ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2000 МАТЕМАТИКА № 11 (462)

Посвящается Анатолию Дмитриевичу Ляшко в связи с его семидесятилетием

УДК 519.63

А.В. ГУЛИН, А.В. ШЕРЕДИНА

ГРАНИЦЫ УСТОЙЧИВОСТИ РАЗНОСТНЫХ СХЕМ

1. *Введение.* Рассматриваются двуслойные и трехслойные операторно-разностные схемы

$$By_t + Ay = 0, \tag{1}$$

$$By_{\overset{\circ}{t}} + \tau^2 R y_{\bar{t}t} + Ay = 0, \tag{2}$$

где $y = y_n = y(t_n) \in H$ — функции дискретного аргумента $t_n = n\tau$ со значениями в конечномерном линейном пространстве H, $n = 0, 1, \dots$, $\tau > 0$, и A, B, R — линейные операторы, действующие в H. Здесь обозначено

$$y_t = \frac{y_{n+1} - y_n}{\tau}, \quad y_{\bar{t}} = \frac{y_n - y_{n-1}}{\tau}, \quad y_{\overset{\circ}{t}} = \frac{y_{n+1} - y_{n-1}}{2\tau}.$$

Теория устойчивости разностных схем (1), (2) изложена в [1], [2]. В [3]–[6] получены критерии устойчивости двуслойных и трехслойных разностных схем с операторными весовыми множителями, т. е. схем вида

$$y_t + \sigma A y_{n+1} + (E - \sigma) A y_n = 0, \tag{3}$$

$$y_{\bar{t}t} + \sigma A y_{n+1} + (E - 2\sigma) A y_n + \sigma A y_{n-1} = 0, \tag{4}$$

где σ — оператор в H, E — единичный оператор. Теория разностных схем с операторными множителями имеет свои особенности и достаточно подробно изложена в [6].

Условия устойчивости, полученные в [3]–[5], характеризуются тем, что их невозможно ослабить за счет выбора нормы. Приведем необходимые для дальнейшего теоремы из [3], [5]. Предполагается, что операторы A, B, R не зависят от номера слоя n. Устойчивость исследуется в нормах $\|y\|_D = \sqrt{(Dy, y)}$, порожденных самосопряженным положительным оператором $D : H \to H$. В дальнейшем под *устойчивостью в пространстве* H_D понимается невозрастание со временем $t = t_n$ нормы решения $\|y(t_n)\|_D$ разностной задачи.

Теорема 1. *Пусть* $A^* = A$, $\sigma^* = \sigma$. *Если схема* (3) *устойчива в каком-либо пространстве* H_D, *то выполнено операторное неравенство*

$$A + \tau A \mu A \ge 0, \tag{5}$$

где $\mu = \sigma - 0,5E$. *Обратно, если выполнено* (5), *то схема* (3) *устойчива в* H_{A^2}.

Теорема 2. *Пусть* $A^* = A$, $\sigma^* = \sigma$. *Если схема* (4) *устойчива в каком-либо пространстве* H_D, *то выполнено операторное неравенство*

$$A + \tau^2 A \mu A \ge 0,$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 99-01-00958).

где $\mu = \sigma - 0,25E$. Обратно, если $A + \tau^2 A\mu A > 0$, то схема (4) устойчива в норме

$$\|y_n\|_D = \left(\left\| \frac{y_n + y_{n-1}}{2} \right\|^2_{A^2} + \left\| \frac{y_n - y_{n-1}}{\tau} \right\|^2_{A+\tau^2 A\mu A} \right)^{1/2}.$$

2. *Границы устойчивости двумерных разностных схем.* Сформулированные выше теоремы дают возможность провести численное исследование устойчивсти конкретных разностных схем, аппроксимирующих задачи математической физики. Так, в [4] был получен критерий устойчивости двуслойных схем с переменными весовыми множителями для двумерного уравнения теплопроводности. Условия устойчивости формулировались в [4] в виде требования неотрицательности всех собственных значений так называемой матрицы устойчивости, т. е. некоторой симметричной матрицы, порожденной рассматриваемой разностной задачей. Неотрицательность собственных значений проверялась численно для каждых заданных отношений $\gamma_1 = \tau/h_1^2$ и $\gamma_2 = \tau/h_2^2$, где τ — шаг сетки по времени и h_1, h_2 — шаги сетки по пространственным переменным x_1 и x_2 соответственно.

Рассмотрим задачу о численном построении границ устойчивости разностных схем с переменными весовыми множителями для двумерного уравнения теплопроводности. В прямоугольной области $(0 < x_1 < l_1,\ 0 < x_2 < l_2)$ рассматривается многопараметрическое семейство разностных схем

$$\frac{y_{ij}^{n+1} - y_{ij}^n}{\tau} = \sigma_{ij} \Lambda y_{ij}^{n+1} + (1 - \sigma_{ij}) \Lambda y_{ij}^n, \tag{6}$$

$i = 1, 2, \ldots, N_1 - 1$, $j = 1, 2, \ldots, N_2 - 1$, $h_1 N_1 = l_1$, $h_2 N_2 = l_2$ с нулевыми граничными условиями. Здесь σ_{ij} — числовые множители и Λ — пятиточечный разностный оператор, $\Lambda = \Lambda_1 + \Lambda_2$, где

$$(\Lambda_1 y)_{ij}^n = \frac{1}{h_1} \left(a_{i+1j} \frac{y_{i+1j}^n - y_{ij}^n}{h_1} - a_{ij} \frac{y_{ij}^n - y_{i-1j}^n}{h_1} \right),$$
$$(\Lambda_2 y)_{ij}^n = \frac{1}{h_2} \left(b_{ij+1} \frac{y_{ij+1}^n - y_{ij}^n}{h_2} - b_{ij} \frac{y_{ij}^n - y_{ij-1}^n}{h_2} \right).$$

Предполагается, что $a_{ij} \geq c_1 > 0$, $b_{ij} \geq c_2 > 0$ для всех i, j. Уравнение (6) зависит от двух сеточных параметров, $\gamma_1 = \tau/h_1^2$ и $\gamma_2 = \tau/h_2^2$, определяющих наряду с $\sigma = \sigma_{ij}$ устойчивость или неустойчивость разностной схемы.

Пусть набор весовых множителей фиксирован. Всюду в дальнейшем предполагается, что весовые множители σ_{ij} не зависят от γ_1 и γ_2.Примем следующую терминологию. Разностную схему (6) назовем *устойчивой в точке* (γ_1, γ_2) плоскости $\gamma_1 O \gamma_2$, если при этих значениях γ_1 и γ_2 схема устойчива. В дальнейшем будем предполагать, что $\gamma_1 \geq 0$, $\gamma_2 \geq 0$, т. е. ограничимся рассмотрением первого квадранта плоскости $\gamma_1 O \gamma_2$. Назовем *областью устойчивости* разностной схемы (6) множество всех точек первого квадранта, в которых схема устойчива, и областью неустойчивости — все остальные точки первого квадранта. *Границей устойчивости* разностной схемы (6) называется кривая в квадранте $\gamma_1 \geq 0$, $\gamma_2 \geq 0$, разделяющая области устойчивости и неустойчивости. Схема называется абсолютно устойчивой, если она устойчива во всех точках (γ_1, γ_2) первого квадранта. Тем самым, для абсолютно устойчивой схемы границы устойчивости не существует. Для трехслойной разностной схемы

$$\frac{y_{ij}^{n+1} - 2y_{ij}^n + y_{ij}^{n-1}}{\tau^2} = \sigma_{ij} \Lambda y_{ij}^{n+1} + (1 - 2\sigma_{ij}) \Lambda y_{ij}^n + \sigma_{ij} \Lambda y_{ij}^{n-1} \tag{7}$$

понятие границы устойчивости вводится точно так же, как и для двуслойной, только в качестве сеточных параметров γ_1 и γ_2 выступают отношения $\gamma_1 = \tau^2/h_1^2$ и $\gamma_2 = \tau^2/h_2^2$.

3. *Численное построение границы устойчивости.* Будем рассматривать для определенности двуслойную схему (6). В работах [7], [8] были численно построены границы устойчивости разностных схем (6) с $a_{ij} \equiv 1$, $b_{ij} \equiv 1$ и с различными наборами весовых множителей. Для решения уравнения $F(\gamma_1, \gamma_2) = 0$, определяющего неявно границу устойчивости, применялся итерационный метод Стеффенсена. Существенным этапом вычислительного алгоритма явился предложенный Л.Ф. Юхно метод нахождения минимального собственного значения больших разреженных матриц.

Результаты, изложенные в данной работе, основаны на иной, более общей, как нам представляется, методике построения границы устойчивости, не предполагающей применения итерационных методов. В основе предлагаемого метода лежит переход от декартовых координат (γ_1, γ_2) к полярным (r, φ) и поиск точки границы устойчивости на лучах $\varphi = \text{const}$.

Схема (6) приводится к каноническому виду (1), где $A = -\Lambda$. Известно (см., напр., [1], с. 236), что матрица τA является симметричной и положительно определенной. Согласно теореме 1, схема (6) устойчива тогда и только тогда, когда неотрицательны все собственные значения *матрицы устойчивости* $P = (\tau A) + (\tau A)\mu(\tau A)$. Искомые параметры γ_1 и γ_2 входят только в матрицу τA и не содержатся в матрице μ. Матрица τA имеет вид

$$\tau A = \gamma_1 A_1 + \gamma_2 A_2, \tag{8}$$

где $\gamma_1 = \tau/h_1^2$, $\gamma_2 = \tau/h_2^2$, $A_1 = -h_1^2\Lambda_1$, $A_2 = -h_2^2\Lambda_2$. Вид этих матриц зависит от способа перенумерации двумерных массивов в одномерный. Пусть, например, $a_{ij} \equiv 1$, $b_{ij} \equiv 1$, $N_1 = 4$, $N_2 = 3$, и массив весовых множителей имеет вид

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{32} \\ \sigma_{11} & \sigma_{21} & \sigma_{31} \end{bmatrix}.$$

Тогда, если проводить перенумерацию по строкам, то матрицы A_1, A_2 и μ имеют вид

$$A_1 = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{array}\right], \quad A_2 = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & -1 \\ \hline -1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right],$$

$$\mu = \left[\begin{array}{ccc|ccc} \mu_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mu_{21} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu_{31} & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \mu_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu_{32} \end{array}\right],$$

где $\mu_{ij} = \sigma_{ij} - 0,5$. Важно отметить, что A_1 и A_2 не зависят от сеточных параметров γ_1, γ_2. Матрица μ является диагональной.

Полагая $\gamma_1 = r\cos\varphi$, $\gamma_2 = r\sin\varphi$, получим из (8), что $\tau A = rA_\varphi$, где

$$A_\varphi = A_1\cos\varphi + A_2\sin\varphi.$$

Таким образом, искомый параметр r входит в матрицу τA в виде числового множителя, а матрица A_φ не зависит от r. Заметим, что оператор A_φ отличается от τA только положительным множителем и, следовательно, является симметричной положительно определенной матрицей. Матрица устойчивости $P = (\tau A) + (\tau A)\mu(\tau A)$ представляется в виде $P = rP_\varphi$, где

$$P_\varphi = A_\varphi + rA_\varphi\mu A_\varphi. \tag{9}$$

Поиск границы устойчивости основан на следующих свойствах матрицы P_φ.

Утверждение 1. *Разностная схема (6) устойчива в точке $\gamma_1 = r\cos\varphi$, $\gamma_2 = r\sin\varphi$ тогда и только тогда, когда неотрицательны все собственные значения матрицы P_φ.*

Действительно, если $r = 0$, то $P = rP_\varphi = 0$ и согласно теореме 1 схема (6) устойчива. Если же $r > 0$, то неравенства $P \geq 0$ и $P_\varphi \geq 0$ эквивалентны.

Рассмотрим обобщенную задачу на собственные значения

$$A_\varphi \mu A_\varphi x = \lambda A_\varphi x \tag{10}$$

и покажем, что свойство знакоопределенности спектра задачи (10) не зависит от φ.

Утверждение 2. *Минимальное собственное значение $\lambda_{\min}$ задачи (10) неотрицательно тогда и только тогда, когда $\mu_{ij} \geq 0$ для всех i и j.*

Доказательство. Заметим, что спектр задачи (10) совпадает со спектром матрицы

$$M_\varphi = A_\varphi^{1/2} \mu A_\varphi^{1/2}. \tag{11}$$

Далее, неотрицательность минимального собственного значения матрицы M_φ эквивалентна выполнению матричного неравенства $M_\varphi \geq 0$, которое вследствие невырожденности матрицы $A_\varphi^{1/2}$ эквивалентно неравенству $\mu \geq 0$. Поскольку μ — диагональная матрица, неравенство $\mu \geq 0$ выполнено тогда и только тогда, когда $\mu_{ij} \geq 0$ для всех i и j. $\square$

Утверждение 3. *Если все $\sigma_{ij} \geq 0,5$, то схема (6) абсолютно устойчива.*

Доказательство. Пусть γ_1 и γ_2 — любые положительные числа. Определим угол $\varphi = \operatorname{arctg}(\gamma_2/\gamma_1)$ и для найденного φ рассмотрим матрицу M_φ, построенную согласно (11). Из утверждения 2 следует, что минимальное собственное значение $\lambda_{\min}(M_\varphi)$ матрицы M_φ неотрицательно. Но тогда для любого $r > 0$ все собственные значения матрицы $E + rM_\varphi$ больше или равны единице. Поэтому выполнено матричное неравенство $E + rM_\varphi \geq 0$, эквивалентное неравенству $A_\varphi + rA_\varphi \mu A_\varphi \geq 0$. Согласно утверждению 1 схема (6) устойчива в точке (γ_1, γ_2). $\square$

В следующем утверждении найдены координаты точки границы устойчивости, лежащей на луче $\gamma_2 = \gamma_1 \operatorname{tg} \varphi$.

Утверждение 4. *Пусть хотя бы один из весовых множителей $\sigma_{ij} < 0,5$. Тогда при любом φ минимальное собственное значение $\lambda_{\min}(\varphi)$ задачи (10) отрицательно. Точка с координатами $\gamma_1 = r\cos\varphi$, $\gamma_2 = r\sin\varphi$ принадлежит границе устойчивости разностной схемы (6) тогда и только тогда, когда $r = -1/\lambda_{\min}(\varphi)$.*

Доказательство. Отрицательность $\lambda_{\min}(\varphi)$ следует из утверждения 2. Число $1 + r\lambda_{\min}(\varphi)$ является минимальным собственным значением матрицы $E + rM_\varphi$. Поэтому, если $r < -(\lambda_{\min}(\varphi))^{-1}$, то все собственные значения матрицы $E + rM_\varphi$ положительны и, следовательно, схема (6) устойчива. Если же $r > -(\lambda_{\min}(\varphi))^{-1}$, то матрица $E + rM_\varphi$ имеет хотя бы одно отрицательное собственное значение и, следовательно, схема (6) неустойчива. Тем самым, при каждом $\varphi \in [0, \pi/2]$ точка $r = -(\lambda_{\min}(\varphi))^{-1}$ и только она принадлежит границе устойчивости разностной схемы (6). $\square$

Следствие. Если хотя бы один из весовых множителей $\sigma_{ij} < 0,5$, то существует граница устойчивости $r = r(\varphi)$, являющаяся однозначной функцией φ.

Таким образом, для определения границы устойчивости разностной схемы (6) в том случае, когда хотя бы один из весовых множителей меньше 0,5, достаточно при каждом $\varphi \in [0, \pi/2]$ найти минимальное собственное значение $\lambda_{\min} = \lambda_{\min}(\varphi)$ задачи (10) и положить

$$r = -1/\lambda_{\min}(\varphi), \quad \gamma_1 = r\cos\varphi, \quad \gamma_2 = r\sin\varphi.$$

При численном построении по переменной φ вводится сетка φ_k, и вычисления проводятся только в точках сетки. Заметим, что вычисления можно проводить независимо друг от друга на каждом луче φ_k.

В случае трехслойной разностной схемы (7) сформулированные выше утверждения претерпевают незначительные изменения. Надо только заменить условие $\sigma_{ij} \geq 0,5$ условием $\sigma_{ij} \geq 0,25$, а условие $\sigma_{ij} < 0,5$ — условием $\sigma_{ij} < 0,25$. Кроме того, в случае трехслойной схемы имеем $\gamma_1 = \tau^2/h_1^2$ и $\gamma_2 = \tau^2/h_2^2$. Вычислительный алгоритм построения границы устойчивости остается без изменения.

4. *Опорные точки. Базисная прямая.* Проведенные расчеты показали, что граница устойчивости, как правило, мало отличается от отрезка некоторой прямой, определяемой параметрами σ_{ij}. Эта прямая пересекается с границей устойчивости в точках $(\gamma_{10}, 0)$ и $(0, \gamma_{20})$. Такую прямую будем называть *базисной прямой*, а точки $(\gamma_{10}, 0)$ и $(0, \gamma_{20})$ — *опорными точками.*

Опорные точки можно было бы построить по описанной выше двумерной методике. Однако в данном случае алгоритм можно существенно упростить и свести к определению границ устойчивости одномерных задач. Рассмотрим, например, как находится точка $(\gamma_{10}, 0)$. В этом случае полярный угол $\varphi = 0$ и матрицы $A_\varphi = A_1$, $A_\varphi \mu A_\varphi$, входящие в основное уравнение (10), становятся блочно-диагональными. Например, в случае $a_{ij} \equiv 1$, $b_{ij} \equiv 1$, $N_1 = 4$, $N_2 = 3$ матрица $A_\varphi \mu A_\varphi = A_1 \mu A_1$ имеет вид $A_1 \mu A_1 = \mathrm{diag}[M_1, M_2]$, где

$$M_1 = \begin{bmatrix} 4\mu_{11} + \mu_{21} & -2(\mu_{11} + \mu_{21}) & \mu_{21} \\ -2(\mu_{11} + \mu_{21}) & \mu_{11} + 4\mu_{21} + \mu_{31} & -2(\mu_{21} + \mu_{31}) \\ \mu_{21} & -2(\mu_{21} + \mu_{31}) & \mu_{21} + 4\mu_{31} \end{bmatrix},$$

$$M_2 = \begin{bmatrix} 4\mu_{12} + \mu_{22} & -2(\mu_{12} + \mu_{22}) & \mu_{22} \\ -2(\mu_{12} + \mu_{22}) & \mu_{12} + 4\mu_{22} + \mu_{32} & -2(\mu_{22} + \mu_{32}) \\ \mu_{22} & -2(\mu_{22} + \mu_{32}) & \mu_{22} + 4\mu_{32} \end{bmatrix}.$$

В общем случае $A_1 \mu A_1 = \mathrm{diag}[M_1, M_2, \ldots, M_{N_2-1}]$, где M_j — симметричные матрицы порядка $N_1 - 1$. Поэтому спектр задачи (10) представляет собой объединение спектров $N_2 - 1$ матриц, имеющих порядок $N_1 - 1$. Соответственно в j-й диагональной клетке P_j матрицы устойчивости (9) присутствуют элементы только j-й строки

$$\sigma^{(j)} = (\sigma_{1j}, \sigma_{2j}, \ldots, \sigma_{N_1-1j})$$

матрицы σ. Тем самым, минимальное собственное значение матрицы P_j определяет границу устойчивости $\gamma_1(j)$ одномерной задачи с распределением весовых множителей $\sigma^{(j)}$, а граница устойчивости двумерной задачи определяется как

$$\gamma_{10} = \min_{1 \le j \le N_2 - 1} \gamma_1(j).$$

Тем самым, минимальное из всех чисел $\gamma_1(j)$ соответствует худшему из одномерных вариантов по строкам (понятия “худшего” и “оптимального” вариантов введены в [9]). Отсюда следует, что *опорная точка* $(\gamma_{10}, 0)$ *не зависит от перестановок строк матрицы* σ. Точно так же *опорная точка* $(0, \gamma_{20})$ *определяется худшим вариантом по столбцу матрицы* σ *и не зависит от перестановки столбцов.*

5. *Результаты расчетов.* Построение границ устойчивости проводилось для схем (6), (7) с $a_{ij} \equiv 1$, $b_{ij} \equiv 1$ и с различными наборами весовых множителей σ. Поскольку граница устойчивости мало отличается от отрезка базисной прямой, удобно характеризовать ее тремя величинами: координатами опорных точек γ_{10}, γ_{20}, и функцией $z(\varphi)$ — отклонением границы устойчивости от базисной прямой в зависимости от угла φ. Функция $z(\varphi)$ определяется как $z(\varphi) = r_A(\varphi) - r_B(\varphi)$, где $r_A(\varphi)$ и $r_B(\varphi)$ — полярные радиусы точки A границы устойчивости и точки B базисной прямой, отвечающих одному и тому же полярному углу φ. Различным распределениям $\sigma = (\sigma_{ij})$ соответствуют различные значения величин $(\gamma_{10}, \gamma_{20}, z(\varphi))$. В таблицах 1–5 приведены значения опорных точек γ_{10}, γ_{20} и максимального отклонения от базисной прямой $z = \max\limits_{0 \le k \le 10} z(\varphi(k))$ для различных распределений $\sigma = (\sigma_{ij})$. Здесь $\varphi(k) = kh$, $h = 0,05\pi$, $k = 0, 1, \ldots, 10$.

В таблице 1 показана зависимость границы устойчивости схемы (6) от изменения величины весового множителя в одной точке сетки при неизменных значениях весовых множителей в других точках. В проведенных расчетах $N_1 = 10$, $N_2 = 7$ и матрица σ имела элементы $\sigma_{ij} = 1$ для

$(i,j) \neq (3,2)$, $\sigma_{32} = t$, где параметр t менялся от 0 до 0,5. В таблице 1 приведены данные, отвечающие различным значениям t. Видно, что с увеличением t значения γ_{10} и γ_{20} резко возрастают, и граница все более удаляется от базисной прямой.

В таблице 2 приведены значения γ_{10}, γ_{20} и $z = \max\limits_{0 \le k \le 10} z(\varphi(k))$ для различных распределений $\sigma = (\sigma_{ij})$, состоящих из нулей и единиц. Здесь $N_1 = 5$, $N_2 = 4$. Заметим, что увеличение числа точек N_1 и N_2 не приводит к существенному изменению границы устойчивости. В таблице 3 представлены данные для распределения $\sigma = (\sigma_{ij})$, аналогичного распределению шестого столбца таблицы 2, но с числом точек, вдвое бóльшим по каждому направлению. В скобках указаны уточненные по сравнению с таблицей 2 значения для $N_1 = 5$, $N_2 = 4$. Видно, что значения γ_{10} и $z = \max\limits_{0 \le k \le 10} z(\varphi(k))$ почти не изменились.

В таблице 4 приведены значения опорных точек γ_{10}, γ_{20} и максимального отклонения от базисной прямой $z = \max\limits_{0 \le k \le 10} z(\varphi(k))$ для разностных схем, близких к абсолютно устойчивым схемам. Для таких схем искривление границ устойчивости становится более выраженным, а отклонение от базисной прямой является величиной $O(1)$.

Во всех вариантах, представленных выше, граница устойчивости была расположена по одну сторону от базисной прямой, что выражалось в сохранении знака функции $z(\varphi)$. Вариант, представленный в таблице 5, свидетельствует о том, что функция $z(\varphi)$ может менять знак. Значения функции $z(\varphi)$ в точках сетки приведены в таблице 6.

Приведем результаты расчетов границ устойчивости трехслойных разностных схем (7) с различным распределением весовых множителей σ. Известно, что явная схема ($\sigma_{ij} = 0$ для всех i и j) устойчива при условии $\gamma_1 a_1 + \gamma_2 a_2 < 1$, где $\gamma_1 = \tau^2/h_1^2$, $\gamma_2 = \tau^2/h_2^2$ и $a_1 = \cos^2 \frac{\pi}{2N_1}$, $a_2 = \cos^2 \frac{\pi}{2N_2}$. Граница устойчивости представляет собой прямую $\gamma_1 a_1 + \gamma_2 a_2 = 1$. Результаты расчетов представлены во второй строке таблицы 7. Сравнение с точным значением показывает, что максимальная погрешность в определении границы равна $1,7 \cdot 10^{-8}$. В третьей строке таблицы 7 представлены данные о границе устойчивости трехслойной схемы (7) с шахматным распределением весовых множителей 1 и 0,24. Такая схема близка к абсолютно устойчивой схеме (абсолютная устойчивость наступает при замене параметра 0,24 на 0,25). В четвертой строке таблицы 7 рассматривается то же самое распределение σ, однако здесь $N_1 = N_2$, что приводит к симметричности кривой $z(\varphi)$ относительно значения $\varphi = \pi/4$ (в частности, здесь $\gamma_{10} = \gamma_{20}$). В последних двух строках таблицы 7 матрицы σ отличаются перестановкой двух строк. Видно, что опорные точки при этом остаются неизменными, а сами границы несколько меняются. Максимальное различие в отклонении от базисной прямой составляет для этих вариантов примерно 0,02.

Таблица 1

t	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.45
γ_{10}	1.49	2.02	3.00	5.30	13.84	33.44
γ_{20}	1.45	1.93	2.79	4.70	11.14	24.96
z	−0.21	−0.33	−0.59	−1.25	−4.04	−10.64

Таблица 2

σ	1 0 0 0 1 0 0 0 1 0 0 0	1 1 0 0 1 1 0 0 1 0 0 0	1 1 0 0 1 1 0 0 1 1 0 0	1 1 1 0 1 1 1 0 1 1 0 0	1 1 1 0 1 1 1 0 1 1 1 0	1 1 1 1 1 1 1 0 1 1 1 0
γ_{10}	0.593	0.593	0.690	0.690	1.171	1.171
γ_{20}	0.586	0.586	0.586	0.586	0.586	0.689
z	−0.00142	0.03192	−0.00439	0.07176	−0.03114	−0.03817

Таблица 3

σ	γ_{10}	γ_{20}	z
1 1 1 1 1 1 1 1 0 1 1 1 1 1 1 1 1 0 1 1 1 1 1 1 1 1 0 1 1 1 1 1 1 1 1 0 1 1 1 1 1 1 1 1 0 1 1 1 1 1 1 1 1 0 1 1 1 1 1 1 1 1 0	1.1715729 (1.1714449)	0.5197831 (0.5857864)	-0.0308206 (-0.0311417)

Таблица 4

σ	γ_{10}	γ_{20}	z
1 1 1 1 1 0.45 1 1 1 1 1 1	22.1956	19.0499	-4.40151
1 1 1 1 1 0.49 1 1 1 1 1 1	118.09	99.01	-23.368

Таблица 5

σ	γ_{10}	γ_{20}	z
1 0 1 0 1 1 0 1 0 1 0 1 0 1 0 1 0 1 0 1	1.000	0.685	0.056

Таблица 6

k	1	2	3	4	5
$z(\varphi(k))$	$-7.9E-04$	$-2.2E-04$	$1.2E-003$	$3.4E-003$	$6.6E-003$

k	6	7	8	9
$z(\varphi(k))$	$1.2E-002$	$2.0E-002$	$3.5E-002$	$5.6E-002$

Таблица 7

σ	γ_{10}	γ_{20}	z
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0	1.10557	1.17157	$-3.33E-008$
0.24 1.00 0.24 1.00 1.00 0.24 1.00 0.24 0.24 1.00 0.24 1.00	55.2091	50.0000	-2.90177417
0.24 1.00 0.24 1.00 1.00 0.24 1.00 0.24 0.24 1.00 0.24 1.00 1.00 0.24 1.00 0.24	55.209068666	55.209068666	-4.08639082
0 1 1 1 1 1 1 1 1 0 1 1 1 1 1 1 1 1 0 1 1 1 1 1 1 1 1 0 1 1 1 1 1 1 1 1 0 1 1 1	2.666620894	2.663746419591	$-4.6221435354E-001$
0 1 1 1 1 1 1 1 1 0 1 1 1 1 1 1 1 1 0 1 1 1 1 1 1 1 1 1 0 1 1 1 1 1 1 0 1 1 1 1	2.666620894	2.663746419591	$-4.42714729620E-001$

Литература

1. Самарский А.А. *Теория разностных схем.* – 3-е изд. – М.: Наука, 1989. – 616 с.
2. Самарский А.А., Гулин А.В. *Устойчивость разностных схем.* – М.: Наука, 1973. – 415 с.
3. Гулин А.В., Самарский А.А. *Об устойчивости одного класса разностных схем* // Дифференц. уравнения. – 1993. – Т. 29. – № 7. – С. 1163–1174.
4. Гулин А.В., Дегтярев С.Л. *Критерий устойчивости двуслойных и трехслойных разностных схем* // Дифференц. уравнения. – 1996. – Т. 32. – № 7. – С. 1–8.
5. Самарский А.А., Гулин А.В., Вукославчевич В. *Критерии устойчивости двуслойных и трехслойных разностных схем* // Дифференц. уравнения. – 1998. – Т. 34. – № 7. – С. 975–979.
6. Самарский А.А., Вабищевич П.Н., Матус П.П. *Разностные схемы с операторными множителями.* – Минск: ЗАО "ЦОТЖ", 1998. – 442 с.
7. Гулин А.В., Юхно Л.Ф. *Численное исследование устойчивости двуслойных разностных схем для двумерного уравнения теплопроводности* // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. – 1996. – Т. 36. – № 8. – С. 118–126.
8. Гулин А.В., Юхно Л.Ф. *Границы устойчивости двумерных разностных схем* // Матем. моделир. – 1998. – Т. 10. – № 1. – С. 44–50.
9. Гулин А.В., Гулин В.А. *Границы устойчивости разностных схем с переменными весовыми множителями* // Изв. вузов. Математика. – 1994. – № 9. – С. 28–38.

Московский государственный университет

Поступила
24.02.2000