ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1997 МАТЕМАТИКА № 7 (422)

УДК 517.5

В.С. КЛИМОВ

ТЕОРЕМЫ ВЛОЖЕНИЯ И ВНЕШНИЕ ПОПЕРЕЧНЫЕ МЕРЫ

Изучаются обобщенные пространства Соболева, аналогичные классам $\overset{\circ}{W}{}^1_p(\Omega)$ и возникающие при замене $L_p(\Omega)$ симметричными пространствами. Устанавливаются точные по порядку оценки норм операторов вложения исследуемых пространств в пространства со смешанной нормой. Основу доказательства большинства результатов составляет неравенство Лумиса–Уитни, связывающее лебегову меру множества с его поперечными мерами.

1. Ниже $\mathbb{R}^n$ означает n-мерное евклидово пространство точек $x = (x_1, \dots, x_n)$, $|x| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$; $\mathfrak{B}_n$ — совокупность борелевских подмножеств пространства $\mathbb{R}^n$; $\Pi_\tau : \mathbb{R}^n \to \tau$ — оператор ортогонального проектирования $\mathbb{R}^n$ на собственное подпространство τ; $\tau_x^\perp$ — пространство, ортогональное τ и проходящее через x из τ; T_n^m — совокупность m-мерных координатных подпространств пространства $\mathbb{R}^n$ $(m = 1, \dots, n-1)$; $\operatorname{mes}_n A$ — n-мерную лебегову меру множества A.

Сопоставим множеству A из $\mathfrak{B}_n$ и пространству τ из T_n^m число $\operatorname{mes}_m \Pi_\tau A$, называемое ([1], с. 227) внешней поперечной мерой множества A. Наибольшее из C_n^m чисел $\operatorname{mes}_m \Pi_\tau A$ $(\tau \in T_n^m)$ обозначим через $\mathcal{D}_m(A)$. Число $\mathcal{D}_m(A)$ характеризует m-мерную протяженность множества A. Его иногда называют m-мерным диаметром A. Из неравенства Лумиса–Уитни ([1], с.227; [2]) вытекает оценка

$$\operatorname{mes}_n A \le \mathcal{D}_m^{n/m}(A) \quad (A \in \mathfrak{B}_n). \tag{1}$$

Далее будут использоваться терминология и результаты теории симметричных пространств [3]–[5]. Пусть $I = (0, b)$ $(0 < b \le \infty)$, $E = E(I)$ и $E_1 = E_1(I)$ — симметричные пространства измеримых относительно меры mes_1 функций, причем $E \subset E_1$. Через E_1/E обозначается [4] множество измеримых на I функций, для которых имеет смысл норма

$$\|u;\, E_1/E\| = \sup\{\|uv;\, E_1\|,\ \|v;\, E\| \le 1\}.$$

Пространство E_1/E называют пространством мультипликаторов из E в E_1. Из определения E_1/E вытекает оценка

$$\|uv;\, E_1\| \le \|u;\, E_1/E\|\, \|v;\, E\|.$$

Пространство E_1/E симметрично. В частности, симметрично пространство $E' = L_1/E$, называемое ([3], с. 140) ассоциированным к пространству E. Неравенство $\|uv;\, L_1\| \le \|u;\, E'\|\, \|v;\, E\|$ именуют неравенством Гёльдера для симметричных пространств. Симметричное пространство E называют ([3], с. 141) максимальным, если E изометрично второму ассоциированному E''.

По известной схеме ([3], с. 211–213) пространство $E = E(I)$ и измеримое по Лебегу множество $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ $(0 < \operatorname{mes}_n \Omega \le b)$ порождают пространство $E(\Omega)$ измеримых относительно меры mes_n функций на Ω. При этом $\|f;\, E(\Omega)\| = \|f^*;\, E(I)\|$, где f^* — перестановка функции $|f|$ в убывающем порядке ([3], с. 83; [6], с. 332; [7]).

Важный класс симметричных пространств образуют пространства Лоренца $\Lambda_\psi(\Omega)$ и Марцинкевича $\mathrm{M}_\psi(\Omega)$, порождаемые возрастающими вогнутыми на $[0, \infty)$ функциями ψ, $\psi(0) = 0$,

$\psi(t) \not\equiv 0$. Нормы в этих пространствах определяют равенствами ([3], с. 150–154)

$$\|f;\,\Lambda_\psi\| = \int_0^\infty \psi(\mu_f(t))dt, \qquad \|g;\,\mathrm{M}_\psi\| = \sup_{t>0}\frac{1}{\psi(t)}\int_0^t g^*(s)ds,$$

в которых $\mu_f(t) = \mathrm{mes}_n\{x \in \Omega : |f(x)| > t\}$ — функция распределения функции f, g^* — перестановка $|g|$ в убывающем порядке. Как известно ([3], с. 154), $\Lambda'_\psi = \mathrm{M}_\psi$, $\mathrm{M}'_\psi = \Lambda_\psi$. Если $\psi(t) = t^\alpha$ $(0 \le \alpha \le 1)$, то пространства $\Lambda_\psi(\Omega)$, $\mathrm{M}_\psi(\Omega)$ обозначают символами $\Lambda_\alpha(\Omega)$ и $\mathrm{M}_\alpha(\Omega)$ соответственно.

Введем класс пространств со смешанной нормой. Пусть Ω — область в $\mathbb{R}^n$, $b = \mathcal{D}_m(\Omega)$ $(m = 1,\ldots,n-1)$, $Q = Q(0,b)$ — симметричное пространство функций на $(0,b)$, $\tau \in T_n^m$, $\Omega_m = \Pi_\tau\Omega$. Тройке (Ω,θ,τ) сопоставим симметричное пространство $Q(\Omega_m)$ измеримых относительно меры mes_m функций на Ω_m и пространство $Q^\tau = Q^\tau(\Omega)$ таких измеримых относительно mes_n функций f, для которых функция $f^\tau(x) = \|f;\,L_\infty(\Omega_x)\|$ $(x \in \Omega_m,\ \Omega(x) = \tau_x^\perp \cap \Omega)$ есть элемент $Q(\Omega_m)$. Положим $\|f;\,Q^\tau\| = \|f^\tau;\,Q(\Omega_m)\|$; $Q^\tau = Q^\tau(\Omega)$ есть банахово идеальное пространство [4].

Если функция $f : \Omega \to \mathbb{R}$ B-измерима (измерима по Борелю) и $f \in \Lambda_\psi^\tau(\Omega)$, то

$$\|f;\,\Lambda_\psi^\tau\| = \int_0^\infty \psi(\mathrm{mes}_m\,\Pi_\tau A_t)dt, \tag{2}$$

где $A_t = \{x \in \Omega : |f(x)| > t\}$. Равенство (2) выражает норму функции f в пространстве $\Lambda_\psi^\tau(\Omega)$ через внешние поперечные меры лебеговых множеств. Далее эквивалентные относительно меры mes_n функции отождествляются. Это позволяет (без уменьшения общности) в ряде ситуаций ограничиться рассмотрением B-измеримых функций.

Пересечение $V_mQ(\Omega)$ пространств $Q^\tau(\Omega)$ $(\tau \in T_n^m)$ с нормой $\|f;\,V_mQ\| = \max\{\|f;\,Q^\tau,\ \tau \in T_n^m\}$ есть банахово идеальное пространство. Если 1_A — индикатор (характеристическая функция) множества $A \subset \Omega$, $A \in \mathfrak{B}_n$, то $\|1_A;\,V_mQ\| = \varphi_Q(\mathcal{D}_m(A))$, где φ_Q — фундаментальная функция пространства Q ([3], с. 137); в частности $\mathcal{D}_m(A) = \|1_a;\,V_mL_1\|$.

Лемма 1. *Пусть $m = 1,\ldots,n-1$, $\alpha(n-m) < 1$, $\beta m = \alpha n - 1 > 0$, $g \in \Lambda_\alpha(\mathbb{R}^n)$,*

$$J(x) = \int_{\mathbb{R}^n}|x-y|^{1-n}g(y)dy.$$

Тогда $\|j;V_m\Lambda_\beta\| \le C(\alpha)\|g;\,\Lambda_\alpha\|$, где константа $C(\alpha)$ не зависит от g из $\Lambda_\alpha(\mathbb{R}^n)$.

Доказательство. Фиксируем τ из T_n^m. Если $n > p > n-m$, $\frac{m}{q} = \frac{n}{p} - 1$, то оператор, сопоставляющий функции g из $L_p(\mathbb{R}^n)$ функцию $J^\tau(x) = \|J;\,L_\infty(\tau_x^\perp)\|$ из $L_q(\tau)$ сублинеен и непрерывен ([8], с. 32). Из обобщенной теоремы Марцинкевича (см. напр., [9], с. 83) следует непрерывность данного оператора из $\Lambda_\alpha(\mathbb{R}^n)$ в $\Lambda_\beta(\tau)$. Теперь доказываемое утверждение вытекает из конечности множества T_n^m. $\square$

2. Всюду ниже Ω — ограниченная область в $\mathbb{R}^n$ $(n \ge 2)$, $a = \mathrm{mes}_n\,\Omega$, $b = \mathcal{D}_m(\Omega)$ $(m = 1,\ldots,n-1)$; α, β — константы, удовлетворяющие при $m \le n-2$ условиям

$$\alpha(n-m) < 1, \quad \beta m = \alpha n - 1 > 0 \tag{3}$$

и $\alpha = \beta = 1$ при $m = n-1$. Через $\overset{\circ}{W}{}_1^1(\Omega)$ обозначим множество функций из пространства Соболева $W_1^1(\Omega)$ ([10], с. 133; [11], с. 146; [12], с. 14), обращающихся в нуль на границе области Ω. Последнее означает, что если функцию из $\overset{\circ}{W}{}_1^1(\Omega)$ продолжить на $\mathbb{R}^n$, полагая ее равной нулю на $\mathbb{R}^n \setminus \Omega$, то продолженная функция принадлежит $W_1^1(\mathbb{R}^n)$.

Для произвольного симметричного пространства $P(\Omega)$ определим пространство $\overset{\circ}{W}P(\Omega)$ как совокупность таких функций f из $\overset{\circ}{W}{}_1^1(\Omega)$, что $\nabla_1 f = |\nabla f| \in P(\Omega)$. В пространстве $\overset{\circ}{W}P(\Omega)$ вводим норму $\|f;\,\overset{\circ}{W}P\| = \|\nabla_1 f;\,P\|$.

Лемма 2. *Для любой функции f из $\overset{\circ}{W}\Lambda_\alpha(\Omega)$ справедливо неравенство*

$$\int_0^\infty \mathcal{D}_m^\beta(A_t)dt \le \varkappa(n,m,\alpha)\|f;\, \overset{\circ}{W}\Lambda_\alpha\|, \tag{4}$$

где $\mathcal{D}_m(A_t)$ есть m-мерный диаметр множества $A_t = \{x \in \Omega : |f(x)| > t\}$, $\varkappa(n, n-1, 1) = n$ и $\varkappa(n,m,\alpha) = C_{n-1}^m C(\alpha) a_n^{-1}$ ($m < n-1$, $a_n = \mathrm{mes}_n\{x \in \mathbb{R}^n,\ |x| \le 1\}$, $C(\alpha)$ — постоянная из леммы 1).

Доказательство. При $m < n-1$ воспользуемся неравенством

$$|f(x)| \le \frac{1}{na_n}\int_{\mathbb{R}^n} |x-y|^{1-n}|\nabla f(y)|dy \quad (x \in \mathbb{R}^n),$$

вытекающим из интегрального представления функций класса $\overset{\circ}{W}{}_1^1(\Omega)$ (см., напр., [11], с. 162). Функцию f считаем B-измеримой и равной нулю на $\mathbb{R}^n \setminus \Omega$. Фиксируем $\tau \in T_n^m$ и соответствующее ему пространство $\Lambda_\beta^\tau(\mathbb{R}^n)$. В силу леммы 1 имеем

$$\|f;\, \Lambda_\beta^\tau\| \le \frac{C(\alpha)}{na_n}\|\nabla_1 f;\, \Lambda_\alpha\|.$$

Это неравенство и (2) влекут оценку

$$\int_0^\infty \mathrm{mes}_m^\beta(\Pi_\tau A_t)dt \le \frac{C(\alpha)}{na_n}\|\nabla_1 f;\, \Lambda_\alpha\|.$$

Данное соотношение верно для любого пространства τ из T_n^m, что и приводит к неравенству (4).

При $m = n-1$, $\alpha = \beta = 1$ оценка (4) установлена в [13]. □

Теорема 1. *Пусть симметричное пространство $P = P(\Omega)$ вложено в пространство $\Lambda_\alpha(\Omega)$, $f \in \overset{\circ}{W}P(\Omega)$, f^* — перестановка в убывающем порядке функции $|f|$, $A_t = \{x \in \Omega : |f(x)| > t\}$, $\delta_f(s) = \mathcal{D}_m(A_{f^*(s)})$ $(0 \le s \le a)$. Тогда*

$$\left\|\delta_f^\beta \frac{df^*}{ds};\ (\Lambda_\alpha/P)'\right\| \le \varkappa(n,m,\alpha)\|f;\, \overset{\circ}{W}P\|. \tag{5}$$

Доказательство. Фиксируем функцию f из $\overset{\circ}{W}P(\Omega)$. Ее перестановка f^* не возрастает на $(0,a]$, абсолютно непрерывна на каждом отрезке $[\varepsilon, a]$ $(0 < \varepsilon < a)$ и $f^*(a) = 0$ [7], [13], [14]. Обозначим через $U(f)$ совокупность неотрицательных B-измеримых функций $u(s)$ $(0 \le s \le a)$, равных нулю на интервалах постоянства функции f^* и удовлетворяющих оценкам $\|u;\, \Lambda_\alpha/P\| \le 1$, $\|u;\, L_\infty\| < \infty$.

Пусть $\mu(t) = \mu_f(t)$ — функция распределения f, $u \in U(f)$. Введем в рассмотрение функции

$$v(t) = \int_0^t u(\mu(s))ds \quad (t \ge 0), \qquad g(x) = (|f(x)|) \quad (x \in \Omega).$$

Как нетрудно видеть, $g \in \overset{\circ}{W}{}_1^1(\Omega)$, $\nabla_1 g = u(\mu(|f|))\nabla_1 f$. Функция $u(\mu(|f(x)|))$ $(x \in \Omega)$ равноизмерима с функцией $u(s)$ $(0 \le s \le a)$, поэтому

$$\|u(\mu(|f|));\, \Lambda_\alpha/P\| = \|u;\, \Lambda_\alpha/P\| \le 1,$$
$$\|\nabla_1 g;\, \Lambda_\alpha\| \le \|u(\mu(|f|));\, \Lambda_\alpha/P\|\, \|\nabla_1 f;\, P\| \le \|\nabla_1 f;\, P\|.$$

Последнее неравенство и лемма 2 приводят к соотношениям

$$\varkappa(n,m,\alpha)\|\nabla_1 f;\, P\| \ge \varkappa(n,m,\alpha)\|\nabla_1 g;\, \Lambda_\alpha\| \ge \int_0^\infty u(\mu(t))\mathcal{D}_m^\beta(A_t)dt \ge \int_0^a u(s)\delta_f^\beta(s)\left|\frac{df^*}{ds}\right|ds.$$

Беря супремум по всем u из $U(t)$ получаем неравенство (5). □

Лемма 3. *Пусть ψ — возрастающая вогнутая функция на $[0,\infty)$, $\psi(0)=0$, $\psi\not\equiv 0$, функция $t^{-\beta}\psi(t)$ убывает на $(0,b)$, $P(\Omega)\subset\Lambda_\alpha(\Omega)$ и оператор*

$$\mathcal{H}_m u\int_{t^{n/m}}^{a} s^{1/n-1}u(s)ds$$

непрерывен и действует из $P(0,a)$ в $\Lambda_\psi(0,a^{m/n})$. Тогда

$$\|f;\, V_m\Lambda_\psi\|\le \varkappa(n,m,\alpha)\mathcal{K}(P,\Lambda_\psi)\|f;\, \overset{\circ}{W}P\|, \tag{6}$$

где $\mathcal{K}(P,\Lambda_\psi)$ — норма оператора $\mathcal{H}_m$.

Доказательство. Установим неравенство

$$\mathcal{K}(P,\Lambda_\psi)=\|s^{1/n-1}\psi(s^{m/n});\, P'\|. \tag{7}$$

Действительно, пусть $u\in P$, $h=\mathcal{H}_m|u|$. Функция h совпадает со своей перестановкой h^*, поэтому ([3], с. 147)

$$\|h;\,\Lambda_\psi\|=\int_0^{a^{m/n}} h(t)\psi'(t)dt=\int_0^{a^{m/n}}\psi'(t)dt\int_{t^{m/n}}^{a} s^{1/n-1}|u(s)|ds=$$
$$=\int_0^a |u(s)|s^{1/n-1}ds\int_0^{s^{m/n}}\psi'(t)dt=\int_0^a\psi(s^{m/n}s^{1/n-1}|u(s)|ds.$$

Теперь (7) следует из неравенства $\mathcal{K}(P,\Lambda_\psi)=\sup\{\|\mathcal{H}_m|u|;\,\Lambda_\psi\|,\ \|u;\, P\|\le 1\}$.

Введем функцию $w(s)=\psi(s^{m/n})s^{-\beta m/n}$. Функция w непрерывна и убывает на $(0,a)$. Пусть $y\in \mathrm{M}_\alpha(0,a)$, $z\in P(0,a)$, $\|y;\,\mathrm{M}_\alpha\|=\|z,P\|=1$, y^* и z^* — перестановки функций y, z соответственно. Так как $\|y;\,\mathrm{M}_\alpha\|=1$, то ([3], с. 154) $s^{1-\alpha}y^*(s)\le 1$. Справедливы соотношения

$$\int_0^a w(s)y(s)z(s)ds\le\int_0^a w(s)y^*(s)z^*(s)ds\le\int_0^a w(s)s^{\alpha-1}z^*(s)ds=$$
$$=\int_0^a s^{1/n-1}\psi(s^{m/n})z^*(s)ds\le\mathcal{K}(P,\Lambda_\psi),$$

вытекающие из известных свойств перестановок ([3], с. 94; [6], с. 334–335). Ввиду произвола в выборе y, z получаем оценку $\|w;\,\Lambda_\alpha/P\|\le\mathcal{K}(P,\Lambda_\psi)$.

Фиксируем функцию f из $\overset{\circ}{W}P(\Omega)$ и положим $\delta_f(s)=\mathcal{D}_m(A_{f^*(s)}$ $(0\le s\le a)$, где $A_t=\{x\in\Omega:|f(x)|>t\}$, f^* — перестановка функции $|f|$. Если s не принадлежит интервалу постоянства функции f^*, то $\mathrm{mes}_n\, A_{f^*(s)}$. Поэтому для подобных s справедлива вытекающая из (1) оценка $\delta_f(s)\ge s^{m/n}$. Имеют место соотношения

$$\|f;\,V_m\Lambda_\psi\|\le\int_0^\infty\psi(\mathcal{D}_m(A_t))dt=\int_0^a\psi(\delta_f(s))\left|\frac{df^*}{ds}\right|ds\le\int_0^a w(s)\delta_f^\beta(s)\left|\frac{df^*}{ds}\right|ds\le$$
$$\le\|w;\,\Lambda_\alpha/P\|\left\|\delta_f^\beta\frac{df^*}{ds};\,(\Lambda_\alpha/P)'\right\|\le\varkappa(n,m,\alpha)\mathcal{K}(P,\Lambda_\psi)\|f;\,\overset{\circ}{W}P\|.$$

Здесь последовательно используются равенство (2), неравенство $\mathrm{mes}_m\,\Pi_\tau A_t\le\mathcal{D}_m(A_t)$ при $\tau\in T_n^m$, абсолютная непрерывность на каждом отрезке $[\varepsilon,a]$ функции f^* и замена переменных $t=f^*(s)$, неравенство $w(s)\left|\frac{df^*}{ds}\right|\ge\psi(\delta_f(s))\delta_f^{-\beta}(s)\left|\frac{df^*}{ds}\right|$, очевидное на промежутке постоянства функции f^* и вытекающее из оценки $\delta_f(s)\ge s^{m/n}$ для остальных значений s, неравенство Гёльдера для симметричных пространств и оценка (5). $\square$

3. Ниже $Q = Q(o, b)$ — максимальное симметричное пространство, $\mathfrak{N}$ — совокупность вогнутых и возрастающих на $[0, b]$ функций, для которых $\psi(+0) = 0$, $\left\|\frac{d\psi}{dt};\, Q'\right\| = 1$. Каждая функция ψ из $\mathfrak{N}$ порождает пространство Лоренца $\Lambda_\psi \supset Q$, причем ([3], с. 141)

$$\|v;\, Q\| = \sup\{\|v;\, \Lambda_\psi\|,\ \psi \in \mathfrak{N}\}.$$

Обозначим через $\mathfrak{N}_\beta$ часть $\mathfrak{N}$, состоящую из тех функций ψ, для которых функция $t^{-\beta}\psi(t)$ убывает на $(0, b]$. Классу $\mathfrak{N}_\beta$ сопоставим симметричное пространство $Q_\beta = Q_\beta(0, b)$ с нормой

$$\|v;\, Q_\beta\| = \sup\{v;\, \Lambda_\psi\|\ \psi \in \mathfrak{N}_\beta\}.$$

Поскольку $\mathfrak{N}_\beta \subset \mathfrak{N}$, то $Q \subset Q_\beta$ и $\|v;\, Q\| \geq \|v;\, Q_\beta\|$ $(v \in Q)$.

Теорема 2. *Пусть $P(\Omega) \subset \Lambda_\alpha(Q)$ и оператор $\mathcal{H}_m : P(0, a) \to Q(0, a^{m/n})$ непрерывен. Тогда пространство $\overset{\circ}{W}P(\Omega)$ непрерывно вложено в пространство $V_m Q_\beta(\Omega)$ и норма оператора вложения не превосходит $\varkappa(n, m, \alpha)\mathcal{K}(P, Q)$, где $\mathcal{K}(P, Q)$ — норма оператора $\mathcal{H}_m$.*

Доказательство. Если $\psi \in \mathfrak{N}_\beta$, то $\|\cdot;\, Q\| \geq \|\cdot;\, \Lambda_\psi\|$, поэтому $\mathcal{K}(P, \Lambda_\psi) \leq \mathcal{K}(P, Q)$. В силу (6) имеем

$$\|f;\, V_m\Lambda_\psi\| \leq \varkappa(n, m, \alpha)\mathcal{K}(P, Q)\|f;\, \overset{\circ}{W}P\|.$$

Переходя к супремуму по ψ из $\mathfrak{N}_\beta$, получим требуемый результат. □

Теорема 3. *Пусть выполнены условия предположения теоремы 2 и одно из условий:* 1) $m = n - 1$; 2) $m < n - 1$, *пространство Q совпадает с пространством Орлича L_Φ (Лоренца Λ_ψ, Марцинкевича M_ψ) и*

$$\varlimsup_{t\to 0} \frac{\varphi_Q(2t)}{\varphi_Q(t)} < 2^\beta. \tag{8}$$

Тогда $\overset{\circ}{W}P(\Omega)$ непрерывно вложено в пространство $V_m Q(\Omega)$.

Доказательство. Если $m = n - 1$, то $\alpha = \beta = 1$, $\mathfrak{N}_\beta = \mathfrak{N}$, $Q_\beta = Q$, условие $P(\Omega) \subset \Lambda_\alpha(\Omega) = L_1(\Omega)$ выполнено в силу конечности $a = \mathrm{mes}_n\,\Omega$. В рассматриваемом случае норма оператора вложения $\overset{\circ}{W}P(\Omega) \subset V_m Q(\Omega)$ не превосходит $n\mathcal{K}(P, Q)$.

При $m < n - 1$ доказательство основано на том, что для указанного класса пространств Q условие (8) обеспечивает оценку $\|\cdot;\, Q\| \leq K(\beta)\|\cdot;\, Q_\beta\|$ $(k(\beta) < \infty)$ и, следовательно, эквивалентность норм $\|\cdot;\, Q\|$, $\|\cdot;\, Q_\beta\|$ (см. [5], а также [3], с. 337). В этом случае норма оператора вложения $\overset{\circ}{W}P(\Omega) \subset V_m Q(\Omega)$ не превосходит $k(\beta)\varkappa(n, m, \alpha)\mathcal{K}(P, Q)$. □

В условиях теоремы 3 норма оператора вложения $\overset{\circ}{W}P(\Omega) \subset V_m Q(\Omega)$ оценивается сверху постоянной, пропорциональной норме оператора $\mathcal{H}_m : P(0, a) \to Q(0, a^{m/n})$. Приведем результат, означающий по существу неулучшаемость (в смысле порядка) данной оценки в классе выпуклых областей меры a.

Пусть $\|x\| = \max\limits_i |x_i|$ — кубическая норма элемента $x = (x_1, \ldots, x_n)$ из $\mathbb{R}^n$, $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n : 2\|x\| < \sqrt[n]{a}\}$ — открытый куб в $\mathbb{R}^n$. В рассматриваемом случае $\mathrm{mes}_n\,\Omega = a$, $\mathcal{D}_m(\Omega) = a^{m/n}$ $(m = 1, \ldots, n - 1)$.

Теорема 4. *Пусть $N(P, Q)$ есть норма оператора вложения пространства $\overset{\circ}{W}P(\Omega)$ в пространство $V_m Q(\Omega)$. Тогда оператор $\mathcal{H}_m : P(0, a) \to Q(0, a^{m/n})$ непрерывен, его норма $\mathcal{K}(P, Q) \leq 2nN(P, Q)$.*

Доказательство. Пусть $g : [0, a] \to \mathbb{R}$ — абсолютно непрерывная на каждом отрезке $[\varepsilon, a]$ $(0 < \varepsilon < a)$ убывающая функция, $g(a) = 0$, $u(s) = -\frac{dg}{ds}s^{1-1/n}$ $(0 < s \le a)$, $h(t) = g(t^{n/m})$ $(0 < t \le a^{m/n})$, $f(x) = g(2^n\|x\|^n)$ $(x \in \Omega)$. Справедливы соотношения

$$\nabla_1 f(x) = |g'(2^n\|x\|^n)|\, n\, 2^n\|x\|^{n-1}\nabla_1\|x\| \le 2nu(s), \qquad f(x) = h(t) = g(t^{n/m}),$$

в которых $x \in \Omega$, $s = 2^n\|x\|^n$, $t = 2^m\|x\|^m$. Без труда проверяются оценки

$$\|\nabla_1 f;\, P(\Omega)\| \le 2n\|u;\, P(0,a)\|, \qquad \|f;\, V_mQ(\Omega)\| \le \|h;\, Q(0, a^{m/n})\|,$$

поэтому

$$\|h;\, Q(0, a^{m/n})\| \le \|f; V_mQ(\Omega)\| \le N(P,)\|\nabla_1 f;\, P(\Omega)\| \le 2nN(P,Q)\|u;\, P(0,a)\|.$$

Поскольку $h = \mathcal{H}_m u$, то последнее неравенство влечет оценку $\|\mathcal{H}_m u;\, Q\| \le 2nN(P,Q)\|u;\, P\|$. Эта оценка справедлива для любой неотрицательной функции u из $P(0,a)$, поскольку каждая такая функция допускает представление $u(s) = -\frac{dg}{ds}s^{1-1/n}$, в котором g — убывающая абсолютно непрерывная на отрезках $[\varepsilon, a]$ $(0 < \varepsilon < a)$ функция, причем $g(a) = 0$. Доказываемый результат вытекает теперь из положительности линейного оператора $\mathcal{H}_m$. $\square$

Теоремы 3, 4 в соединении с критериями непрерывности оператора $\mathcal{H}_m$ в симметричных пространствах позволяют не только сформулировать достаточно обозримые критерии вложения, но и дать точные по порядку оценки норм операторов вложения. Полезно заметить, что $\mathcal{H}_m$ является линейным интегральным оператором с однородным ядром. Признаки непрерывности подобных операторов можно извлечь из результатов ([3], с. 187–195; [13]–[15]).

В случае $Q = \Lambda_\psi$ лемма 3 и соотношения (6), (7) приводят к эффективным оценкам нормы оператора вложения $\overset{\circ}{W}P(\Omega) \subset V_mQ(\Omega)$. Фундаментальная функция φ пространства Орлича L_Φ с нормой Люксембурга удовлетворяет соотношению $\varphi(t) = \Phi^{-1}\left(\frac{1}{t}\right) = 1$ ([3], с. 137; [16], с. 97). Отсюда легко следует, что при $Q = L_\Phi$ условие (8) выполнено, если функция $\Phi(t)t^{-p}$ возрастает на $[1, \infty]$ при некотором $p > \beta^{-1}$ ([9], с. 93). Из теоремы 3 вытекают, например, вложения

$$\overset{\circ}{W}M_{1-1/n}(\Omega) \subset V_mL_\Phi(\Omega), \qquad \overset{\circ}{W}L_n(\Omega) \subset V_mL_\Psi(\Omega),$$

где $\Phi(t) + 1 + |t| = \exp|t|$, $\Psi(t) + 1 = \exp|t|^{\frac{n}{n-1}}$.

Теорема 3 и ее доказательство остаются в силе для любого максимального симметричного пространства Q, удовлетворяющего (при $m < n-1$) условию (8) и предположению

$$\|\sigma_\lambda\|_Q \le C \sup_{0<t<a^{m/n}} \frac{\varphi_Q(\lambda t)}{\varphi_Q(t)},$$

где $0 < \lambda < 1$, $C < \infty$, $\|\sigma_\lambda\|_Q$ — норма оператора растяжения σ_λ ([3], сс. 131, 222) пространства $Q(0, a^{m/n})$. Автору неясно, распространяются ли теоремы 1–4 на предельный по отношению к условиям (3) случай $\alpha = \beta = (n-m)^{-1}m < n-1$.

При m, равном $n-1$ или n, лемма 2 и последующие результаты могут быть обобщены на классы функций, не удовлетворяющих нулевому граничному условию. Соответствующие утверждения верны для функций из $W_1^1(\Omega)$, обращающихся в нуль на достаточно массивном подмножестве $\overline{\Omega}$ ([12], гл. 4; [10]; [13]). В качестве характеристик массивности множеств можно использовать, например, емкости и внешние поперечные меры.

Литература

1. Хадвигер Г. *Лекции об объеме, площади поверхности и изопериметрии.* – М.: Наука, 1966. – 416 с.
2. Гальярдо Э. *Свойства некоторых классов функций многих переменных* // Математика (сб. переводов). – 1961. – Т.5. – № 4. – С.87–116.

3. Крейн С.Г., Петунин Ю.И., Семенов Е.М. *Интерполяция линейных операторов.* – М.: Наука, 1978. – 400 с.
4. Забрейко П.П. *Нелинейные интегральные операторы* // Тр. семин. по функц. анализу. – 1966. – вып. 8. – С.3–148.
5. Семенов Е.М. *Одна новая интерполяционная теорема* // Функц. анализ и его прилож. – 1968. – Т.2. – № 2. – С.68–80.
6. Харди Г.Г., Литтлвуд Д.Е., Полиа Г. *Неравенства.* – М.: Ин. лит., 1948. – 456 с.
7. Коляда В.И. *Перестановки функций и теоремы вложения* // УМН. – 1989. – Т.44. – № 5. – С.61–95.
8. Бесов О.В., Ильин В.П., Никольский С.М. *Интегральные представления функций и теоремы вложения.* – М.: Наука, 1975. – 460 с.
9. Брудный Ю.А., Крейн С.Г., Семенов Е.М. *Интерполяция линейных операторов.* – Итоги науки и техн. Матем. анализ. – 1986. - Т.24. – С.3-163.
10. Соболев С.Л. *Введение в теорию кубатурных формул.* – М.: Наука, 1974. – 808 с.
11. Солонников В.А., Уральцева Н.Н. *Пространства Соболева* // Избранные главы анализа и высшей алгебры. – Л.: Изд-во ЛГУ, 1981. – 199 с.
12. Мазья В.Г. *Пространства С.Л. Соболева.* – Л.: Изд-во ЛГУ, 1985. – 415 с.
13. Климов В.С. *К теоремам вложения анизотропных классов функций* // Матем. сб. – 1985. – Т.127. – № 2. – С.198–208.
14. Климов В.С. *Теоремы вложения для пространств Орлича и их приложения к краевым задачам* // Сиб. мат. журн. – 1979. – Т.13. – № 2. – С.334–348.
15. Рутицкий Я.Б. *Об операторах вложения с однородными ядрами* // Сиб. мат. журн. – 1980. – Т.21. – № 2. – С.153–160.
16. Красносельский М.А., Рутицкий Я.Б. *Выпуклые функции и пространства Орлича.*– М.: Физматгиз, 1958. – 271 с.

Орловский государственный
педагогический институт

Поступила
19.12.1994