ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1997 МАТЕМАТИКА № 6 (421)

УДК 517.911

Ю.Т. СИЛЬЧЕНКО

ОПЕРАТОР ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ С НЕРЕГУЛЯРНЫМИ ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ

1. Рассмотрим дифференциальное выражение $lu = (-1)^m u^{(2m)}(x)$, $x \in [0,1]$, и систему граничных условий

$$L_\nu u = d_\nu u^{(k_\nu)}(0) + \beta_\nu u^{(k_\nu)}(1) + T_\nu u = 0, \tag{1}$$

где α_ν, β_ν — комплексные числа, $|\alpha_\nu| + |\beta_\nu| \neq 0$, $0 \le k_1 \le \cdots \le k_\nu \le k_{\nu+1} \le \cdots \le 2m-1$, T_ν — линейные ограниченные функционалы в $W_p^{k_\nu - 1}(0,1)$ при некотором $p \in [1,\infty)$, $\nu = 1,2,\ldots,2m$.

Обозначим через $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{2m}$ все корни степени $2m$ из 1. Граничные условия (1) называются регулярными [1], [2], если определитель

$$\begin{vmatrix} \alpha_1\omega_1^{k_1}\ldots\alpha_1\omega_m^{k_1} & \beta_1\omega_{m+1}^{k_1}\ldots\beta_1\omega_{2m}^{k_1} \\ \ldots & \ldots \\ \alpha_{2m}\omega_1^{k_{2m}}\ldots\alpha_{2m}\omega_m^{k_{2m}} & \beta_{2m}\omega_{m+1}^{k_{2m}}\ldots\beta_{2m}\omega_{2m}^{k_{2m}} \end{vmatrix} \neq 0. \tag{2}$$

Введем в пространстве $L_p = L_p(0,1)$ оператор $Lu = lu$ с областью определения $D(L)$, состоящей из функций класса $W_p^{2m}(0,1)$, удовлетворяющих граничным условиям (1). Тогда [1], [2] у оператора L при $|\lambda| \ge R_\varepsilon > 0$, $|\arg\lambda| < \pi - \varepsilon$ существует резольвента $(L+\lambda I)^{-1}$, для которой выполнена оценка $\|(L+\lambda I)^{-1}\| \le C|\lambda|^{-1}$ при некотором $\varepsilon > 0$ ($\varepsilon < \pi$). Если же условия (1) не являются регулярными, то резольвента может не иметь максимального порядка убывания и даже может расти при $|\lambda| \to \infty$. Так, если $lu = -u''(x)$, $L_1 u = u(0)$, $L_2 u = \int_0^1 u(x)dx$, то $\|(L+\lambda I)^{-1}\| \le C|\lambda|^{-\frac12 - \frac{1}{2p}}$. Если же $L_1 u = u(0)$, $L_2 u = u'(0)$, то $\|(L+\lambda I)^{-1}\| = C|\lambda^{-1}e^{\sqrt{\lambda}}|$.

В данной статье выделены некоторые классы нерегулярных граничных условий, для которых норма резольвенты убывает.

2. Рассмотрим граничные условия (1) при $\nu = 1,2,\ldots,2m-r$ ($0 \le r \le 2m$), а оставшиеся r условий зададим формулами

$$L_\nu u = T_\nu u = 0 \quad (\nu = 2m-r+1,\ldots,2m), \tag{3}$$

где $T_{2m-r+k}u = \int_0^1 \varphi_k(x)u(x)dx$ ($k = 1,2\ldots,r$), а $\{\varphi_k(x)\}$ — заданная система непрерывных и линейно независимых функций на $[0,1]$. Будем предполагать, что для этих функций выполнены равенства

$$\begin{aligned} &\int_0^1 \varphi_k(x)\exp(\rho\omega_j x)dx = C_{kj}\rho^{-n_k} + a_{kj}(\rho)\rho^{-n_k} \quad (j = 1,2,\ldots,m), \\ &\int_0^1 \varphi_k(x)\exp[\rho\omega_j(x-1)]dx = C_{kj}\rho^{-n_k} + a_{kj}(\rho)\rho^{-n_k} \quad (j = m+1,\ldots,2m); \end{aligned} \tag{4}$$

$$
\begin{aligned}
&\int_0^y \varphi_k(x)\exp[\rho\omega_j(x-y)]dx = \frac{\varphi_k(y)}{\rho\omega_j} + a_{kj}(y,\rho)\rho^{-1} \quad (j=m+1,\dots,2m),\\
&\int_y^1 \varphi_k(x)\exp[\rho\omega_j(x-y)]dx = -\frac{\varphi_k(y)}{\rho\omega_j} + a_{kj}(y,\rho)\rho^{-1} \quad (j=1,2,\dots,m).
\end{aligned}
\tag{5}
$$

Здесь C_{kj} — постоянные, не равные нулю числа, $n_k \in \mathbb{N}$, $\rho \in S_\varepsilon = \{\frac{\pi}{2}+\varepsilon < \arg\rho < \frac{\pi}{m}+\frac{\pi}{2}-\varepsilon\}$ при некотором малом ε, корни из единицы ω_j занумерованы в порядке возрастания аргумента: $\omega_1 = 1$, $\omega_2 = \exp(i\frac{\pi}{m}), \dots, \omega_{2m} = \exp(i\pi\frac{2m-1}{m})$, и, наконец, непрерывные функции $a_{kj}(\rho)$ и $a_{kj}(y,\rho)$ стремятся к нулю при $|\rho| \to \infty$. Эти условия выполнены, например, для гладких функций $\varphi_k(x)$.

Теперь, вместо определителя (2) будем рассматривать более общий определитель

$$
\theta = \begin{vmatrix}
\alpha_1\omega_1^{k_1}\dots\alpha_1\omega_m^{k_1} & \beta_1\omega_{m+1}^{k_1}\dots\beta_1\omega_{2m}^{k_1}\\
\dots & \dots\\
\alpha_{2m-r}\omega_1^{k_{2m-r}}\dots\alpha_{2m-r}\omega_m^{k_{2m-r}} & \beta_{2m-r}\omega_{m+1}^{k_{2m-r}}\dots\beta_{2m-r}\omega_{2m}^{k_{2m-r}}\\
C_{11}\dots C_{1m} & C_{1\,m+1}\dots C_{1\,2m}\\
\dots & \dots\\
C_{r1}\dots C_{rm} & C_{r\,m+1}\dots C_{r\,2m}
\end{vmatrix}.
$$

Основной результат составляет

Теорема. *Пусть $\theta \neq 0$. Тогда у оператора L в области $|\arg\lambda| < \pi-\varepsilon$, $|\lambda| \geq R_\varepsilon > 0$ при некотором $\varepsilon > 0$ существует резольвента $(L+\lambda I)^{-1}$, для нормы которой выполнена точная оценка*

$$
\|(L+\lambda I)^{-1}\| \leq C|\lambda|^{-1-\frac{1}{2mp}-\frac{n}{2m}},
$$

где $n = \max\{n_1, n_2, \dots, n_r\}$.

Доказательство. Рассмотрим резольвентное уравнение $Lu - \lambda u = f(x)$. Положим $\lambda = (-1)^m\rho^{2m}$ и перейдем к эквивалентной краевой задаче

$$
u^{(2m)} - \rho^{2m}u = f_1(x), \quad L_\nu u = 0 \quad (\nu = 1,2,\dots,2m),
$$

где $f_1(x) = (-1)^{2m}f(x)$. Решение этой задачи ищем в виде $u = u_1 + u_2$, где

$$
u_1(x) = \frac{1}{2m\rho^{2m-1}}\Bigl(\sum_{j=1}^{m}\int_0^x \omega_j\exp[\rho\omega_j(x-s)]f_1(s)ds - \sum_{j=m+1}^{2m}\int_x^1 \omega_j\exp[\rho\omega_j(x-s)]f_1(s)ds\Bigr),
$$

$$
u_2(x) = \sum_{j=1}^{m} C_j\exp(\rho\omega_j x) + \sum_{j=m+1}^{2m} C_j\exp[\rho\omega_j(x-1)].
$$

Константы C_j подбираем так, чтобы удовлетворить условиям $L_\nu u_2 = -L_\nu u_1$. Эти константы определяются из системы линейных алгебраических уравнений

$$
\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{m} C_j[\alpha_\nu(\rho\omega_j)^{k_\nu} + \beta_\nu(\rho\omega_j)^{k_\nu}\exp(\rho\omega_j) + T_\nu(\exp(\rho\omega_j x))] + \sum_{j=m+1}^{2m} C_j[\alpha_\nu(\rho\omega_j)^{k_\nu}\exp(-\rho\omega_j) +\\
&\qquad + \beta_\nu(\rho\omega_j)^{k_\nu} + T_\nu(\exp\{\rho\omega_j(x-1)\})] = -L_\nu u_1 \quad (\nu = 1,2,\dots,2m-r),\\
&\sum_{j=1}^{m} C_j T_\nu(\exp(\rho\omega_j x)) + \sum_{j=m+1}^{2m} C_j T_\nu(\exp\{\rho\omega_j(x-1)\}) = -L_\nu u_1 \quad (\nu = 2m-r+1,\dots,2m).
\end{aligned}
\tag{6}
$$

Пусть $\rho \in S_\varepsilon$, тогда выполнены [1] неравенства $\operatorname{Re}\rho\omega_j \geq \delta_\varepsilon|\rho|$ $(j = m+1,\dots,2m)$, $\operatorname{Re}\rho\omega_j \leq \delta_\varepsilon|\rho|$ $(j = 1,2,\dots,m)$, где $\delta_\varepsilon = \sin\varepsilon$. Эти неравенства будем использовать для выделения главной части (при $\rho \to \infty$) определителя $\Delta(\rho)$ системы (6).

Для $\nu=1,2,\ldots,2m-r$ функционалы T_ν являются непрерывными в $W_p^{k_\nu-1}(0,1)$, поэтому

$$|T_\nu(\exp(\rho\omega_j x))|\le C\|\exp(\rho\omega_j x)\|_{W_p^{k_\nu-1}}\le C\sum_{i=0}^{k_\nu-1}|\rho\omega_j|^i\left(\int_0^1\exp(px\operatorname{Re}\rho\omega_j)dx\right)^{\frac1p}\le C|\rho|^{k_\nu-1-\frac1p}.$$

Аналогично, $|T_\nu(\exp\{\rho\omega_j(x-1)\})|\le C|\rho|^{k_\nu-1-\frac1p}$. Теперь в определителе системы (6) выражения

$$\begin{aligned}
&(\rho\omega_j)^{k_\nu}\exp(\rho\omega_j),\quad T_\nu(\exp(\rho\omega_j x))\quad (j=1,2,\ldots,m),\\
&(\rho\omega_j)^{k_\nu}\exp(-\rho\omega_j),\quad T_\nu(\exp\{\rho\omega_j(x-1)\})\quad (j=m+1,\ldots,2m),\quad (\nu=1,2,\ldots,2m-r),\\
&a_{\nu_j}(\rho)\rho^{-n_k}\quad (j=1,2,\ldots,2m;\ k=1,2,\ldots,r)
\end{aligned}$$

имеют более высокий порядок малости, чем остальные (для $\nu=2m-r+1,\ldots,2m$ использовали формулы (4)), поэтому $\Delta(\rho)=[\theta+R(\rho)]\rho^{(k_1+k_2+\cdots+k_{2m-r})-(n_1+n_2+\cdots+n_r)}$, где $R(\rho)\to0$ при $\rho\to\infty$.

Присоединенные определители $\Delta_i(\rho)$ имеют такую же структуру, как и $\Delta(\rho)$. Разложение присоединенного определителя по i-му столбцу имеет вид

$$\Delta_i(\rho)=\sum_{l=1}^{2m}(-1)^{i+l-1}L_lu_1(\theta_{il}+R_{il}(\rho))\rho^{(k_1+k_2+\cdots+k_{2m})-k_l},$$

где θ_{il} — постоянные числа, $R_{il}(\rho)\to0$ при $\rho\to0$ и $k_l=-n_{l-2m+r}$ для $l=2m-r+1,\ldots,2m$. Теперь $C_i=\frac{\Delta_i(\rho)}{\Delta(\rho)}$ и

$$\begin{aligned}
u_2(x)=\sum_{j=1}^{m}\sum_{l=1}^{2m}(-1)^{j+l-1}\frac{\theta_{jl}+R_{jl}(\rho)}{\theta+R(\rho)}\rho^{-k_l}\exp(\rho\omega_j x)L_lu_1+\\
+\sum_{j=m+1}^{2m}\sum_{l=1}^{2m}(-1)^{j+l-1}\frac{\theta_{jl}+R_{jl}(\rho)}{\theta+R(\rho)}\rho^{-k_l}\exp(\rho\omega_j(x-1))L_lu_1.
\end{aligned}\tag{7}$$

Проведем оценки функций $u_1(x)$ и $u_2(x)$. Для функции $u_1(x)$ и ее производных с использованием неравенств Гёльдера и Минковского имеем

$$|u_1^{(k)}(x)|\le C|\rho|^{k-2m+\frac1p}\|f\|_{L_p},\quad \|u_1^{(k)}\|_{L_p}\le C|\rho|^{k-2m}\|f\|_{L_p}\quad (k=0,1,\ldots,2m-1).$$

Поэтому

$$\begin{aligned}
|L_\nu u_1|\le C(\sup|u_1^{(k_\nu)}(x)|+|T_\nu u_1|)\le C(\sup|u_1^{(k_\nu)}(x)|+\|u_1\|_{W_p^{k+\nu-1}}\le\\
\le C\|u^{(k_\nu)}\|_C\le C|\rho|^{-2m+k_\nu+\frac1p}\|f\|_{L_p},\quad \nu=1,2,\ldots,2m-r.
\end{aligned}$$

Для $\nu=2m-r+1,\ldots,2m$ из формул (5) следуют равенства

$$\begin{aligned}
L_\nu u_1=\int_0^1\varphi_{\nu-2m+r}(x)u_1(x)dx=\frac{1}{2m\rho^{2m-1}}\int_0^1\varphi_{\nu-2m+r}(x)\Bigg[\sum_{j=1}^{m}\int_0^x\omega_j\exp\{\rho\omega_j(x-s)\}f_1(s)ds-\\
-\sum_{j=m+1}^{2m}\int_x^1\omega_j\exp\{\rho\omega_j(x-s)\}f_1(s)ds\Bigg]dx=\\
=-\rho^{-2m}\int_0^1\varphi_{\nu-2m+r}(s)f_1(s)ds-\frac{1}{2m\rho^{2m}}\sum_{j=1}^{2m}\int_0^1a_{\nu j}(s,\rho)f_1(s)ds.
\end{aligned}$$

Обозначая последнюю сумму (без множителя ρ^{-2m}) через $b_\nu(\rho)$, получим равенство

$$L_\nu u_1=-\rho^{-2m}\int_0^1\varphi_{\nu-2m+r}(s)f_1(s)ds+\rho^{-2m}b_\nu(\rho),\tag{8}$$

где $b_\nu(\rho)\to0$ при $\rho\to\infty$. Поэтому функционал $L_\nu u_1$ ведет себя как $|\rho|^{-2m}$.

Перейдем к оценке функции $u_2(x)$, пользуясь формулой (7) и оценками для $|L_\nu u_1|$. Оценим сначала слагаемые вида

$$\psi_{\nu j}(x) = \rho^{-k_\nu} \exp(\rho\omega_j x) L_\nu u_1 \quad (j = 1, 2, \ldots, 2m),$$
$$\psi_{\nu j}(x) = \rho^{-k_\nu} \exp\{\rho\omega_j(1-x)\} L_\nu u_1 \quad (j = m+1, \ldots, 2m)$$

при $\nu = 1, 2, \ldots, 2m-r$. Используя неравенство Гёльдера, в обоих случаях получим оценку

$$\|\psi_{\nu j}\|_{L_p} \le C|\rho|^{-2m}\|f\|_{L_p} \quad (\nu = 1, 2, \ldots, 2m-r).$$

Для $\nu = 2m-r+1, \ldots, 2m$ из формулы (8) следуют равенства

$$\psi_{\nu j} = \left[b_\nu(\rho) - \int_0^1 \varphi_{\nu-2m+r}(s) f_1(s)ds\right] \rho^{-2m-k_\nu} \exp(\rho\omega_j x) \quad (j = 1, 2, \ldots, m),$$
$$\psi_{\nu j} = \left[b_\nu(\rho) - \int_0^1 \varphi_{\nu-2m+r}(s) f_1(s)ds\right] \rho^{-2m-k_\nu} \exp\{\rho\omega_j(1-x)\} \quad (j = m+1, \ldots, 2m).$$

Нормы этих функций в обоих случаях вычисляются и

$$\|\psi_{\nu j}\|_{L_p} = C|\rho|^{-2m-k_\nu-\frac{1}{p}} \left|\int_0^1 \varphi_{\nu-2m+r}(s) f(s)ds\right| + \rho^{-2m-k_\nu-\frac{1}{p}} C_\nu(\rho).$$

Положим $n = \max\limits_{2m-r+1 \le \nu \le 2m} n_{\nu-2m+r} = -\max\limits_{2m-r+1 \le \nu \le 2m} k_\nu$. Пусть этот максимум достигается при $\nu = l$. Тогда

$$\|u_2\|_{L_p} = C|\rho|^{-2m+n-\frac{1}{p}} \left|\int_0^1 \varphi_{l-2m+r}(s) f(s)ds\right| + C(\rho)|\rho|^{-2m+n-\frac{1}{p}} \|f\|_{L_p} \quad (C(\rho) \to 0,\ \rho \to \infty).$$

Так как $\|u_1\|_{L_p} \le C|\rho|^{2m}\|f\|_{L_p}$, то отсюда следует утверждение теоремы при замене λ на $-\lambda$. $\square$

Следствие. Если правая часть $f(x)$ принадлежит подпространству, выделяемому условиями (3), то $\|u\|_{L_p} \le C|\rho|^{-2m}\|f\|_{L_p}$

3. Приведем пример системы функций, для которой $\theta \ne 0$. Пусть $\varphi_1(x) = 1$, $\varphi_2(x) = x(1-x), \ldots, \varphi_r(x) = x^{r-1}(1-x)^{r-1}$. Для этих функций

$$\int_0^1 \varphi_k(x) \exp(\rho\omega_j x)dx = \frac{(-1)^k(k-1)!}{(\rho\omega_j)^k} + \frac{R(\rho)}{(\rho\omega_j)^k} \quad (j = 1, 2, \ldots, m),$$
$$\int_0^1 \varphi_k(x) \exp\{\rho\omega_j(x-1)\}dx = \frac{(k-1)!}{(\rho\omega_j)^k} + \frac{R(\rho)}{(\rho\omega_j)^k} \quad (j = m+1, \ldots, 2m),$$

где $R(\rho) \to 0$ при $\rho \to \infty$. Поэтому определитель θ имеет вид

$$\theta = \begin{vmatrix} \alpha_1\omega_1^{k_1} \ldots \alpha_1\omega_m^{k_1} & \beta_1\omega_{m+1}^{k_1} \ldots \beta_1\omega_{2m}^{k_1} \\ \ldots & \ldots \\ \alpha_{2m-r}\omega_1^{k_{2m-r}} \ldots \alpha_{2m-r}\omega_m^{k_{2m-r}} & \beta_{2m-r}\omega_{m+1}^{k_{2m-r}} \ldots \beta_{2m-r}\omega_{2m}^{k_{2m-r}} \\ -\omega_1^{-1} \cdots - \omega_m^{-1} & \omega_{m+1}^{-1} \ldots \omega_{2m}^{-1} \\ \omega_1^{-2} \ldots \omega_m^{-2} & \omega_{m+1}^{-2} \ldots \omega_{2m}^{-2} \\ \ldots & \ldots \\ (-1)^r\omega_1^{-r} \ldots (-1)^r\omega_m^{-r} & \omega_{m+1}^{-r} \ldots \omega_{2m}^{-r} \end{vmatrix}.$$

Этот определитель является обобщенным определителем Вандермонда [3], поэтому он отличен от нуля. Отметим также, что система функций подобного вида возникает при построении оператора BA^{-1}, где A и B — обыкновенные дифференциальные операторы [4].

Литература

1. Якубов С.Я. *Линейные дифференциально-операторные уравнения и их приложения.* – Баку: Элм, 1985. – 220 с.
2. Наймарк М.А. *Линейные дифференциальные операторы.* – М.: Наука, 1969. – 528 с.
3. Полиа Г., Сеге Г. *Задачи и теоремы из анализа.* Часть II. – М.: Наука, 1978. – 432 с.
4. Сильченко Ю.Т. *Об одном свойстве резольвенты дифференциального оператора* // Общая теория граничных задач. Сб. науч. тр. – Киев: Наук. думка, 1983. – С. 295–296.

Воронежский государственный университет

Поступила
30.06.1994