ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2000 МАТЕМАТИКА № 3 (454)

УДК 519.173

А.В. МОЛЧАНОВ

ПОЛУГРУППЫ ЭНДОМОРФИЗМОФ СЛАБЫХ p-ГИПЕРГРАФОВ

В работе излагаются результаты исследования взаимосвязи свойств гиперграфов с их полугруппами эндоморфизмов. Для таких полугрупп решается вопрос об условиях, при которых полугруппа преобразований E равна полугруппе эндоморфизмов $\operatorname{End} H$ некоторого гиперграфа H. Такая задача имеет прямое отношение к известной проблеме С. Улама об определении математической структуры по данному множеству эндоморфизмов (см., напр., [1], гл. 2, § 5) и не решена до сих пор ни для графов, ни для гиперграфов общего вида. Здесь эта задача исследуется для так называемых слабых p-гиперграфов.

Главным инструментом решения задачи конкретной характеризации полугрупп эндоморфизмов слабых p-гиперграфов являются канонические отношения полугрупп эндоморфизмов гиперграфов, которые определяются в исходных полугруппах формулами языка узкого исчисления предикатов.

Отметим, что полученные результаты приложимы к теории проективных и аффинных плоскостей (напр., [2]), т. к. эти математические объекты являются слабыми 2-гиперграфами.

Следуя [3], *гиперграфом* будем называть систему вида $H = (X, L)$, где X — непустое множество *вершин гиперграфа* и L — семейство произвольных подмножеств X, называемых *ребрами гиперграфа*. Вершины гиперграфа, содержащиеся в некотором его ребре, называются *смежными* и *несмежными* в противном случае.

Гиперграф H будем называть *слабым p-гиперграфом*, если он удовлетворяет следующим условиям:

(A_1) любая вершина гиперграфа содержится в некотором его ребре;
(A_2) в каждом ребре этого гиперграфа найдется по крайней мере $p+1$ вершина и, с другой стороны, любые p вершин этого гиперграфа содержатся в не более чем одном его ребре;
(A_3) в гиперграфе найдется $p+1$ несмежных вершины.

Если рассматривать плоскость (проективную или аффинную) как гиперграф, вершинами которого являются точки плоскости и ребрами — ее прямые, то из известных аксиом плоскости (напр., [2]) следует, что такой математический объект является слабым 2-гиперграфом.

Эндоморфизмом гиперграфа H называется преобразование φ множества его вершин X, которое смежные в гиперграфе H вершины переводит в смежные вершины этого гиперграфа, т. е. удовлетворяет условию $(\forall l \in L)(\exists l' \in L)(\varphi(l) \subset l')$. Множество всех эндоморфизмов гиперграфа H с операцией композиции образует полугруппу $\operatorname{End} H$.

Пусть X — произвольное непустое множество, p — натуральное число и E — полугруппа преобразований множества X. Тогда E определяет на X следующие *канонические отношения*: $\delta_p = \bigcup\{\varphi^{p+1} : \varphi \in E\}$, $R_p = \{(x_1, \dots, x_p, x_{p+1}) \in X^{p+1} : X^{p+1} \setminus \Delta \subset \overset{-1}{\delta}_p(x_1, \dots, x_p, x_{p+1})\}$, где $\Delta = \{(x_1, \dots, x_p, x_{p+1}) \in X^{p+1} : x_i = x_j$ для некоторых $1 \le i \ne j \le p+1\}$.

В следующей центральной теореме данной работы приводится конкретная характеристика полугрупп эндоморфизмов слабых p-гиперграфов.

Теорема 1. *Пусть E — произвольная полугруппа преобразований множества X и p — произвольное натуральное число. Полугруппа E равна полугруппе эндоморфизмов некоторого слабого p-гиперграфа с множеством вершин X в том и только том случае, если E содержит все эндоморфизмы своего канонического релятива $M_p = (X, R_p)$ и каноническое отношение R_p полугруппы E удовлетворяет следующим условиям:*

(T_1) $(x, \dots, x, x) \in R_p$ *для любого* $x \in X$;

(T_2) *для любых* $1 \le i_1, \dots, i_p, i_{p+1} \le p+1$

$$(x_1, \dots, x_p, x_{p+1}) \in R_p \Longrightarrow (x_{i_1}, \dots, x_{i_p}, x_{i_{p+1}}) \in R_p;$$

(T_3) *для любых попарно различных элементов* $x_1, \dots, x_p \in X$

$$(x, x_1, \dots, x_p), (x_p, \dots, x_1, y) \in R_p \Longrightarrow (x, x_1, \dots, x_{p-1}, y) \in R_p;$$

(T_4) $R_p \ne X^{p+1}$;

(T_5) *если* $(x_1, \dots, x_p, x_{p+1}) \in R_p$, *то найдется такое* $(p+1)$*-элементное множество вершин* $Y \subset X$, *что*

$$x_1, \dots, x_p, x_{p+1} \in Y, \quad |Y| = p+1 \quad \text{и} \quad Y^{p+1} \subset R_p,$$

причем в этом случае существует единственный слабый p-гиперграф H, для которого выполняется равенство $E = \operatorname{End} H$.

Этот результат позволяет доказать, что класс $\mathbf{H_{wp}}$ всех слабых p-гиперграфов следующим образом относительно элементарно определим в классе всех полугрупп $\mathbf{S}$ (напр., [5]).

Теорема 2. *Существуют такие формулы $C(x)$, $L(\overline{x})$, $\mathrm{Eqv}(\overline{x};\overline{y})$, $\mathrm{Ins}(x;\overline{y})$ сигнатуры языка элементарной теории полугрупп $\mathbf{L_S}$ (здесь и далее $\overline{x} = (x_1, \dots, x_p)$, $\overline{y} = (y_1, \dots, y_p)$), что любой слабый p-гиперграф $H = (X, L)$ и его полугруппа эндоморфизмов $E = \operatorname{End} H$ удовлетворяют следующим условиям:*

1) *множества* $\overline{X} = \{x \in E : C(x)\}$ *и* $\overline{L} = \{\overline{x} \in E^p : L(\overline{x})\}$ *не пусты*;
2) *формула* $\mathrm{Eqv}(\overline{x};\overline{y})$ *задает отношение эквивалентности* $\overline{\mathrm{Eqv}}$ *на множестве* $\overline{L}$;
3) *формула* $\mathrm{Ins}(x;\overline{y})$ *задает бинарное отношение* $\overline{\mathrm{Ins}}$ *между элементами множества* $\overline{X}$ *и фактор-множества* $\overline{L}/\overline{\mathrm{Eqv}}$;
4) *алгебраическая система* $\overline{H} = (\overline{X}, \overline{L}/\overline{\mathrm{Eqv}}, \overline{\mathrm{Ins}})$ *изоморфна гиперграфу* H;
5) *для любой формулы Ψ сигнатуры языка элементарной теории гиперграфов $\mathbf{L_H}$ эффективно строится такая формула $\overline{\Psi}$ сигнатуры языка элементарной теории полугрупп $\mathbf{L_S}$, что Ψ в том и только том случае истинна на гиперграфе H, если формула $\overline{\Psi}$ истинна на полугруппе эндоморфизмов $\operatorname{End} H$, т. е. выполняется условие*

$$H \vDash \Psi \iff \operatorname{End} H \vDash \overline{\Psi}.$$

Построенная в теореме 2 относительно элементарная интерпретация класса слабых p-гиперграфов в классе полугрупп и теорема 1 дают возможность доказать, что слабые p-гиперграфы полностью определяются своими эндоморфизмами в классе эффективных гиперграфов с p-определимыми ребрами (т. е. гиперграфов без изолированных вершин, ребра которых определяются любыми своими p вершинами).

Предложение 1. *Пусть $H = (X, L)$ — слабый p-гиперграф и $H_1 = (X_1, L_1)$ — произвольный эффективный гиперграф с p-определимыми ребрами. Тогда следующие условия эквивалентны:*

1) *гиперграфы H, H_1 совпадают*;
2) *гиперграфы H, H_1 имеют одинаковые частичные эндоморфизмы*;
3) *гиперграфы H, H_1 имеют одинаковые эндоморфизмы.*

Теорема 3. *Пусть H — слабый p-гиперграф и H_1 — произвольный эффективный гиперграф с p-определимыми ребрами. Тогда следующие условия эквивалентны:*

1) *гиперграфы H, H_1 изоморфны;*
2) *полугруппы частичных эндоморфизмов $\mathrm{PEnd}\, H$, $\mathrm{PEnd}\, H_1$ изоморфны;*
3) *полугруппы эндоморфизмов $\mathrm{End}\, H$, $\mathrm{End}\, H_1$ изоморфны.*

Заметим, что эта теорема обобщает на слабые p-гиперграфы следующий результат В. Лендера [6], [7] и В. Молчанова [8] о проективных плоскостях, который дает решение известной задачи 1.20 из сборника [9], поставленной Л.М. Глускиным и Л.А. Скорняковым.

Следствие (см. также [6]–[8]). Для произвольных плоскостей Π, Π_1 (аффинных или проективных) следующие условия эквивалентны:

1) плоскости Π, Π_1 изоморфны;
2) полугруппы частичных эндоморфизмов $\mathrm{PEnd}\,\Pi$, $\mathrm{PEnd}\,\Pi_1$ изоморфны;
3) полугруппы эндоморфизмов $\mathrm{End}\,\Pi$, $\mathrm{End}\,\Pi_1$ изоморфны.

Предложение 2. *Если полугруппы эндоморфизмов $\mathrm{End}\, H$, $\mathrm{End}\, H_1$ слабых p-гиперграфов H, H_1 элементарно эквивалентны, то гиперграфы H, H_1 также элементарно эквивалентны.*

С помощью теоремы 1 найдены формулы $C(x)$, $RC(x_1, \dots, x_{p+1})$, Φ_j, Θ_i $(j = 1, 2;\ 1 \le i \le 5)$ сигнатуры языка элементарной теории полугрупп $\mathbf{L_S}$, которые позволяют получить следующую абстрактную характеризацию полугрупп эндоморфизмов слабых p-гиперграфов.

Теорема 4. *Полугруппа S в том и только том случае изоморфна полугруппе эндоморфизмов некоторого слабого p-гиперграфа, если на полугруппе S истинны аксиомы Φ_j, Θ_i $(j = 1, 2;$ $1 \le i \le 5)$ и для любого преобразования ψ множества $\overline{C} = \{x \in S : C(x)\}$, удовлетворяющего условию $(\forall x_1, \dots, x_{p+1})(RC(x_1, \dots, x_{p+1}) \implies RC(\psi(x_1), \dots, \psi(x_{p+1})))$, найдется такой элемент $s \in S$, что $\psi(x) = sx$ для любого $x \in \overline{C}$.*

Пусть $\mathbf{E}$ — класс всех полугрупп эндоморфизмов эффективных гиперграфов с p-определимыми ребрами. Для класса таких гиперграфов $\mathbf{K}$ символом $\mathrm{End}\,\mathbf{K}$ обозначается класс полугрупп вида $\mathrm{End}\, H$ для гиперграфов $H \in \mathbf{K}$. Класс гиперграфов $\mathbf{K}$ называется (конечно) E-аксиоматизируемым, если класс $\mathrm{End}\,\mathbf{K}$ относительно (конечно) аксиоматизируем [10] в классе $\mathbf{E}$, т. е. выполняется равенство $\mathrm{End}\,\mathbf{K} = \mathbf{E} \cap \mathbf{S}'$ для некоторого (конечно) аксиоматизируемого класса полугрупп $\mathbf{S}'$. С помощью построенной в теореме 2 относительно элементарной интерпретации класса слабых p-гиперграфов в классе полугрупп исследован вопрос о E-аксиоматизируемости некоторых классов гиперграфов.

Предложение 3. *Любой (конечно) аксиоматизируемый класс слабых p-гиперграфов (конечно) E-аксиоматизируем.*

Построенная в теореме 2 относительно элементарная интерпретация класса слабых p-гиперграфов в классе полугрупп дает возможность проанализировать взаимосвязь важных проблем алгоритмической разрешимости элементарных теорий классов гиперграфов и элементарных теорий классов полугрупп. При изложении этого материала используется терминология работ [5], [11].

Теорема 5. *Для любого класса слабых p-гиперграфов $\mathbf{K}$ справедливы следующие утверждения:*

(i) *если элементарная теория класса $\mathbf{K}$ наследственно неразрешима, то и элементарная теория класса полугрупп $\mathrm{End}\,\mathbf{K}$ наследственно неразрешима;*
(ii) *если элементарная теория класса $\mathbf{K}$ эффективно неотделима, то и элементарная теория класса полугрупп $\mathrm{End}\,\mathbf{K}$ эффективно неотделима.*

Литература

1. Улам С. Нерешенные математические задачи. – М.: Наука, 1964. – 168 с.
2. Хартсхорн Р. Основы проективной геометрии. – М.: Мир, 1970. – 160 с.
3. Berge C. Graphs et hypergraphs. – Paris, 1970. – 279 p.
4. Клиффорд А., Престон Г. Алгебраическая теория полугрупп. Т. 1. – М.: Мир, 1972. – 287 с.
5. Ершов Ю.Л.. Проблемы разрешимости и конструктивные модели. – М.: Наука, 1980. – 416 с.
6. Лендер В.Б. Об эндоморфизмах проективных геометрий // XVI Всесоюзн. алгебраич. конф.: Тез. докл. – Л., 1981. – Ч. 2. – С. 82.
7. Лендер В.Б. Об эндоморфизмах проективных геометрий // Исследов. по алгебр. системам. – Свердловск, 1984. – С. 48–50.
8. Молчанов В.А. Как проективные плоскости определяются своими полугруппами // Теория полугрупп и ее прилож. – Саратов, Изд-во Саратовск. гос. ун-та. – 1984. –С. 42–50.
9. Свердловская тетрадь: Сб. нерешенных задач по теории полугрупп. – Свердловск: Изд-во Уральск. гос. ун–та, 1979. – 41 с.
10. Мальцев А.И. Некоторые вопросы теории классов моделей // Тр. IV Всесоюзн. матем. съезда. – Т. 1. – 1963. – С. 169–198.
11. Ершов Ю.Л., Лавров И.А., Тайманов А.Д., Тайцлин М.А. Элементарные теории // УМН. – 1965. – Т. 20. – № 4. – С. 37–108.

Саратовский государственный
педагогический институт

Поступила
11.11.1997