ и $\ker P \supset \mathfrak{U}^0$ по построению. Пусть $u \in \ker P$, тогда $u = (I - P_2)u + P_2 u = u^0 + u^2$. Значит, $Pu = Pu^2 = u^2 - Gu^2 = 0$. Поскольку $P_2 P = P_2$, то $P_2 P u = P_2 u^2$, т. е. $u^2 = 0$. $\square$

Положим $\mathfrak{F}^1 = L[\mathfrak{U}^1]$.

Лемма 2.3. *$\mathfrak{F}^1$ — подпространство в $\mathfrak{F}$, дополнительное к $\mathfrak{F}^0$.*

Доказательство. Построим оператор $Q = LPL_2^{-1} Q_2$ и покажем, что Q — проектор вдоль $\mathfrak{F}^0$ на $\mathfrak{F}^1$.

Непрерывность оператора Q очевидна. Далее,

$$Q^2 = LPL_2^{-1} Q_2 LPL_2^{-1} = LP(L_2^{-1} Q_2 L) PL_2^{-1} Q_2 = Q,$$

т. к. $Q_2 L = LP_2 = L_2 P_2$ по построению, откуда $L_2^{-1} Q_2 L = P_2$ и $PP_2 = P$. Итак, Q — проектор, причем $\ker Q \supset \mathfrak{F}^0$, а $\operatorname{im} Q \subset \mathfrak{F}^1$.

Пусть $f \in \ker Q$, тогда $f = (I - Q_2)f + Q_2 f = f^0 + f^2$. Значит, $Qf = Qf^2 = 0$. Положим $u^2 = L_2^{-1} f^2$, тогда $Qf^1 = LPu^2 = L(u^2 - Gu^2) = f^2 + g$, где $g = -LGu^2 \in \mathfrak{F}^0$. Отсюда $Q_2 Q f^2 = f^2 = 0$. Итак, $\ker Q = \mathfrak{F}^0$.

Пусть $f \in \mathfrak{F}^1$, тогда $f = Lu^1 = LPu^2 = LPL_2^{-1} f^2$. Отсюда

$$Qf = LPL_2^{-1} Q_2 LPL_2^{-1} f^2 = LPP_2 PL_2^{-1} f^2 = LPL_2^{-1} f^2 = f,$$

т. е. $\operatorname{im} Q = \mathfrak{F}^1$. $\square$

Обозначим через L_1 (M_1) сужение оператора L (M) на $\mathfrak{U}^1$. По построению оператор $L_1 \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}^1; \mathfrak{F}^1)$, а в силу теоремы Банаха существует оператор $L_1^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{F}^1; \mathfrak{U}^1)$.

Лемма 2.4. *Оператор $M_1 \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}^1; \mathfrak{F}^1)$.*

Доказательство. Поскольку $M \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}, \mathfrak{F})$, то необходимо показать лишь существование действия $M : \mathfrak{U}^1 \to \mathfrak{F}^1$.

Пусть $u^1 \in \mathfrak{U}^1$, тогда

$$\begin{aligned}
Mu^1 &= M(I-G)u^2 = M\Big(I - \sum_{q=0}^{p}(M_0^{-1}L_0)^q M_0^{-1}(I-Q_2)M_2(L_2^{-1}Q_2M_2)^q\Big)u^2 = \\
&= Mu^2 - (I-Q_2)Mu^2 - \sum_{q=1}^{p}(L_0M_0^{-1})^q(I-Q_2)(M_2L_2^{-1}Q_2)^q Mu^2 = \\
&= \Big(I - \sum_{q=1}^{p}(L_0M_0^{-1})^q(I-Q_2)(M_2L_2^{-1}Q_2)^q\Big)Q_2Mu^2. \\
QMu^1 &= LPL_2^{-1}Q_2Mu^1 = LPL_2^{-1}Q_2M(I-G)u^2 = \\
&= L(I-G)L_2^{-1}Q_2Mu^2 = \Big(Q_2 - \sum_{q=1}^{p}(L_0M_0^{-1})^q(I-Q_2)(M_2L_2^{-1}Q_2)^q\Big)Q_2Mu^2.
\end{aligned}$$

Итак, $QMu^1 = Mu^1$. $\square$

Обозначим через T сужение оператора $L_1^{-1}M_1P$ на $\mathfrak{U}^1$. Оператор $T \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}^1)$, следовательно,

$$\exists a > 0 \ \forall \mu \in \mathbb{C} \ (|\mu| > a) \Longrightarrow (\mu \in \rho(T)),$$

где $\rho(T)$ — резольвентное множество оператора T. Заметим также, что в силу нильпотентности оператора R

$$(\mu R - I)^{-1} = -\sum_{q=0}^{p} \mu^q R^q.$$

Теорема 2.1. *Оператор M (L,σ)-ограничен, причем ∞ — несущественная точка L-резольвенты оператора M.*

Доказательство. Пусть $\mu \in \mathbb{C}$, $|\mu| > a$. Тогда

$$\begin{aligned}
(\mu L - M)^{-1} &= (\mu L - M)^{-1}(I-Q) + (\mu L - M)^{-1}Q = \\
&= (\mu R - I)^{-1}M_0^{-1}(I-Q) + (\mu I - T)^{-1}L_1^{-1}Q = \\
&= -\sum_{q=0}^{p}\mu^q R^q M_0^{-1}(I-Q) + \sum_{q=1}^{\infty}\mu^{-q}T^{q-1}L_1^{-1}Q. \quad \square
\end{aligned}$$

Замечание 2.1. Гораздо более трудоемкое и менее удобочитаемое доказательство достаточности необходимых условий (L,σ)-ограниченности оператора $M \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}; \mathfrak{F})$ в случае несущественной особой точки в бесконечности содержится в [4].

Замечание 2.2. Применение этого результата см. в [8].

Литература

1. Свиридюк Г. А. *Квазистационарные траектории полулинейных динамических уравнений типа Соболева* // Изв. РАН. Сер. матем. – 1993. – Т.57. – № 3. – С.192–207.
2. Свиридюк Г. А. *Полулинейные уравнения типа Соболева с относительно ограниченным оператором* // Докл. РАН. – 1991. – Т.318. – № 4. – С.828-831.
3. Свиридюк Г. А., Апетова Т. В. *Фазовые пространства линейных динамических уравнений типа Соболева* // Докл. РАН. – 1993. – Т.330. – № 6. – С.696–699.
4. Свиридюк Г. А. *Исследование полулинейных уравнений типа Соболева в банаховых пространствах*: Дис. … докт. физ.-матем. наук. – Челябинск, 1992. – 213 с.

5. Бокарева Т. А. *Исследование фазовых пространств полулинейных уравнений типа Соболева с относительно секториальными операторами*: Дис. … канд. физ.-матем. наук. – Санкт-Петербург, 1993. – 117 с.
6. Свиридюк Г. А. *Задача Коши для линейного сингулярного уравнения типа Соболева* // Дифференц. уравнения. – 1987. – Т.23. – № 12. – С.2169–2171.
7. Demidenko G. V. *L_p-theory of boundary value problems for Sobolev type equations* // Partial Diff. Eq. – Banach center publ. – V. 27. – Warszawa. – 1992. – P. 102–109.
8. Свиридюк Г. А. *Об одной модели слабосжимаемой вязкоупругой жидкости* // Изв. вузов. Математика. – 1994. – № 1. – С.62-70.
9. Свиридюк Г. А., Сукачева Т.Г. *Фазовые пространства одного класса операторных полулинейных уравнений типа Соболева* // Дифференц. уравнения. – 1990. – Т.26. – № 2. – С.250–258.
10. Свиридюк Г. А., Сукачева Т.Г. *Задача Коши для одного класса полулинейных уравнений типа Соболева* // Сиб. матем. журн. – 1990. - Т.31. – № 5. – С.109–119.

Челябинский государственный университет
Новгородский государственный университет

Поступила
19.01.1995